

# CLASSE DE PROBLÈMES SLCI-1

## MODÉLISER ET SIMULER LES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS.

COMPARER LES RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES AUX RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

### COMPARER LES RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES AUX RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le cours présente la modélisation d'un moteur électrique à partir des équations de la physique. Il s'agit de modèles de connaissance.

L'objectif du Tp réside dans l'implantation de ces modèles de connaissances dans Scilab et dans l'étude de performances liées au système.

## 1 Présentation : La chirurgie endoscopique

### 1.1 La chirurgie endoscopique manuelle

Photo 1 : chirurgie endoscopique manuelle



Photo 2 : instrument chirurgical "pince"

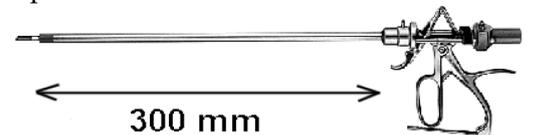
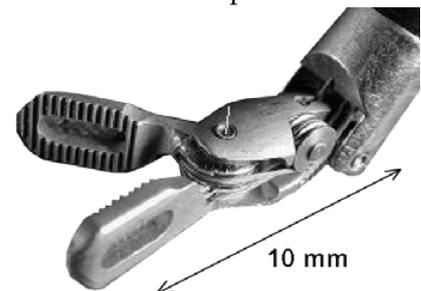


Photo 3 : Outil "pince"



Il s'agit d'utiliser des outils chirurgicaux de très petite taille, placés à l'extrémité de tiges tubulaires tenues par le chirurgien ; la partie inférieure des tiges est insérée dans la zone à traiter, à travers trois petits orifices réalisés dans le corps du patient (entre les côtes par exemple pour une chirurgie cardiaque). Ces outils chirurgicaux sont actionnés par un système de câbles fins qui passent à l'intérieur des tiges tubulaires et sont commandés par le chirurgien à l'aide de leviers placés sur la partie supérieure des tiges.

Pour faciliter le passage de chaque outil à travers les orifices réalisés dans le corps du patient, on utilise un guide ou « trocart » fixé sur la peau.

## 1.2 La chirurgie endoscopique robotisée

Un nouveau pas a été franchi autour des années 1990 lorsqu'une équipe chirurgicale utilisa trois robots à actionneurs électriques pour positionner et commander chacun des trois instruments. Le chirurgien est alors plus confortablement installé devant un poste de commande et de contrôle (Photo 4) pour commander à distance les robots et donc les outils chirurgicaux.

Les trois robots appelés "robots esclaves" (photo 5) portent les instruments, dont l'endoscope.

**Photo 4 :** chirurgie robotisée - la console

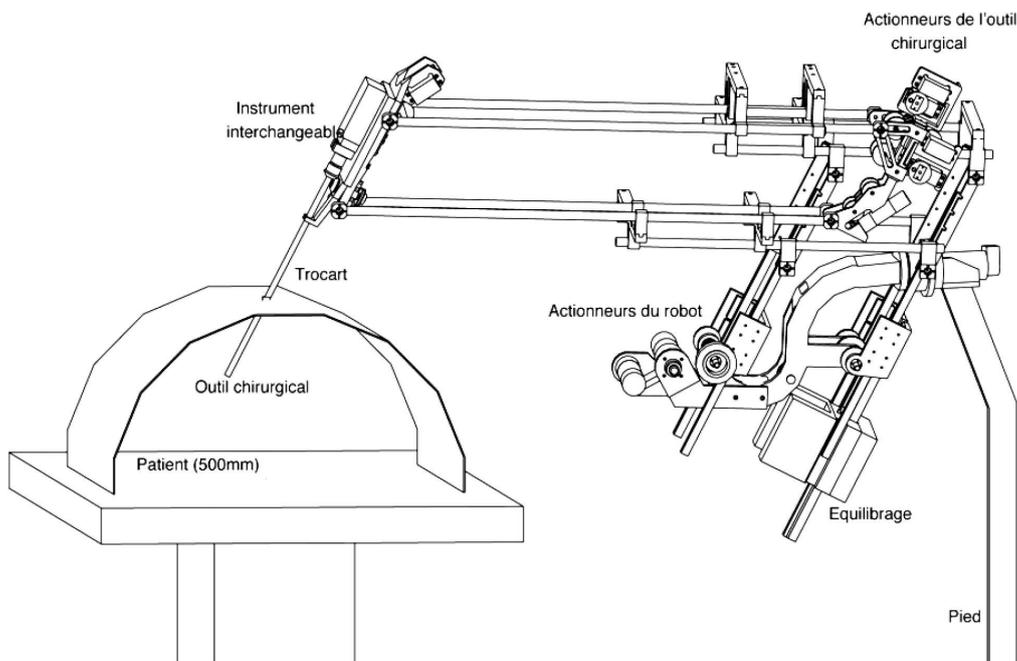


**Photo 5 :** les trois robots esclaves

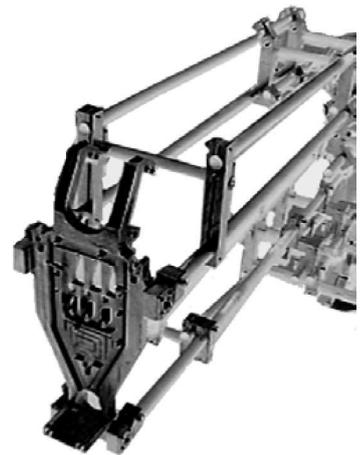


## 1.3 Évolution du robot esclave

**Figure 6 :** La structure du robot esclave "EndoXirob"



**Photo 7 :** la plaque d'interface entre le bras et l'instrument



Les recherches menées à partir des années 2000 portent sur une structure de robot esclave, qui permet d'améliorer la précision des mouvements opératoires.

Une représentation de ce robot est fournie ci-dessous en figure 6.

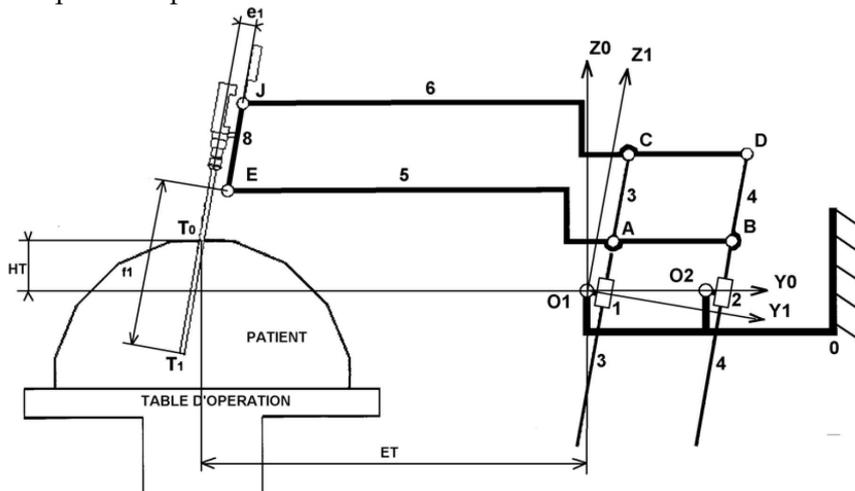
## 2 Présentation de la chaîne fonctionnelle étudiée

### 2.1 Introduction

L'étude menée dans cette partie consiste à valider le choix des composants du robot qui permettent de respecter les niveaux des critères associés à la fonction de service "Permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain".

Un schéma de principe donne ci-contre la structure du mécanisme permettant le déplacement de l'instrument chirurgical.

L'étude sera effectuée uniquement pour l'axe "d'élévation" selon  $Z_1$ .



### 2.2 Cahier des charges

On donne ci-après un extrait du cahier de charges fonctionnel du système.

Critères associés à la fonction	Niveaux
Précision	Ecart statique $\leq 0,2$ mm
	Retard de traînage $\leq 0,1$ s pour une rampe à 0,1 m/s
Rapidité	Temps de réaction à 5% du moteur $\leq 100$ ms

### 2.3 Structure de la partie opérative

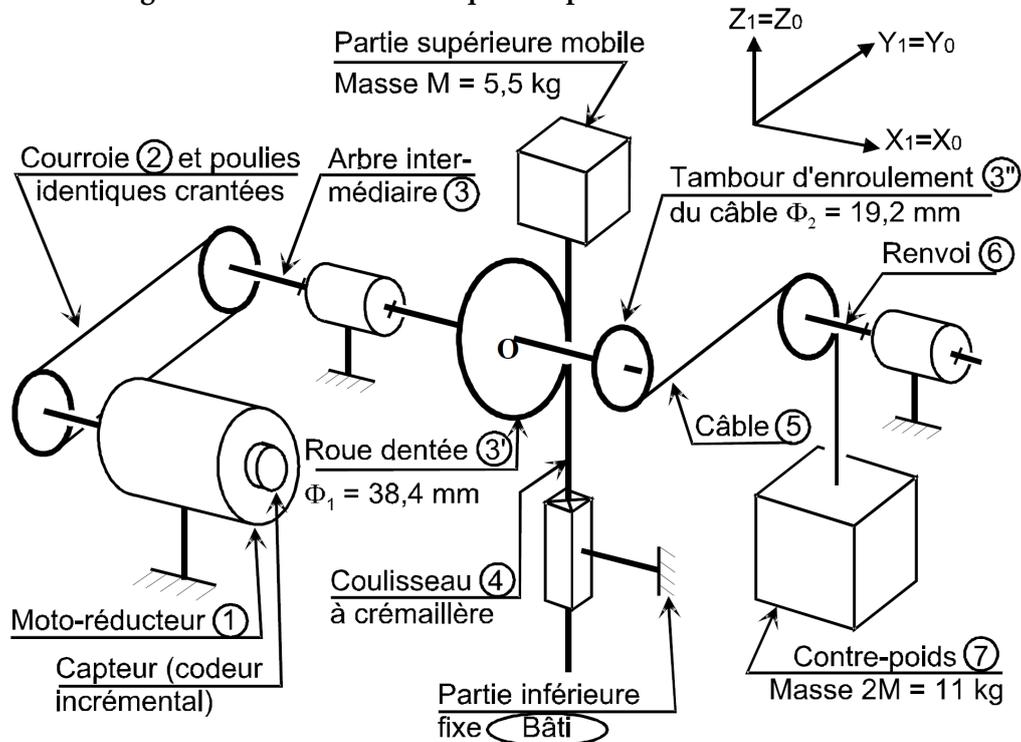
L'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006.

Le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3) à la même vitesse que le moteur.

Une roue dentée (3') de diamètre primitif  $1 = 38,4$  mm solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot. Cette crémaillère est guidée en translation suivant l'axe  $Z_1$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée "Bâti".

Un système de contrepois non représenté permet d'équilibrer l'ensemble mécanique.

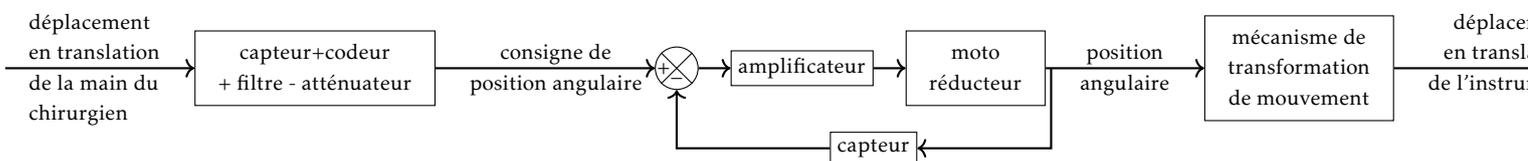
Figure 9 : chaîne cinématique simplifiée de l'axe d'élévation



## 2.4 Structure de la commande en position de l'instrument chirurgical

La figure 10 ci-dessous représente la schéma-bloc de l'axe d'élévation du dispositif de commande de l'instrument chirurgical :

Figure 10 :



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'élaborer la consigne de position angulaire du rotor du moteur.

La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par le mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

### 3 Etude de la boucle d'asservissement en position du moto-réducteur

#### 3.1 Evaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

On rappelle les équations temporelles :

$$u_m(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad ; \quad e(t) = k_e.\omega_m(t)$$

$$C_m(t) = k_c.i(t) \quad ; \quad J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f_v.\omega_m(t)$$

avec :

$u_m(t)$  : tension appliquée aux bornes de l'induit

$i(t)$  : intensité du courant traversant l'induit

$e(t)$  : force électromotrice induite par la rotation du moteur

$\omega_m(t)$  : vitesse de rotation à la sortie du réducteur

$C_m(t)$  : couple moteur ramené à la sortie du réducteur

$C_r(t)$  : couple résistant induit par les frottements secs

$R = 10$  : résistance de l'induit

$L = 2,2$  mH : inductance de l'induit

$k_c = 2,1$  N.m/A : constante de couple

$k_e = 2,1$  V.s/rad : constante de f.e.m

$f_v = 0,04$  Nm.s/rad : coefficient de frottement visqueux équivalent

$J = 7.10^{-3}$  kg.m<sup>2</sup> : moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement

$Cap = 0,166$  V.s/rad : Capteur de vitesse (génératrice tachymétrique)

Les transformées de Laplace des fonctions  $u_m(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_m(t)$ ,  $C_m(t)$  et  $C_r(t)$  seront respectivement notées  $U_M(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_M(p)$ ,  $C_M(p)$  et  $C_R(p)$ . **On considère toutes les conditions initiales nulles.**

**Q - 1:** Transformer dans le domaine de Laplace, les équations temporelles fournies. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma-bloc sur le document réponse.

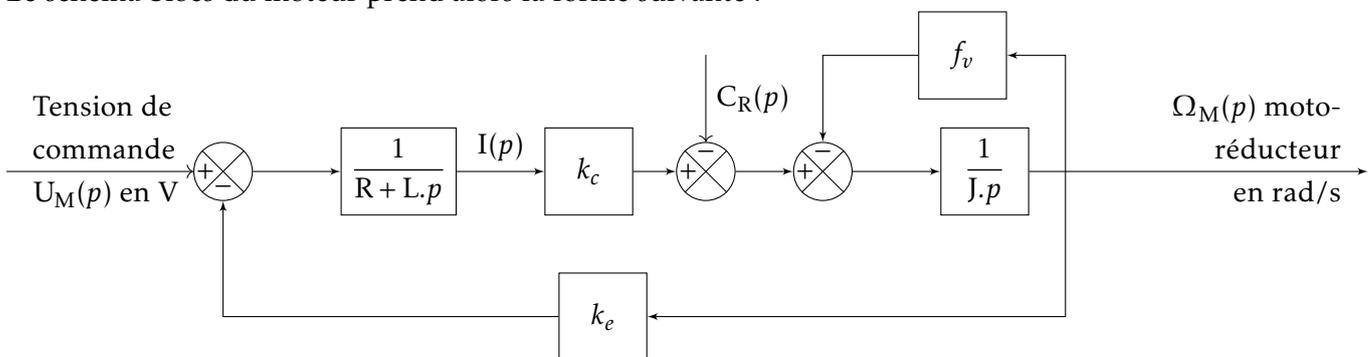
$$u_m(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad ; \quad e(t) = k_e.\omega_m(t)$$

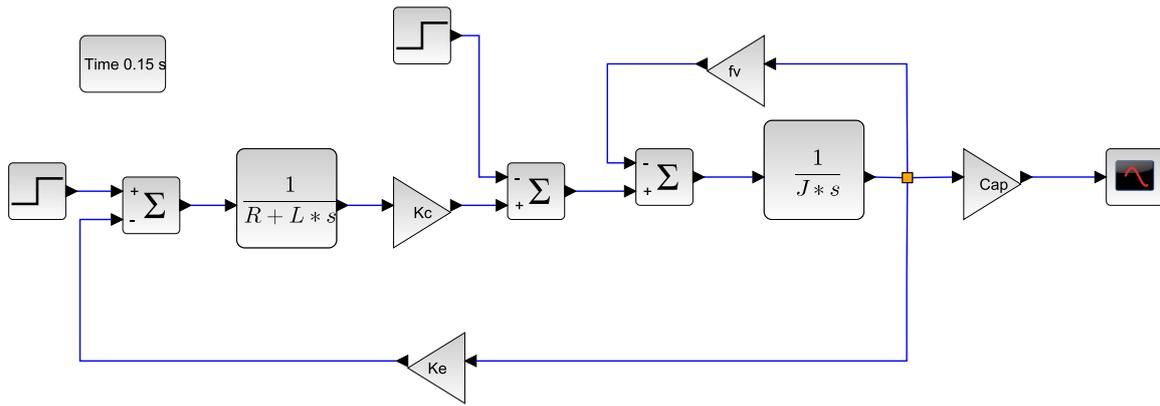
$$\Rightarrow U_M(p) = R.I(p) + L.p.I(p) + E(p) \quad ; \quad \Rightarrow E(p) = k_e.\Omega_M(p)$$

$$C_m(t) = k_c.i(t) \quad ; \quad J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f_v.\omega_m(t)$$

$$\Rightarrow C_M(p) = k_c.I(p) \quad ; \quad \Rightarrow J.p.\Omega_M(p) = C_M(p) - C_R(p) - f_v.\Omega_M(p)$$

Le schéma blocs du moteur prend alors la forme suivante :





Q - 2: Implanter le schéma-bloc ci-dessus dans Scilab, avec un temps de simulation de 0,15 s.

La lecture du schéma bloc conduit à :

$$\begin{aligned}
 J.p.\Omega_M(p) &= k_c.I(p) - C_r(p) - f_v.\Omega_M(p) = \frac{k_c}{R + L.p}.(U_M(p) - E(p)) - C_r(p) - f_v.\Omega_M(p) \\
 &= \frac{k_c}{R + L.p}.(U_M(p) - k_e.\Omega_M(p)) - C_r(p) - f_v.\Omega_M(p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ J.p + \frac{k_c.k_e}{R + L.p} + f_v \right].\Omega_M(p) &= \frac{k_c}{R + L.p}.U_M(p) - C_r(p) \\
 \Rightarrow \Omega_M(p) &= \frac{k_c}{k_c.k_e + (R + L.p).(J.p + f_v)}.U_M(p) - \frac{R + L.p}{k_c.k_e + (R + L.p).(J.p + f_v)}.C_r(p)
 \end{aligned}$$

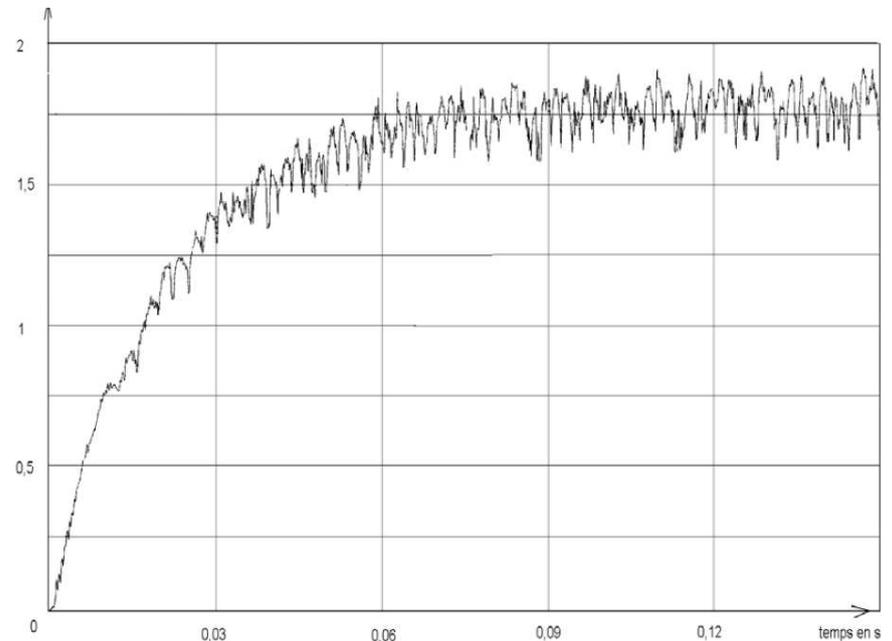
On néglige dans un premier temps l'influence de la perturbation  $C_R(p)$

Sur le système, on a pratiqué un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u_m(t) = 24$  V.

Avec un capteur de vitesse dont le gain est de 0,166 V.s/rad, on a tracé sur le document réponse la courbe de tension image de  $\omega_m(t)$ .

Q - 3: Introduire le capteur de vitesse dans le schéma bloc et simuler le système pour obtenir la courbe de tension image de  $\omega_m(t)$ . Vérifier la cohérence entre la simulation et la courbe expérimentale.

Tension (V) image de  $\omega_{red}(t)$ , en fonction du temps  $t$  :



En absence de perturbation l'expression de la vitesse de rotation est :  $\Omega_M(p) = \frac{k_c}{k_c.k_e + (R + L.p)(J.p + f_v)}.U_M(p)$

La fonction de transfert est donc du deuxième ordre. Or la courbe de réponse mesurée est caractéristique d'un système du 1er ordre (tangente non nulle, temps de réponse égale à 3 fois la constante de temps...).

En négligeant l'inductance L, la fonction de transfert devient effectivement bien du 1er ordre ce qui valide cette hypothèse.

**Q - 4:** Justifier par la simulation l'hypothèse précédente portant sur l'inductance. Pour cela, insérer le bloc

 dans le schéma bloc initial avec différentes valeurs de (L=0 mH, L=2,2 mH et L = 22 mH). Conclure quand à la pertinence de l'hypothèse.

**Dans la suite du problème, on négligera l'inductance L du moteur.**

La fonction de transfert simplifiée devient:

$$H_1(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \frac{\frac{k_c}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R}}{1 + \frac{R \cdot J + L \cdot f_v}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R} \cdot p + \frac{J \cdot L}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R} \cdot p^2} \approx \frac{\frac{k_c}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R}}{1 + \frac{R \cdot J}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R} \cdot p} = \frac{G_s}{1 + T \cdot p}$$

avec  $G_s = \frac{k_c}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R} = 0,437 \text{ rad}/(\text{s} \cdot \text{V})$  et  $T = \frac{J \cdot R}{k_c \cdot k_e + f_v \cdot R} = 1,46 \cdot 10^{-2} \text{ s}$

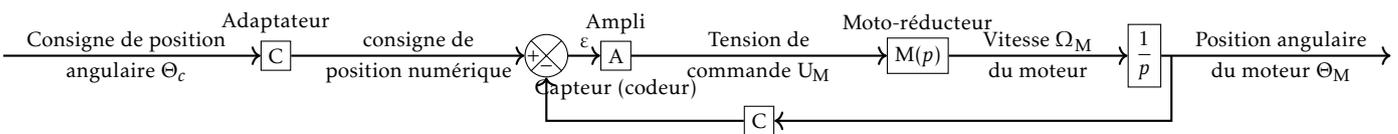
**Q - 5:** Ajouter un simple bloc du premier ordre à côté du schéma complet du moteur et par la simulation du système, justifier que les valeurs précédemment données pour  $G_s$  et T sont satisfaisantes.

**REMARQUE :** pour faire apparaître les deux courbes sur le même graphique, changer les paramètres du bloc scope.

**3.2 Réglage de la commande en position du moto-réducteur**

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-bloc figure 11 ci-dessous.

**Figure 11 :**



La consigne de position  $\theta(t)$  en radian est élaborée par le ordinateur, à partir des informations envoyées par la console.

La mesure de l'angle de rotation du moteur se fait numériquement à l'aide d'un codeur incrémental placé sur son rotor. L'ensemble est assimilable à un gain pur  $C = 2865 \text{ inc}/\text{rad}$  (inc signifiant " incréments " : unité de mesure numérique). Il est donc nécessaire d'adapter la consigne avec le même coefficient C.

Le convertisseur-amplificateur de gain A variable élabore la commande du moteur. Indépendamment des résultats précédents, on prendra :

$$M(p) = \frac{G_s}{1 + T \cdot p} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} G_s = 0,437 \text{ rad}/(\text{s} \cdot \text{V}) \\ T = 14,6 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{array} \right.$$

La nouvelle fonction de transfert  $F(p)$  de la commande en position du moteur (figure 11) prend l'expression suivante :

$$\Theta_M(p) = \frac{1}{p} \cdot M(p) \cdot A \cdot [C \cdot \Theta_C(p) - C \cdot \Theta_M(p)] \Rightarrow \left[ 1 + \frac{C}{p} \cdot M(p) \cdot A \right] \cdot \Theta_M(p) = \frac{C}{p} \cdot M(p) \cdot A \cdot \Theta_C(p)$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{\Theta_M(p)}{\Theta_C(p)} = \frac{\frac{C}{p} \cdot M(p) \cdot A}{1 + \frac{C}{p} \cdot M(p) \cdot A} = \frac{\frac{C}{p} \cdot \frac{G_S}{1 + T \cdot p} \cdot A}{1 + \frac{C}{p} \cdot \frac{G_S}{1 + T \cdot p} \cdot A} = \frac{C \cdot G_S \cdot A}{p \cdot (1 + T \cdot p) + C \cdot G_S \cdot A}$$

Il s'agit alors d'une fonction de transfert du second ordre ayant les valeurs suivantes pour caractéristiques :

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{C \cdot G_S \cdot A} \cdot p + \frac{T}{C \cdot G_S \cdot A} \cdot p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$K = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C \cdot G_S \cdot A}{T}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{C \cdot G_S \cdot A} \cdot \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{T \cdot C \cdot G_S \cdot A}}$$

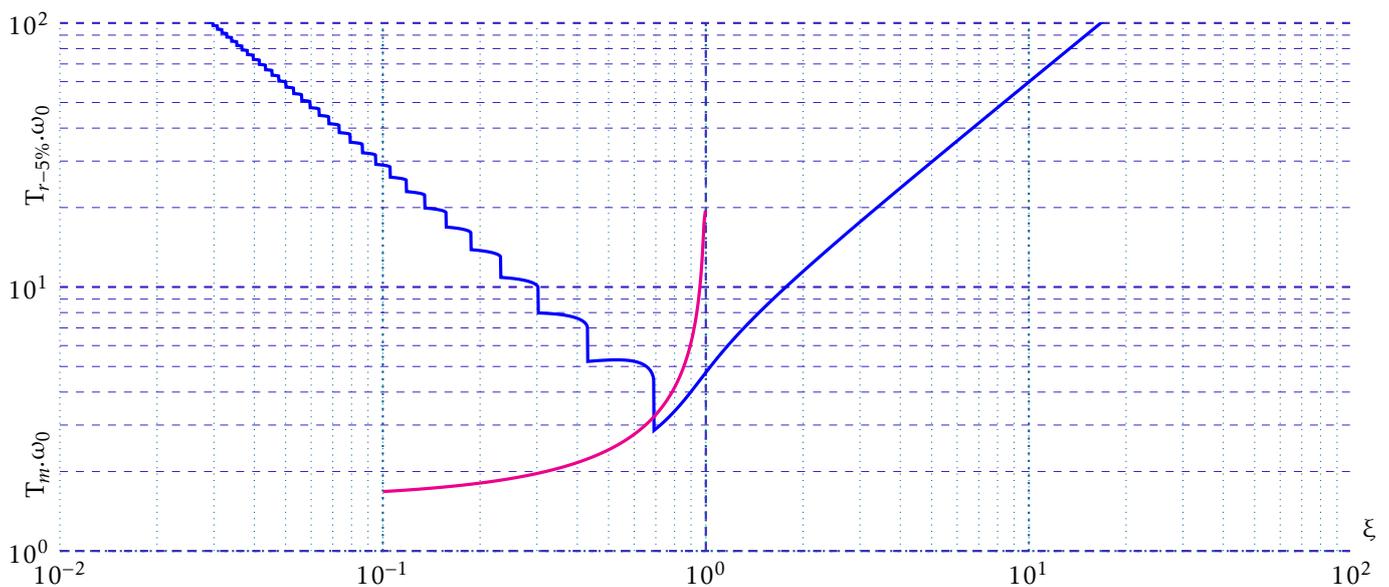
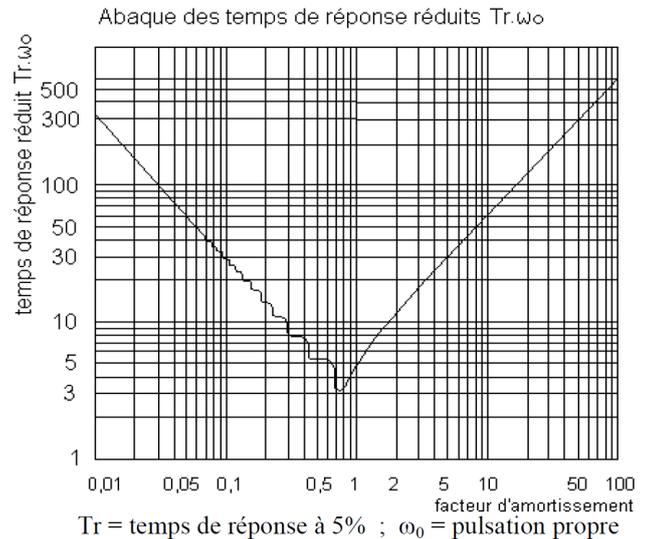
**Q - 6:** Déterminer les valeurs de  $A$  permettant d'obtenir :

- le système le plus rapide sans dépassement
- le système le plus rapide
- $z = 0,54$ , valeur préconisée par les ingénieurs dans l'optimisation des critères de précision, rapidité et stabilité.

**Q - 7:** Compléter le schéma bloc sous Scilab.

**Q - 8:** Déterminer sur les courbes simulées (réponses indicielles) les temps de réponse à 5%.

**Q - 9:** Comparer ces valeurs à celles données par les abaques ci-contre et ci-dessous. Conclure.





Temps de réponse à 5% réduit  $T_{r-5\%} \cdot \omega_0$  et temps de montée  $T_m$  en fonction du coefficient d'amortissement, en échelle logarithmique (à gauche) et en échelle linéaire (à droite).

Dans la suite, nous conserverons pour  $z$  la valeur préconisée par les ingénieurs. Indépendamment des résultats trouvés précédemment, nous prendrons  $A = 46,9 \cdot 10^{-3} \text{V/inc}$  et  $\omega_0 = 63,4 \text{ rad/s}$ .

### 3.3 Etude de la précision de la commande en position du moto-réducteur

Pour piloter un déplacement de 1 mm de l'instrument chirurgical, le moteur doit effectuer une rotation d'un angle  $\theta_0 = 5,24 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$  (le déplacement de l'instrument étant proportionnel à la rotation effectuée par le moteur).

**Q - 10:** Tracer l'erreur statique  $E_{rr}(t)$  en radian lorsque la consigne est un échelon de position :  $\theta_c(t) = \theta_0 \cdot u(t)$  avec  $\theta_0 = 5,24 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ . Que vaut l'erreur statique quand  $t$  tend vers l'infinie ? Retrouver ce résultat par le calcul.

Pour affiner l'étude de la précision de l'asservissement, il est nécessaire de prendre en compte le couple résistant négligé jusqu'alors.

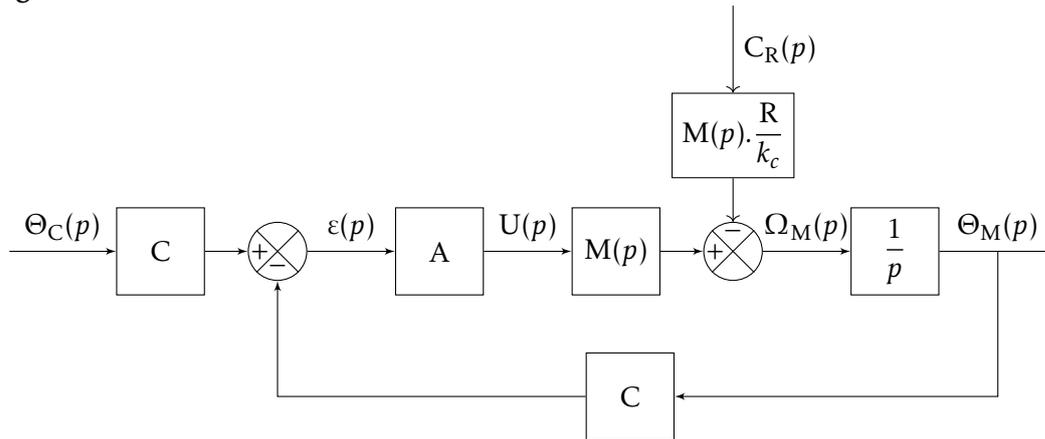
On adopte le schéma de la figure 12 ci-contre pour introduire cette perturbation.

La perturbation est telle que  $C_r(t) = C_r \cdot u(t)$  avec  $C_r = 0,2 \text{ N.m}$ .

**Q - 11 :** Afin d'utiliser le schéma bloc du moteur une seule fois, transformer le schéma bloc de la figure 12 pour ajouter rapidement la perturbation au schéma bloc précédemment construit sous Scilab.

**Q - 12:** Déterminer l'expression de l'erreur statique  $E_{rr-s}$  en fonction de  $R$ ,  $k_c$ ,  $C$ ,  $A$  et  $C_r$  pour une consigne en échelon  $\theta_c(t) = \theta_0 \cdot u(t)$

Figure 12 :



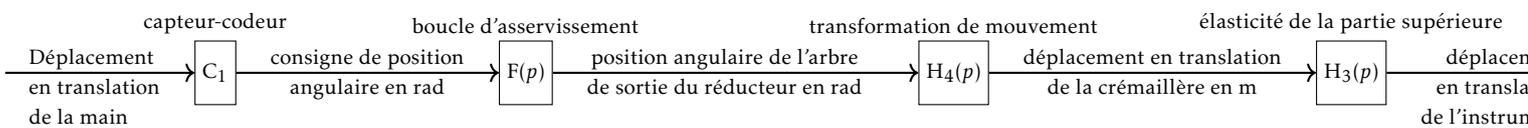
Q - 13: Faire l'application numérique pour la valeur de A trouvée à la question 11. En déduire la précision en mm de la position de l'instrument chirurgical. Vérifier la validité du cahier des charges. Retrouver ces différents résultats par simulation.

## 4 Validation de la chaîne complète de positionnement de l'instrument

### 4.1 Structure - Modélisation

La figure 13 ci-dessous propose une modélisation par un schéma-bloc de la chaîne complète de commande en position de l'instrument chirurgical.

Figure 13 :



On y retrouve :

- la consigne donnée par le chirurgien convertie en une consigne de position angulaire du moteur,
- la boucle d'asservissement du moteur étudiée en partie 4,
- le mécanisme de transformation de mouvement pignon/crémaillère,
- la partie supérieure de l'instrument qui possède une certaine élasticité dont il faut tenir compte dans la commande

Indépendamment des résultats trouvés dans les parties précédentes, on considérera que lorsque la boucle est correctement réglée, nous avons :

$$F(p) = \frac{1}{1 + 0,014.p + 0,00017.p^2}$$

Par ailleurs, on rappelle (figure 9) que le moteur entraîne en rotation la roue dentée (3') sans changement de vitesse et que cette roue de diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm provoque alors un déplacement de la crémaillère.

Le déplacement de la crémaillère étant égal à la portion d'arc déroulée,  $H_4(p) = \frac{\Phi_1}{2}$  mm/rad. En régime permanent, la position de la crémaillère est donc l'image de la position de la main, aux écarts près.

Si on souhaite qu'en régime permanent, le déplacement de la crémaillère soit identique au déplacement en translation de la main du chirurgien, le produit des gains  $C_1$ ,  $H_1$  et  $H_4$  doit être égal à 1. D'où

$$C_1 \cdot H_1 \cdot H_4 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{H_1 \cdot H_4} = \frac{1}{1 \cdot \frac{\Phi_1}{2}} = \frac{2}{\Phi_1} \text{ en rad/m}$$

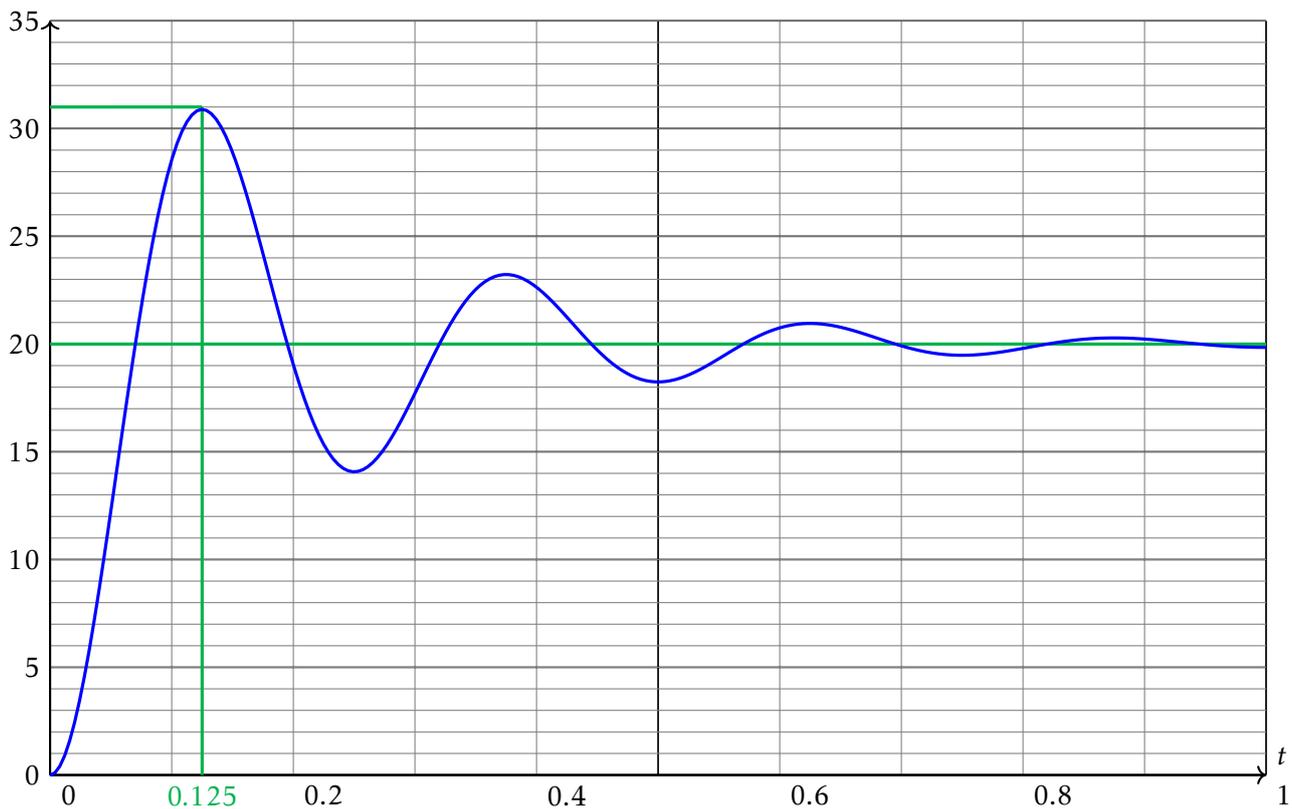
Or pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main. Pour cette nouvelle exigence,  $C_1 = \frac{1}{5 \cdot \Phi_1}$ .

#### 4.2 Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée d'un assemblage de tubes minces en fibres de carbone. Il en résulte une certaine élasticité de la liaison reliant la crémaillère à l'instrument chirurgical.

Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{instrum}(p)}{D_{crem}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{crem}(t) = 20 \cdot 10^{-3}$  m à partir de la position d'équilibre.

Figure 14 : déplacement de l'instrument en mm en fonction du temps en s.



Q - 14 : Par simulation, montrer que  $H_3(p)$  est assimilable à une fonction de transfert du second ordre de gain statique 1, de coefficient d'amortissement 0,19 et de pulsation propre 25,6 rad/s.

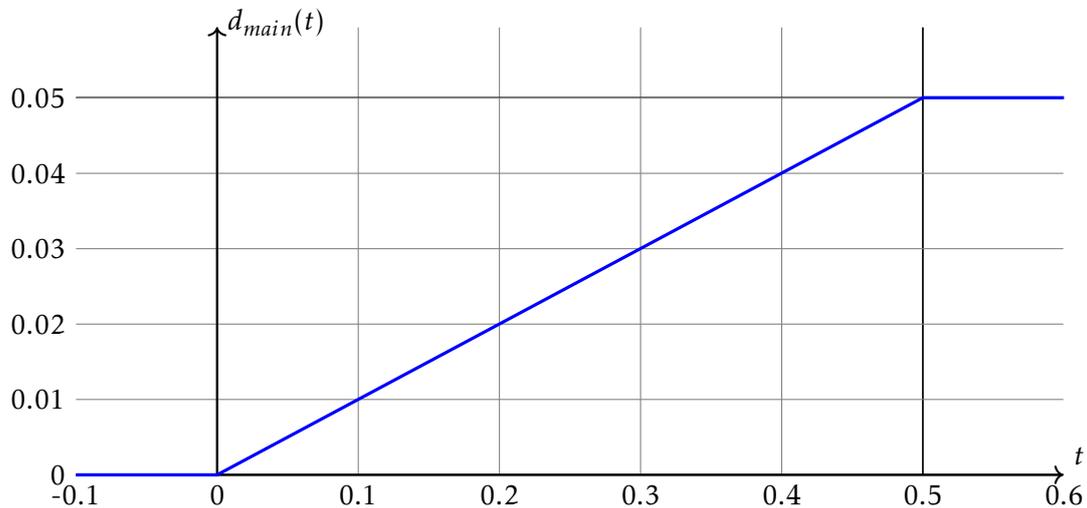
On retiendra dans la suite :

$$\text{Ainsi } H_3(p) = \frac{1}{1 + 1,48 \cdot 10^{-2} \cdot p + 1,53 \cdot 10^{-3} \cdot p^2}$$

### 4.3 Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de 100 mm / s pendant 0,5 s puis maintient la consigne constante (Figure 15).

**Figure 15:** déplacement de la main du chirurgien  $d_{main}(t)$  en m en fonction du temps en s.



**Q - 15:** A partir de la figure 15 et des éléments de la bibliothèque Scilab, simuler  $d_{main}(t)$ , le déplacement de la main du chirurgien au cours du temps.

**Q - 16 :** Construire alors le schéma bloc global du système et tracer la réponse de l'instrument en fonction du déplacement de la main du chirurgien. Comparer avec la courbe donnée ci-dessous:

**Figure 16 :** déplacement de l'instrument en mm en fonction du temps en s.

