Problèmes stationnaires à une dimension du type $f(x) = 0$

Ingénierie numérique et simulations

LYCÉE CARNOT (DIJON), 2013 - 2014

Germain Gondor

Sommaire

1. Racines d'un polynôme
2. Racine énième
3. Remboursement de prêt
4. $x = 2.\sin(x)$

Sommaire

1. Racines d'un polynôme
2. Racine énième
3. Remboursement de prêt
4. $x = 2.\sin(x)$

Racines d'un polynôme

Le polynôme $P(x) = x^3 - 2.x - 5$ a une racine proche de 2.

Q - 1 : *En partant de $x_0 = 2$, calculer $(x_i)_1^3$ les 3 premières itérations issues de la méthode de Newton. Que vaut alors $P(x_3)$?*

Q - 2 : *Calculer $P(3)$. Si $P(2).P(3) < 0$, déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une approximation x_{sol} à 10^{-5} près de la racine de P proche de 2. Calculer alors $P(x_{sol})$.*

Sommaire

1. Racines d'un polynôme
2. Racine énième
3. Remboursement de prêt
4. $x = 2.\sin(x)$

Racine énième

Soit la fonction $f(x) = x^n - a$.

Q - 3 : *Montrer que la méthode de Newton conduit à la relation de récurrence suivante :*

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}.\left[(n-1).x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$$

Racine énième

Soit la fonction $f(x) = x^n - a$.

Q - 3 : *Montrer que la méthode de Newton conduit à la relation de récurrence suivante :*

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}.\left[(n-1).x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n.x_k^{n-1}} = \frac{n.x_k^n - x_k^n + a}{n.x_k^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}.\left[(n-1).x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right] \end{aligned}$$

Sommaire

1. Racines d'un polynôme
2. Racine énième
3. Remboursement de prêt
4. $x = 2.\sin(x)$

Remboursement de prêt

Un prêt de K € (capital emprunté) est remboursé en n mensualités d'un même montant M. Les remboursements commencent un moins après le versement du prêt. On montre que si le taux d'intérêt annuel proportionnel est t alors :

$$K.\frac{t}{12} = M.\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{t}{12}\right)^n}\right)$$

Dans le cas d'une prêt de $A = 10000$ € pour l'achat d'une voiture, ce prêt est remboursé en 60 mensualités de 250 €.

Q - 4 : *Utiliser une méthode de Newton pour déterminer le taux d'intérêt mensuel r avec 4 chiffres significatifs.*

Sommaire

1. Racines d'un polynôme
2. Racine énième
3. Remboursement de prêt
4. $x = 2.\sin(x)$

$x = 2.\sin(x)$

Intéressons nous à la résolution de l'équation $x = 2.\sin(x)$ en posant $f(x) = x - 2.\sin(x)$.

Q - 5 : *Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.*

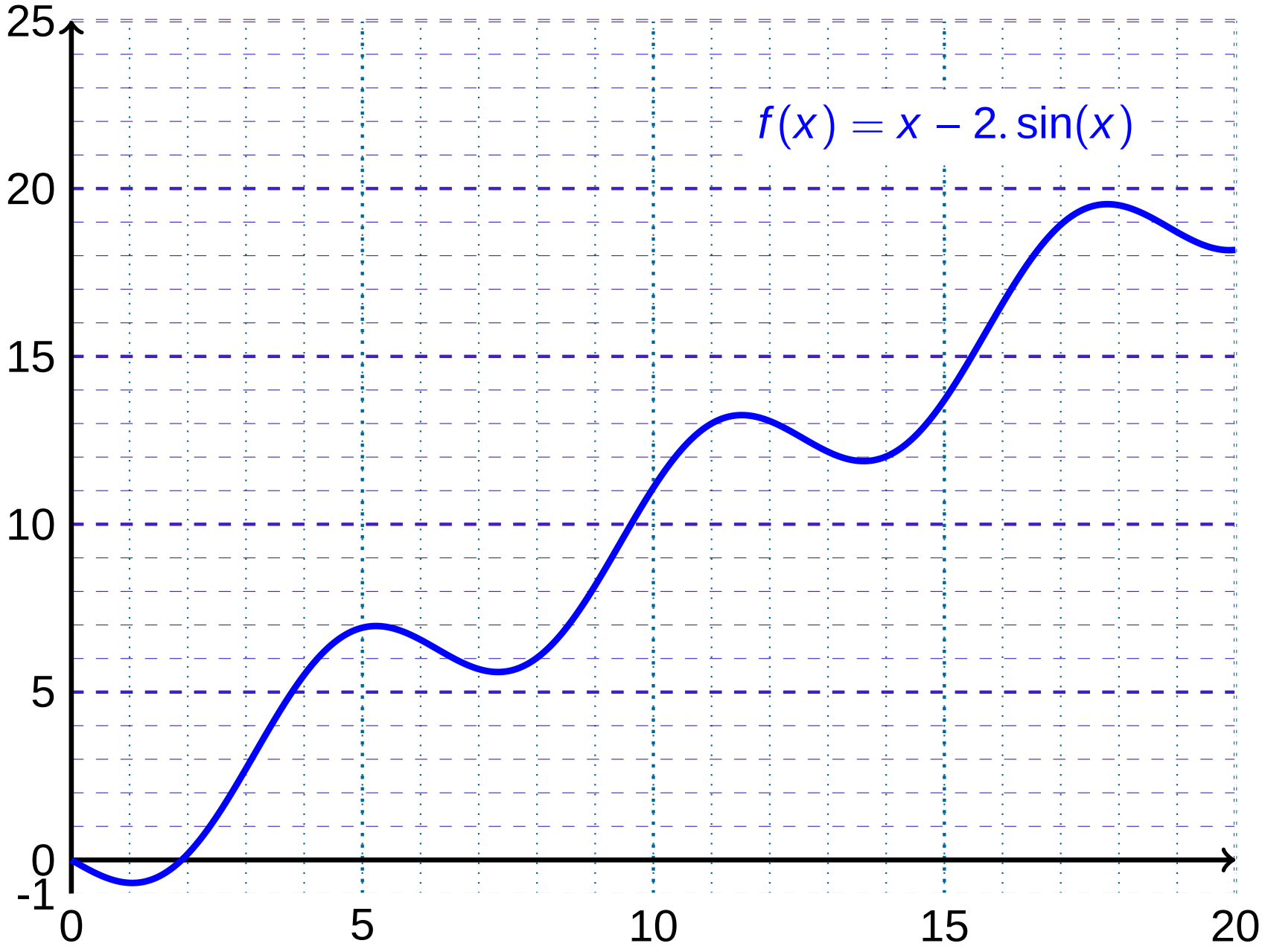
Q - 6 : *Que se passe-t-il si le premier élément pour la recherche du zéro de la fonction avec la méthode de Newton est $x_0 = \frac{\pi}{3}$?*

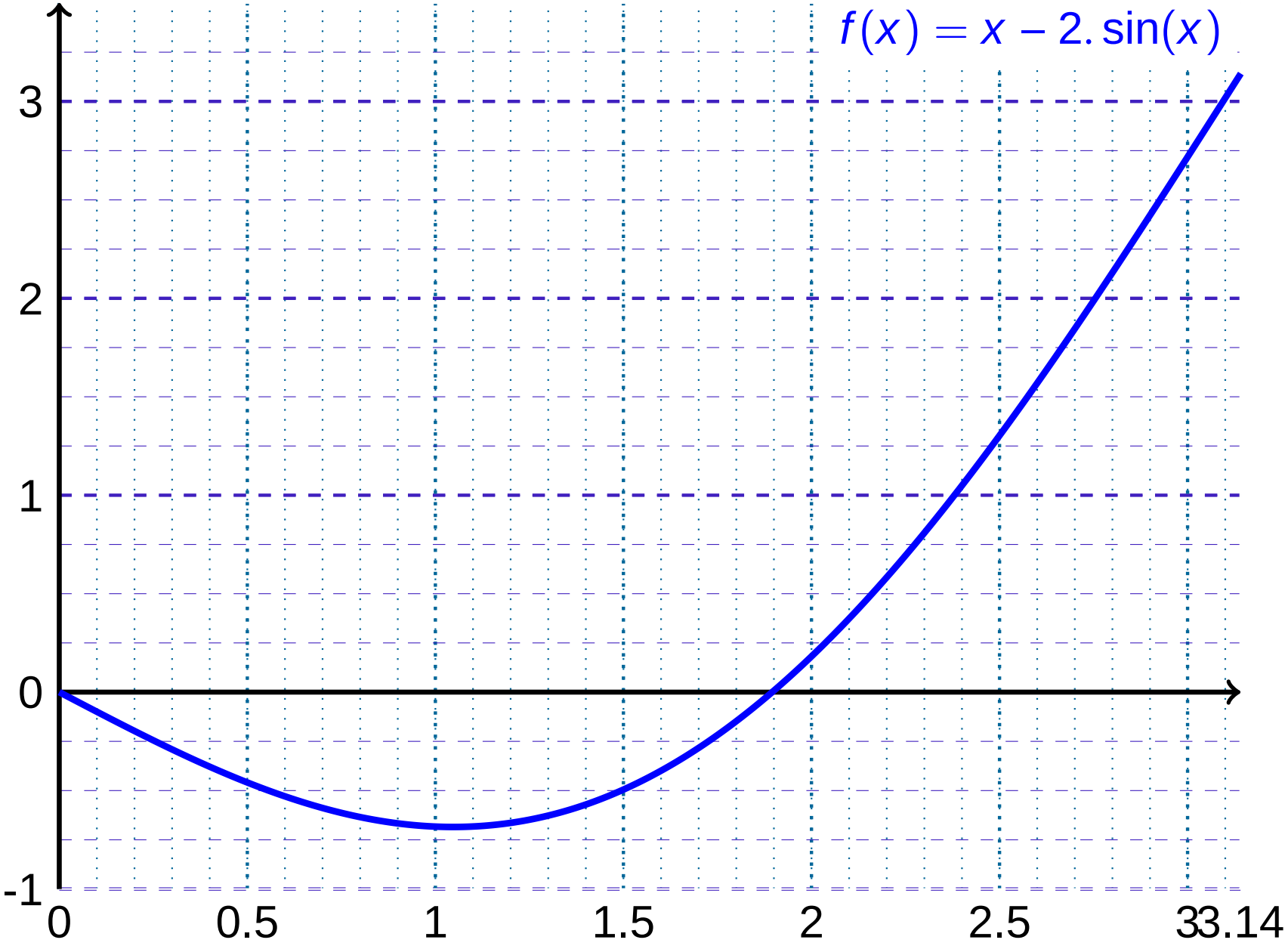
Q - 7 : *On choisit* $x_0 = 1,1$. *Calculer les* $(x_i)_1^6$ *premiers termes issus des itérations avec la méthode de Newton.*

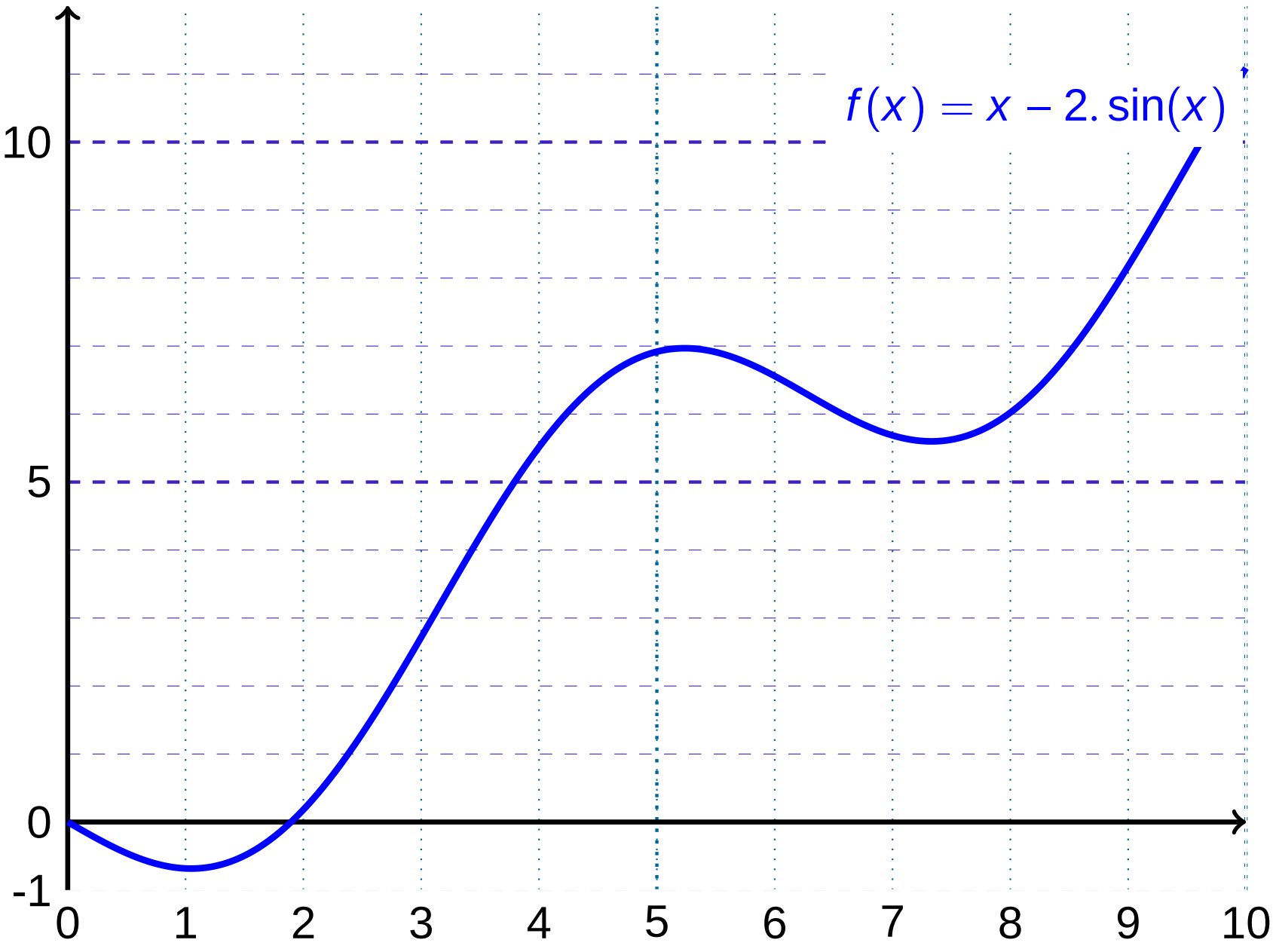
Q - 8 : *Placer les* $(x_i)_0^2$ *premiers termes sur la dernière courbe.*

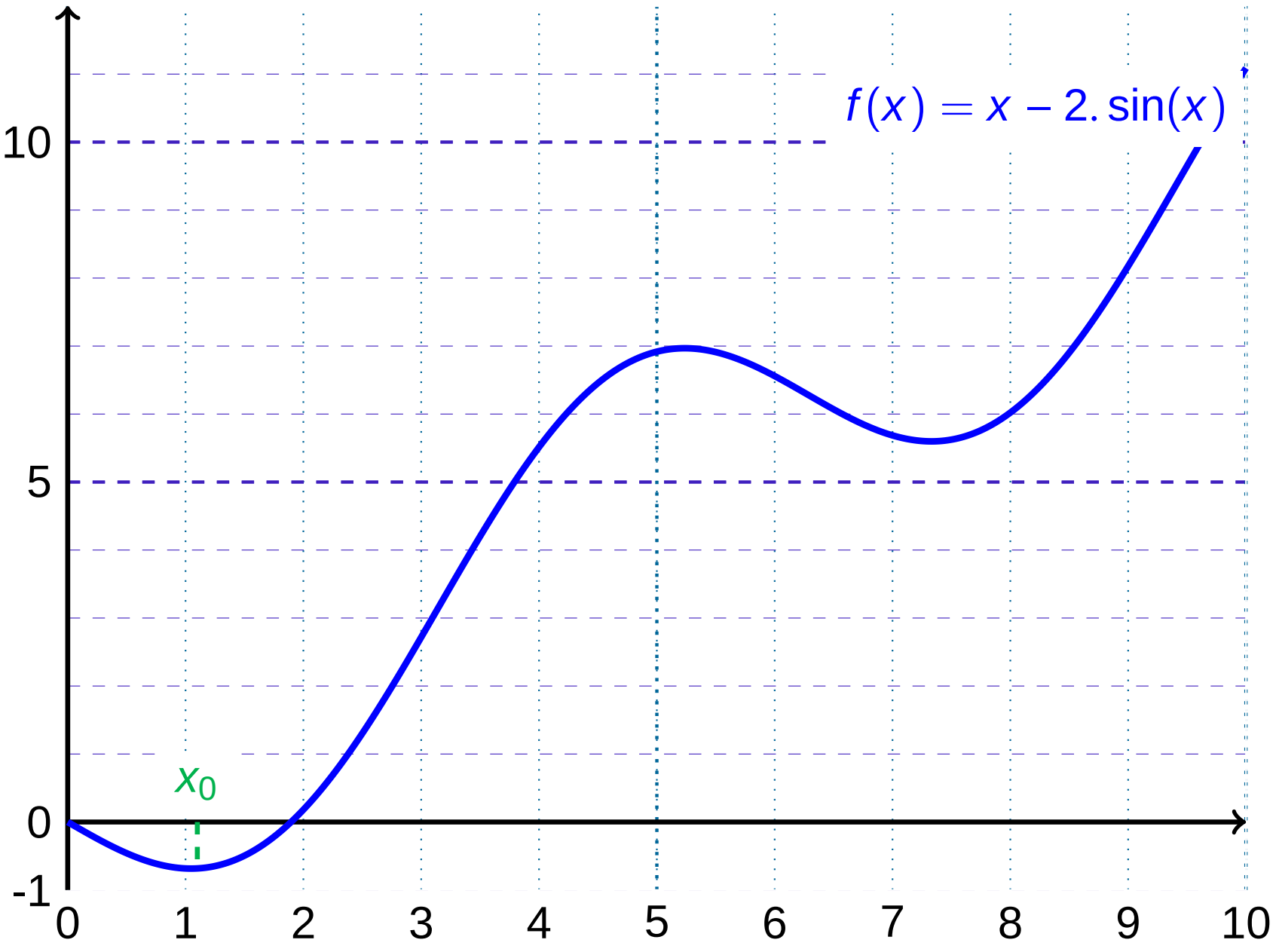
Q - 9 : *Expliquer pourquoi, en partant de* $x_0 = 1,5$, *l'algorithme converge très rapidement.*

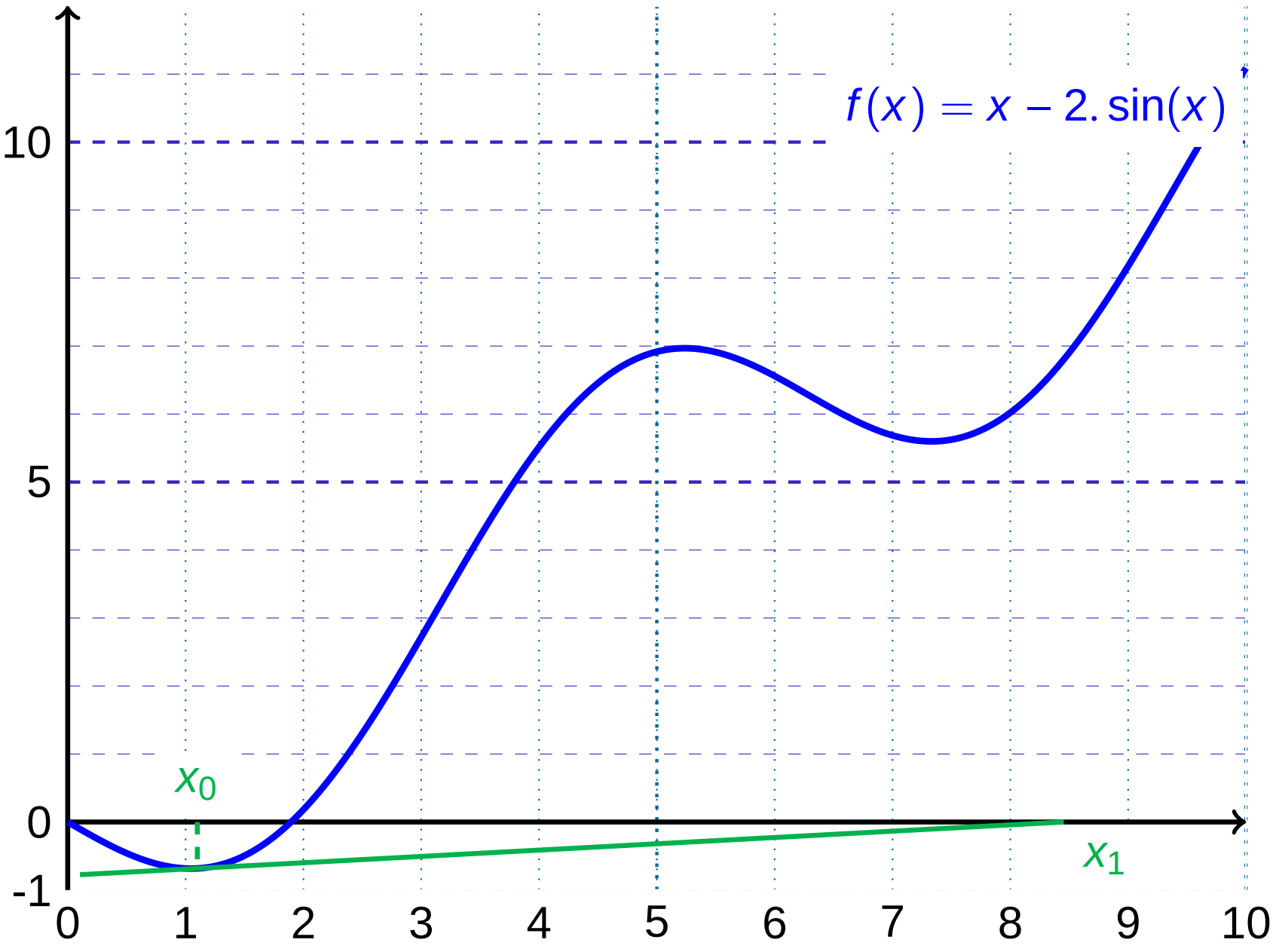
Q - 10 : *Que se passe-t-il lorsqu'on pose* $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ *?*

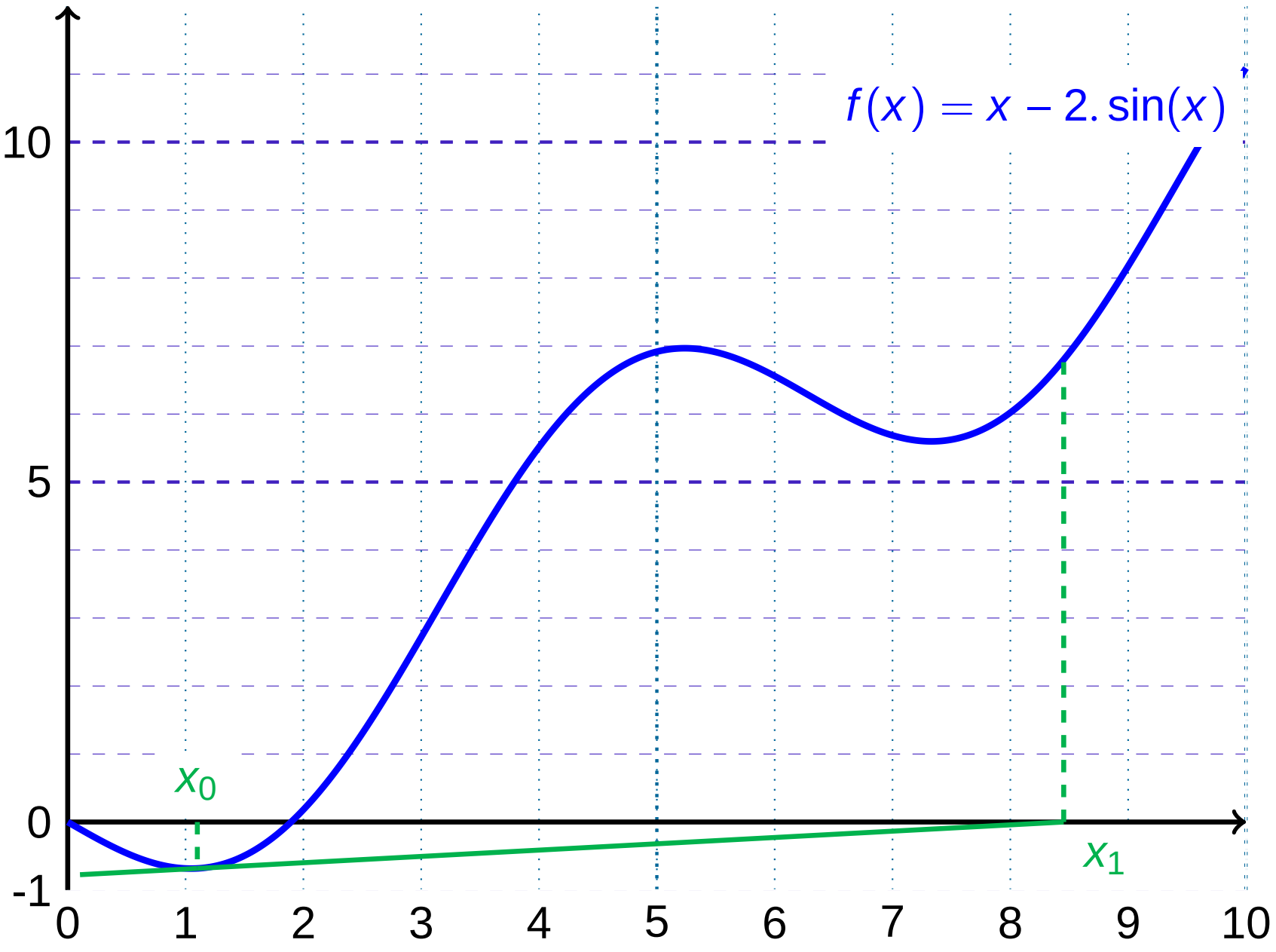

$f(x) = x - 2.\sin(x)$
25
20
15
10
5
0
-1
0
5
10
15
20

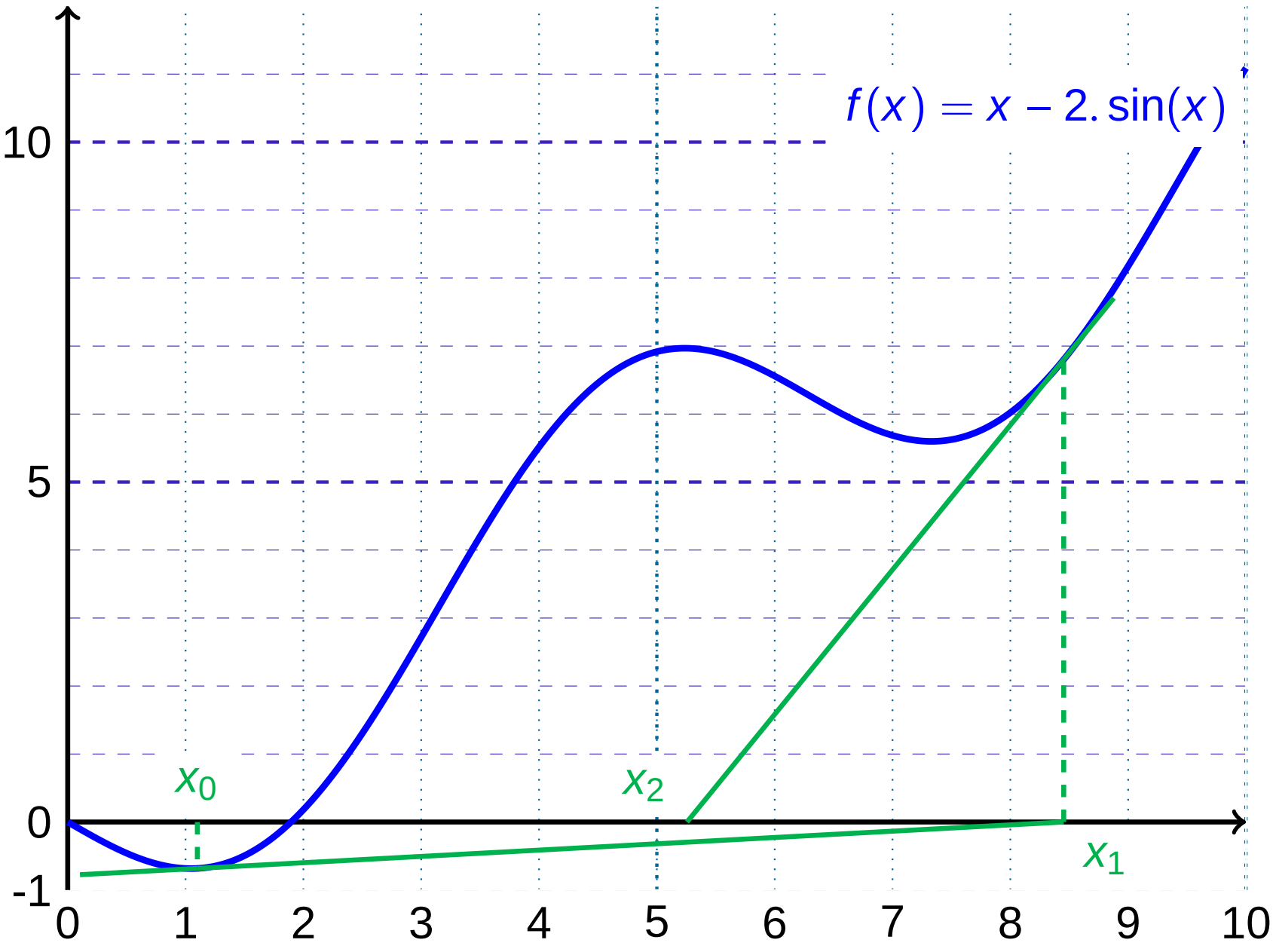

$f(x) = x - 2.\sin(x)$
3
2
1
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
33.14

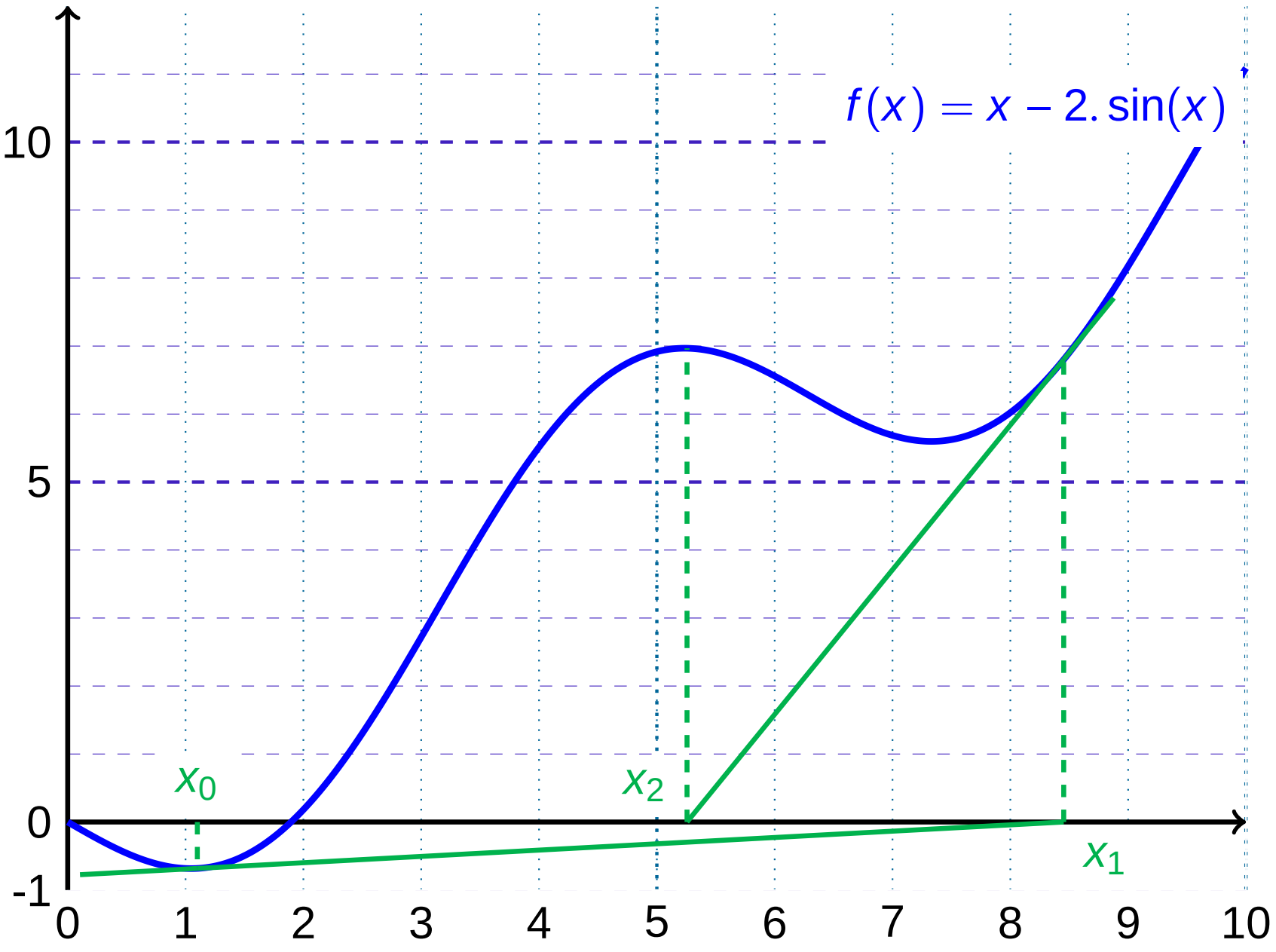

$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

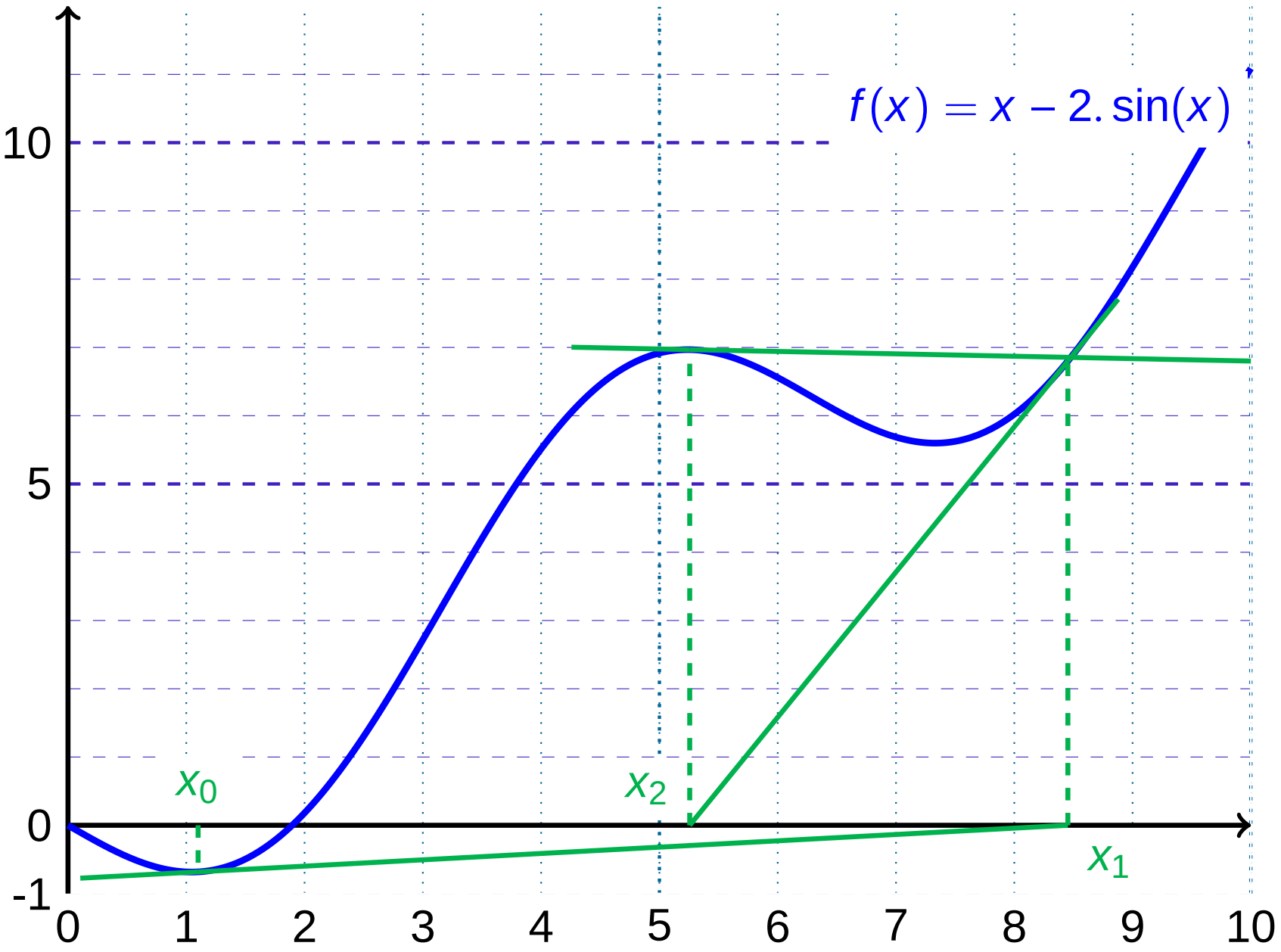

$f(x) = x - 2.\sin(x)$
x_0
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

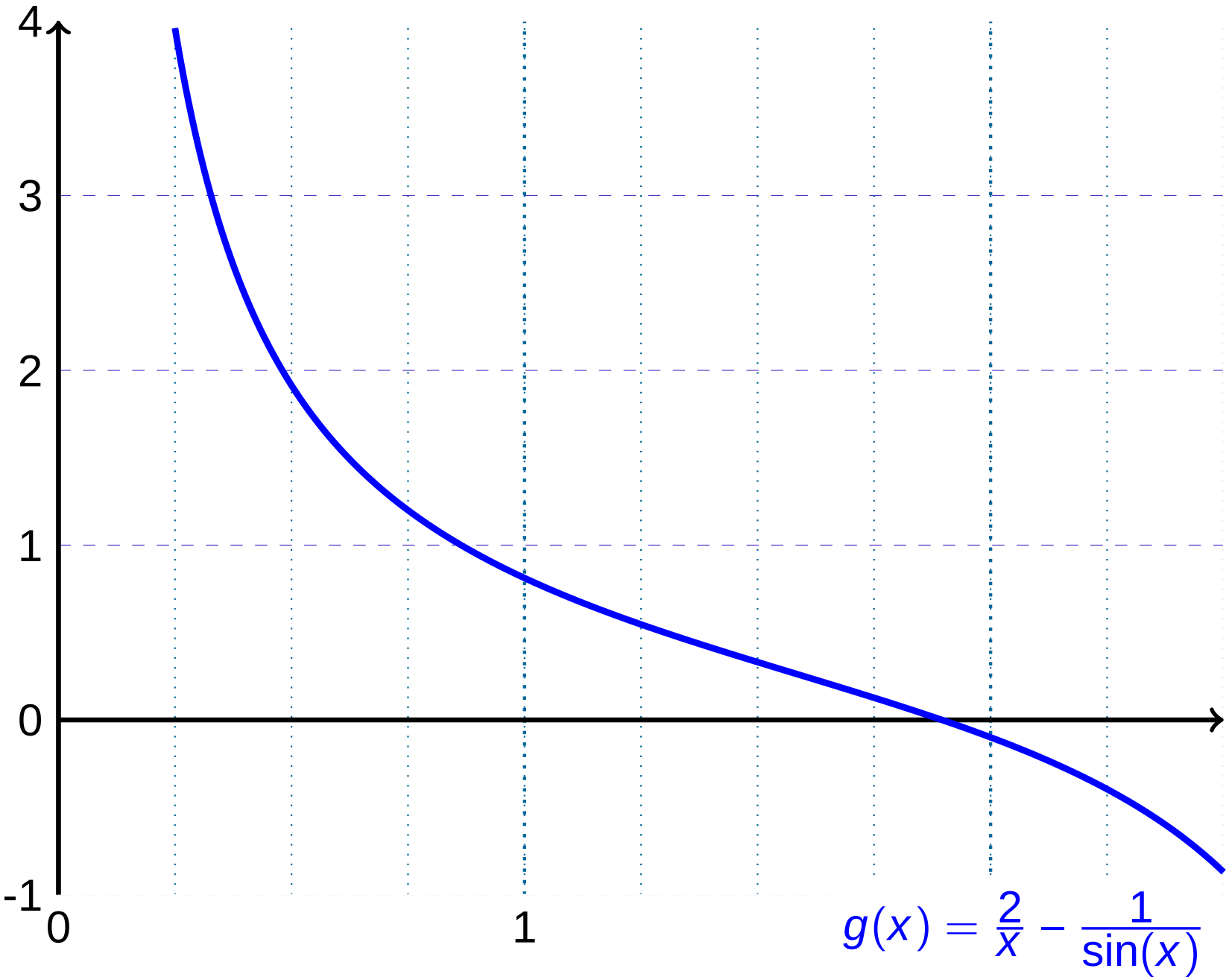

$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_0
x_1


$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_0
x_1


$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_0
x_2
x_1


$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_0
x_2
x_1


$f(x) = x - 2.\sin(x)$
10
5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x_0
x_2
x_1


4
3
2
1
0
-1
0
1
$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$