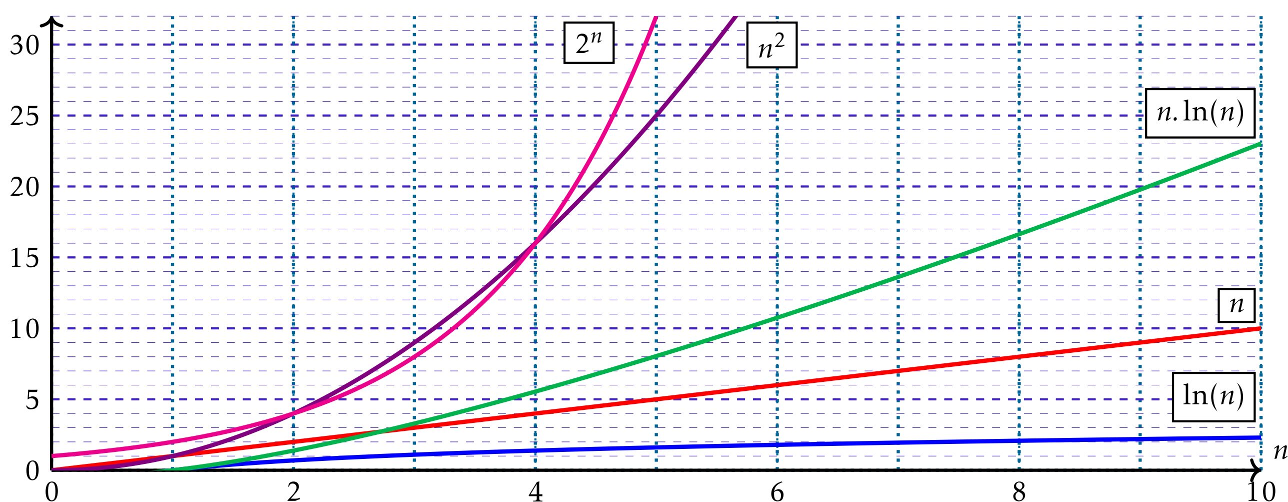
# PERFORMANCES DES ALGORITHMES




## Objectifs

A la fin de la séquence d'enseignement les élèves doivent :

- comprendre un algorithme et expliquer ce qu'il fait
- modifier un algorithme existant pour obtenir un résultat différent
- concevoir un algorithme répondant à un problème précisément posé
- expliquer le fonctionnement d'un algorithme
- écrire des instructions conditionnelles avec alternatives, éventuellement imbriquées

## Table des matières


**1 Introduction** 2
1.1 Problématique . . . 2
1.2 Cas de l'industrie . . . 2

**2 La preuve de terminaison** 2
2.1 Tester n'est pas prouver . . . 2
2.2 Conjecture de Syracuse . . . 3
2.3 Terminaison d'un algorithme . . . 3
2.3.1 Définition . . . 3
2.3.2 Problématique . . . 3
2.3.3 Variant de boucle . . . 4

**3 La preuve de correction** 4
3.1 Problème de correction . . . 4
3.2 Invariant de boucle . . . 5
3.3 Cas des algorithmes récursifs . . . 5

**4 La complexité des algorithmes** 6
4.1 Complexité en temps et en mémoire . . . 6
4.2 Opérations élémentaires . . . 6
4.3 Classes de complexité . . . 7
4.4 Méthodes de calcul de la complexité . . . 8
4.4.1 Méthode itérative . . . 8
4.4.2 Méthode par substitution . . . 8
4.4.3 Méthode générale . . . 8

# 1 Introduction

## 1.1 Problématique

**Problème:** Comment s'assurer qu'un algorithme se termine, donne des résultats corrects et est efficace ?
L'analyse des algorithmes peut se faire suivant trois axes :

- **la terminaison :** il s'agit de vérifier que l'algorithme ne tourne pas de manière infinie
- **la correction :** il faut s'assurer que le résultat renvoyé est le bon
- **la complexité :** on spécifie le temps d'exécution en fonction de la taille des données en entrée, ainsi que l'espace mémoire utilisé.

Pourquoi ces études sont-elles intéressantes ?

On ne peut prouver un théorème par des exemples.

**Exemple :** affirmer *les nombres se terminant par 9 sont divisibles par 3* est faux. Il est vrai que les cas 9, 39, 69 et 1239 fonctionnent mais 19 ne fonctionne pas.

Comment faire alors les tests permettant de mettre en lumière qu'une assertion ou un programme ne fonctionne pas ?

## 1.2 Cas de l'industrie

La preuve de programme n'est pas très développée en informatique industrielle. Le logiciel de vol de l'A380 (premier vol en 2005) est le premier à avoir été prouvé : on sait de façon certaine que les commandes de vol font ce qu'elles doivent faire. Ce n'était pas le cas sur les avions précédents.

En réalité, dans l'industrie, on fait ce qu'on appelle des tests (ou benchmark) : des scénarios sont créés sur lesquels on teste les logiciels. On en déduit alors une fiabilité du logiciel qui sert d'argument de vente. Cette phase de tests fait parfois apparaître des erreurs étonnantes.

On trouve toutes sortes d'anecdotes sur Internet :

- **problème de terminaison :** Amazon et le livre qui valait 23,7 million de dollars
- **problème de correction :** Sonde Mars Climate Orbiter
- **problème de complexité :** Portail France.fr
- **problème de calcul numérique :** Anti-missile Patriot

# 2 La preuve de terminaison

## 2.1 Tester n'est pas prouver

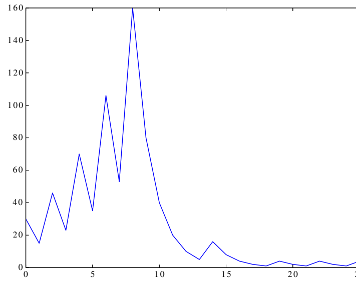
Il ne s'agit pas de lancer l'implémentation d'un algorithme pour vérifier qu'il se termine. Quand bien même on aurait effectué un très grand nombre d'exécutions ayant toutes terminées, on ne pourrait pas pour autant affirmer que l'algorithme se termine. Il reste toujours la possibilité qu'un ensemble improbable de paramètres fasse échouer le système, et l'entraîne dans une exécution interminable. C'est un **problème de terminaison**.

Le fond des choses est en fait bien plus compliqué qu'il n'y paraît. Un algorithme simple tel que le calcul de la suite de Syracuse pose encore aujourd'hui des problèmes aux mathématiciens.

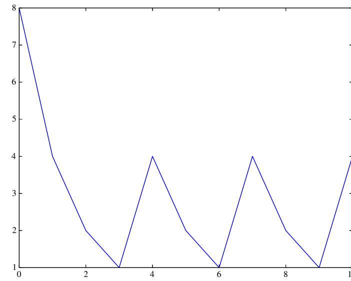
## 2.2 Conjecture de Syracuse

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = N \text{ et pour tout entier } n > 0 :$$
$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3.u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$



N=30



N=8

**Algorithm 1** Suite de Syracuse

**donnée:** N ; un entier
**résultat:** *syr* ; la liste des termes de la suite de Syracuse jusqu'à ce qu'un terme soit égal à 1.
Syracuse(N)

```
1: syr ←[N]
2: i←0
3: tant que syr[i] ! = 1 faire
4:     si syr[i] %2 == 0 alors
5:         syr←syr + [syr[i] / 2]
6:     sinon
7:         syr←syr + [3 * syr[i] + 1]
8:     fin si
9:     i← i+1
10: fin tant que
11: renvoi: syr
```

Empiriquement, cet algorithme se termine.

On sait montrer qu'une fois arrivée à 1, la suite calculée a alors un cycle d'ordre 3. Mais on ne sait pas montrer que ce cycle est toujours atteint.

## 2.3 Terminaison d'un algorithme

### 2.3.1 Définition

**Définition : Terminaison d'un algorithme**

> *un algorithme se termine, si son exécution sur machine s'arrête toujours quelque soit la nature des données en entrée*

Certaines instructions se terminent sans même que l'on ait besoin de se poser de question. C'est le cas par exemple de l'affectation et de la composition de deux instructions qui se terminent.

### 2.3.2 Problématique

Le problème vient des boucles *Tant que*. L'exemple de la suite de Syracuse le souligne : une boucle *Tant que* s'arrête lorsqu'une condition d'arrêt est réalisée, contrairement à la boucle *Pour* qui s'arrête lorsqu'un nombre prédéfini de répétitions ont été effectuées.

**Exemple :** Fonction PGCD

**Problème:** *Comment déterminer le Plus Grand Diviseur Commun (PGCD) de deux entiers dont on ne connaît pas la factorisation ?*

**Algorithm 2** Fonction PGCD

**donnée:** a et b ; deux entiers naturels non nuls
**résultat:** u ; le PGCD de a et b
PGCD(a,b)

```
1: u←a
2: v← b
3: tant que u ≠v faire
4:     si u > v alors
5:         u ←u-v
6:     sinon
7:         v← v-u
8:     fin si
9: fin tant que
   renvoi: u
```

D'après l'Algo 2, on définit la fonction $f(u,v) = u + v$.

Cette fonction est strictement positive et décroissante : il ne peut donc y avoir une infinité d'itérations. On remarque aussi qu'elle tend vers deux fois la valeur finale de $u$ (ou $v$).

**Remarque :** On pourrait aussi raisonner avec la fonction $g(u,v) = \max(u,v)$.

**Exemple :** Fonction PGCD : algorithme d'Euclide

**Problème:** Dans la tradition grecque, en comprenant un nombre entier comme une longueur, un couple d'entiers comme un rectangle, leur PGCD est la longueur du côté du plus grand carré permettant de carreler entièrement ce rectangle.

**Algorithm 3** Fonction PGCD : algorithme d'Euclide

```
    donnée: a et b ; deux entiers naturels non nuls
    résultat: le PGCD de a et b
    Euclide_PGCD(a,b)
1:  répéter
2:      r← a mod b
3:      a ←b
4:      b ←r
5:  jusqu'à r == 0
    renvoi: a
```

A la $n^{\text{ième}}$ itération, on a la relation $a_n = q_n.b_n + r_n$ où $q_n$ est un entier.

L'algorithme d'Euclide entraîne cette définition de la suite $(a_n)$: pour tout $n$ tel que $a_{n+1}$ soit un entier positif, il existe un entier $q_n$ tel que : $a_n = q_n.a_{n+1} + a_{n+2}$.

De plus, $0 \leq a_{n+2} < a_{n+1}$ pour tout $n$ tel que $a_{n+1}$ est non nul.

La suite d'entiers naturels est donc strictement décroissante (tant qu'elle est non nulle) à partir du rang 1, et vaut donc 0 à un certain rang. Il en est donc de même pour la suite $(r_n)$.

**Remarque :** L'algorithme d'Euclide (algorithme 3) présente l'avantage d'avoir une complexité en temps d'exécution moindre par rapport à l'algorithme initial (algorithme 2).

### 2.3.3 Variant de boucle

Pour faire une preuve de terminaison, on cherche donc ce que l'on appelle un variant de boucle ou encore une fonction de terminaison, c'est à dire une suite d'entiers strictement croissante majorée ou de suite d'entiers strictement décroissante minorée.

**Remarque :** le nombre de valeurs prises par la fonction de terminaison est une bonne estimation du nombre de répétitions effectuées lors de l'exécution. Si l'on trouve un majorant de cette fonction, on aura donc un majorant du nombre de tours effectués par la boucle quelque soit l'entrée de l'algorithme. C'est donc un premier pas vers l'étude de la complexité.

# 3 La preuve de correction

## 3.1 Problème de correction

On peut montrer qu'un algorithme se termine bien, sans pour autant qu'il ne donne toujours le bon résultat : c'est un **problème de correction**.
**Exemple :** Fonction PGCD : algorithme d'Euclide, structure itérative (algorithme 3)
On rappelle qu'à la $n^{\text{ième}}$ itération, on a la relation $a_n = q_n.b_n + r_n = q_n.a_{n+1} + a_{n+2}$ où $q_n$ est un entier.

A la dernière itération N, $r_N = a_{N+2} = 0$. On a donc $a_N = q_N.a_{N+1}$. La relation précédente montre que $a_{N+1}$ divise $a_N$.

On écrit ensuite que $a_{N-1} = q_{N-1}.a_N + a_{N+1} = (q_{N-1}.q_N + 1).a_{N+1}$.

On en déduit que $a_{N+1}$ divise aussi $a_{N-1}$ ; puis, de même, et par récurrence, que $a_{N+1}$ divise tous les termes de la suite $(a_n)$ ; en particulier les premiers termes $a$ et $b$. $a_{N+1}$ est donc bien un diviseur commun de $a$ et $b$.

Réciproquement, tout diviseur commun de $a$ et $b$ divise aussi tous les termes de la suite $(a_n)$; donc en particulier $a_{N+1}$. $a_{N+1}$ est donc un diviseur commun de $a$ et $b$, que divise tout autre diviseur commun ; c'est bien le PGCD$(a, b)$.

Le PGCD de $a_n$ et $a_{n+1}$ pour tout $n$ entier positif non nul, est ce que l'on appelle un invariant de boucle. A chaque itération, c'est une propriété qui est **conservée**.

## 3.2 Invariant de boucle

Un invariant de boucle est une propriété :
- qui est vérifiée après la phase d'initialisation,
- qui reste vraie après l'exécution d'une itération,
- qui, conjointement à la condition d'arrêt, permet de montrer que le résultat attendu est bien celui qui est calculé.

## 3.3 Cas des algorithmes récursifs

Pour prouver la correction d'un **algorithme récursif**, on adopte un **raisonnement par récurrence**.

La preuve s'effectue par induction (récurrence) sur la taille du problème à résoudre.
- la base de la récurrence est celle de la récursivité.
- l'étape de la récurrence : on suppose que l'algorithme est correct pour les appels récursifs précédents, et on montre qu'il fonctionne correctement pour l'appel actuel.

**Exemple :** Fonction PGCD : algorithme d'Euclide, structure récursive

**Algorithm 4** Fonction PGCD : algorithme d'Euclide récursifs

```
   donnée: a et b; deux entiers naturels non nuls tels que a > b
   résultat: le PGCD de a et b
   Euclide_PGCD_recursif(a,b)
1: si b==0 alors
2:     renvoi: a
3: sinon
4:     renvoi: Euclide_PGCD_recursif(b,a mod b)
5: fin si
```

- au dernier appel N de la fonction *Euclide_PGCD_récursif*, $b_N = 0$. $a_N$ est donc le PGCD$(a_N, 0)$.
- on suppose qu'au n$^{\text{ième}}$ appel de la fonction *Euclide_PGCD_recursif*, $a_N$ est le PGCD$(a_n, b_n)$.
- à l'appel $n-1$ de la fonction *Euclide_PGCD_récursif* :

$$a_{n-1} = q_{n-1}.b_{n-1} + r_{n-1} = q_{n-1}.a_n + b_n$$

  Or $a_N$ étant le PGCD$(a_n, b_n)$, il est aussi plus grand diviseur de $(a_{n-1}, a_n)$, c'est-à-dire que $a_N =$ PGCD$(a_{n-1}, a_n)$ et donc $a_N =$ PGCD$(a_{n-1}, b_{n-1})$.

- on en déduit par récurrence que $a_N = \mathrm{PGCD}(a, b)$.

# 4 La complexité des algorithmes

## 4.1 Complexité en temps et en mémoire

En plus d'être correct, on demande à un algorithme d'être efficace.

Cette efficacité peut être évaluée par :
- le temps que prend l'exécution de l'algorithme : c'est la **complexité en temps**. Le temps d'exécution dépend de la taille des données fournies en entrées.
- les ressources nécessaires à son exécution : c'est la **complexité en mémoire** (cf cours Pivot de Gauss).

On se focalise donc par la suite sur l'étude la complexité en temps d'exécution, i.e. en **nombre d'opérations élémentaires**.

Nous étudions donc le nombre d'opérations élémentaires de manière asymptotique avec les notions mathématiques de Landau : O(), Θ().

On suppose que $f(n) \geq 0$ et $g(n) \geq 0$ pour tout entier $n$ :
- $f$ est appelée un *grand Ô* de $g$ et on note $f = O(g)$ lorsqu'il existe un rang $n_0$ et une constante $c > 0$ tels que $\forall n \geq n_0,\ f(n) \leq c.g(n)$
- $f$ est appelée un *theta* de $g$ et on note $f = \Theta(g)$ lorsqu'il existe un rang $n_0$ et une constante $c_1,\ c_2 > 0$ tels que $\forall n \geq n_0,\ c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$

Tout le travail de l'étude de complexité repose donc sur l'identification des opérations non élémentaires et sur le calcul de leur nombre.

## 4.2 Opérations élémentaires

On considère comme élémentaires les opérations :
- addition, soustraction, multiplication, division, modulo sur des entiers ou des flottants
- affectation simple,
- accès aux éléments d'un tableau
- modification d'un éléments d'un tableau
- taille d'un tableau
- La méthode append sur une liste Python peut être considérée comme une opération basique.
- la gestion de la variable de boucle d'une boucle *Pour*
- les tests élémentaires, utilisés principalement dans les boucles *Tant que* et les structures conditionnelles

Si l'on note T(P) la complexité d'une instruction P, alors pour deux instructions P et Q, on a :

$$T(P; Q) = T(P) + T(Q)$$

Ainsi, T(**Pour** i **de** 1 **à** n **faire** P(i) **FinPour**) $= \sum_{i+1}^{n} T(P(i))$.

**Exemple :** Somme géométrique.

**Problème:** *On souhaite calculer la somme des n premiers entiers.*

**Algorithm 5** Somme des n premiers entiers

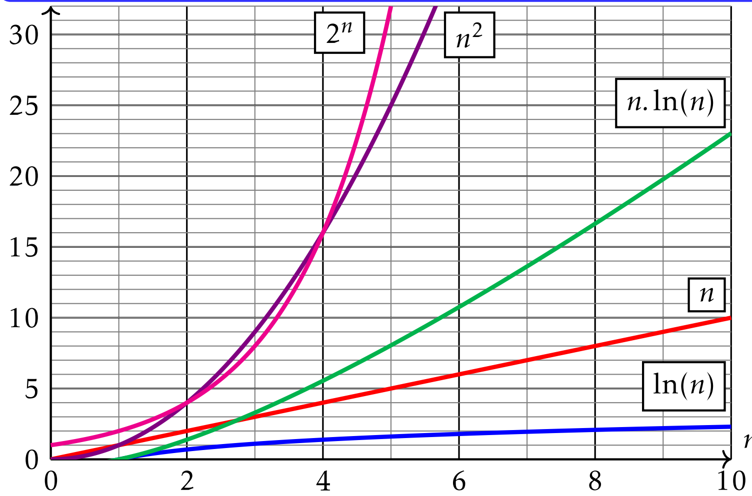
**donnée:** n, un entier
**résultat:** S ; la somme des n premiers entiers
Somme(n)

```
1: S←0
2: pour i de 1 à n faire
3:     S←S+i
4: fin pour
5: renvoi: S
```

Dans l'algorithme ci-dessus, on ne considère que le coût $t$ de la somme $S+i$ effectuée à chaque itération de la boucle *Pour*.

Ainsi le coût total est de la forme $C(n) = n.t$. On dira que la complexité est du type : $C(n) = \Theta(n)$. Elle croît linéairement avec le nombre d'entiers $n$.

## 4.3 Classes de complexité




On définit différentes classes de complexité :

| Notation | Type de complexité |
|---|---|
| $\Theta(1)$ | Complexité constante |
| $\Theta(\ln(n))$ | Complexité logarithmique |
| $\Theta(n)$ | Complexité linéaire |
| $\Theta(n.\ln(n))$ | Complexité quasi-linéaire |
| $\Theta(n^2)$ | Complexité quadratique |
| $\Theta(n^3)$ | Complexité cubique |
| $\Theta(n^p)$ | Complexité polynomiale |
| $\Theta(n^{\ln(n)})$ | Complexité quasi-polynomiale |
| $\Theta(2^n)$ | Complexité exponentielle |
| $\Theta(n!)$ | Complexité factorielle |

| Opération Python | Coût moyen |
|---|---|
| Copy | O(n) |
| Append | O(1) |
| Insert | O(n) |
| Obtenir un élément | O(1) |
| Changer un élément | O(1) |
| Supprimer un élément | O(n) |
| Itération | O(n) |
| Obtenir une sélection | O(k) |

| Opération Python | Coût moyen |
|---|---|
| Supprimer une sélection | O(n) |
| Changer une sélection | O(k+n) |
| Extend | O(k) |
| Trier | O(n.log(n)) |
| Multiplier | O(nk) |
| x in s | O(n) |
| min(s), max(s) | O(n) |
| Length | O(1) |

Il apparaît deux choses :

- il faut éviter les complexités supérieures à la complexité polynomiale d'ordre 2 ;
- il ne faut absolument pas compter sur les avancées technologiques !

Nous étudierons, lorsque l'exemple s'y prêtera, trois types de complexités en temps :

- **la complexité dans le pire cas,** $C_{max}$ **:** c'est un majorant du temps d'exécution sur toutes les entrées possibles d'une même taille ; la complexité dans le pire cas apporte une notion de sécurité sur le temps d'exécution ;
- **la complexité en moyenne,** $C_{moy}$ **:** il s'agit d'une moyenne sur le temps d'exécution sur toutes les entrées possibles d'une même taille en considérant une distribution équiprobable ; elle représente le comportement moyen d'un algorithme ;
- **la complexité dans le meilleur cas,** $C_{min}$ **:** elle est peu utile, facile à calculer, mais n'apporte qu'une borne inférieure sur les temps d'exécution.

## 4.4 Méthodes de calcul de la complexité

### 4.4.1 Méthode itérative

On **somme** membre à membre et on en déduit la complexité :

**Exemple :** avec une récurrence $C(n) = C(n/2) + 1$

$$\begin{array}{r|rcl} 1 & C(n) & = & C(n/2)+1 \\ 2 & C(n/2) & = & C(n/4)+1 \\ & & \dots & \\ i & C(n/(2^{i-1})) & = & C(n/(2^i))+1 \\ & & \dots & \\ m & C(1) & = & \cancel{C(0)}+1 \\ \hline & C(n) & = & m = \log_2(n)+1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad C(n) = O(\ln(n))$$

### 4.4.2 Méthode par substitution

on vérifie une **intuition** :

- hypothèse par intuition $C(n) = g(n)$
- démontrer que $a.g(n/b)+f(n) = g(n)$ avec $g(1) = c$ en fixant les constantes

### 4.4.3 Méthode générale

on utilise les propriétés des **suites récurrentes linéaires**.

On peut toujours écrire une relation de récurrence de la forme :

$$\begin{array}{rcl} C(1) & = & c \\ C(n) & = & a.C(n/b)+f(n) \end{array}$$

| Relation | Solution | Exemples |
|---|---|---|
| $C(n) = C(n-1)+b$ | $C(n) = C(0)+b.n = \Theta(n)$ | factorielle, recherche séquentielle (balayage) récursive dans un tableau |
| $C(n) = a.C(n-1)+b, a \neq 1$ | $C(n) = a^n.\left(C(0)-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a} = \Theta(a^n)$ | répétition a fois d'un traitement sur le résultat de l'appel récursif |
| $C(n) = C(n-1)+a.n+b$ | $C(n) = C(0)+a.n.(n+1)/2+n.b = \Theta\left(n^2\right)$ | traitement en coût linéaire avant l'appel récursif, tri à bulle |
| $C(n) = C(n/2)+b$ | $C(n) = C(1)+b.\log_2(n) = \Theta(\ln(n))$ | recherche dichotomique récursive, exponentiation rapide |
| $C(n) = a.C(n/2)+b, a \neq 1$ | $C(n) = n^{\log 2(a)}.\left(C(1)-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a} = \Theta\left(n^{\log 2(a)}\right)$ | répétition a fois d'un traitement sur le résultat de l'appel récursif dichotomique |
| $C(n) = C(n/2)+a.n+b$ | $C(n) = \Theta(n)$ | traitement linéaire avant l'appel récursif dichotomique |
| $C(n) = 2.C(n/2)+a.n+b$ | $C(n) = \Theta(n.\ln(n))$ | traitement linéaire avant double appel récursif dichotomique, tri fusion |