

Graphes

Définitions, représentations et implémentations

S2-3-1 GRAPHERS - les bases

Germain Gondor

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

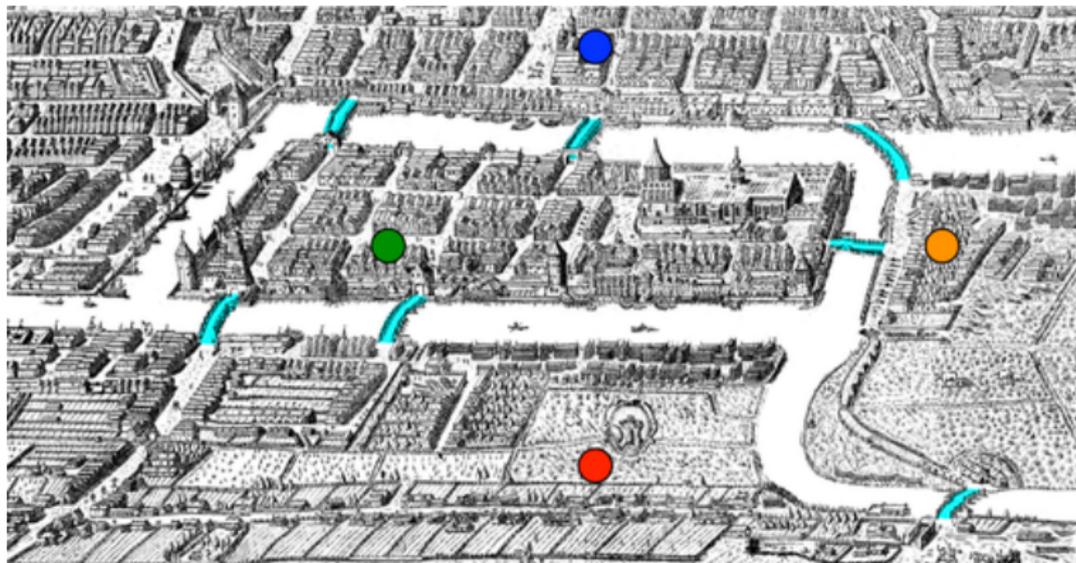
Sommaire

- 1 Vocabulaire et définitions
- 2 Représentations des graphes
- 3 Implémentation des graphes

Problème des 7 ponts.

Problème des 7 ponts.

1735 - Königsberg. Euler pose les bases de la théorie des graphes.



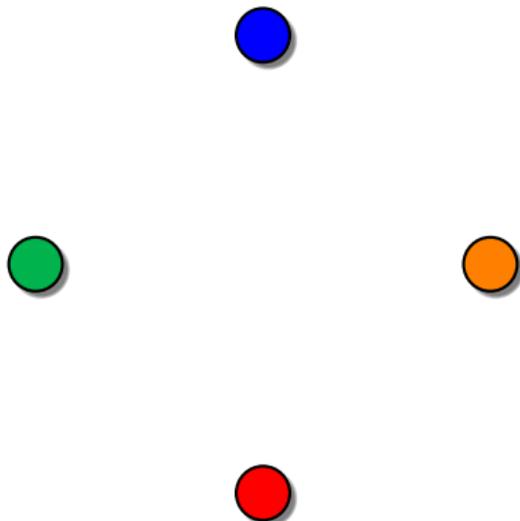
Problème des 7 ponts.

1735 - Königsberg. Euler pose les bases de la théorie des graphes.

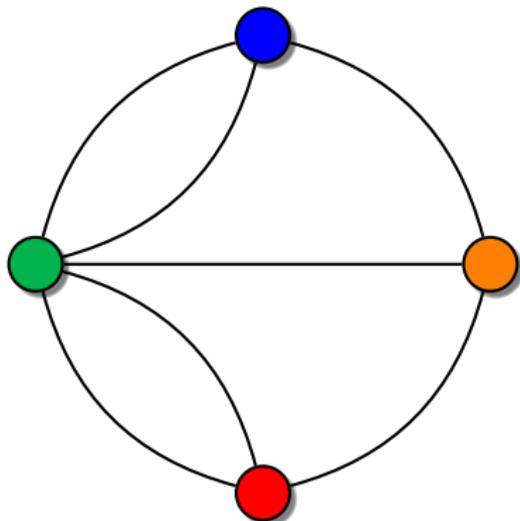


Est-il possible d'obtenir un trajet permettant d'aller dans les 4 secteurs de la ville en passant une et une seule fois par les 7 ponts de la ville?

Problème des 7 ponts.



Problème des 7 ponts.



Sommaire

- 1 **Vocabulaire et définitions**
 - D'un point de vue mathématique
 - Vocabulaire et définitions associés aux graphes
 - Vocabulaire et définitions liés aux sommets et aux arêtes
 - Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe
 - Vocabulaire et définitions liés aux chaînes
- 2 Représentations des graphes
- 3 Implémentation des graphes

D'un point de vue mathématique

Un graphe G est constitué de deux éléments :

D'un point de vue mathématique

Un graphe G est constitué de deux éléments :

- un ensemble de points noté $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$ (ou V pour *vertex* - *vertices* en anglais)

D'un point de vue mathématique

Un graphe G est constitué de deux éléments :

- un ensemble de points noté $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$ (ou V pour *vertex* - *vertices* en anglais)
- un ensemble noté $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ (ou E pour *edge* en anglais) de couples (s_i, s_j) ou paires $\{s_i, s_j\}$ avec s_i et s_j des éléments de S .

D'un point de vue mathématique

Un graphe G est constitué de deux éléments :

- un ensemble de points noté $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$ (ou V pour *vertex* - *vertices* en anglais)
- un ensemble noté $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ (ou E pour *edge* en anglais) de couples (s_i, s_j) ou paires $\{s_i, s_j\}$ avec s_i et s_j des éléments de S .

Une paire $\{s_i, s_j\}$ décrit une relation symétrique entre s_i et s_j . En revanche, un couple (s_i, s_j) traduit une relation de s_i vers s_j sans qu'il existe pour autant une relation de s_j vers s_i .

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** $G(S,A)$ est constitué d'un ensemble S de **sommets** (points ou nœuds) et d'un ensemble A d'**arêtes** (couples, paires, lignes, liens...).

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** $G(S, A)$ est constitué d'un ensemble S de **sommets** (points ou nœuds) et d'un ensemble A d'**arêtes** (couples, paires, lignes, liens...).
- L'**ordre** n d'un **graphe** $G(S, A)$ est le nombre de ses **sommets**. On note l'**ordre** $p = |S| = \#S$.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** $G(S, A)$ est constitué d'un ensemble S de **sommets** (points ou nœuds) et d'un ensemble A d'**arêtes** (couples, paires, lignes, liens...).
- L'**ordre** n d'un **graphe** $G(S, A)$ est le nombre de ses **sommets**. On note l'**ordre** $p = |S| = \#S$.
- Un **graphe** est **orienté** s'il existe un sens de parcours des arêtes. Les arêtes ont alors un **sens** et s'appellent alors **arc**.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** $G(S, A)$ est constitué d'un ensemble S de **sommets** (points ou nœuds) et d'un ensemble A d'**arêtes** (couples, paires, lignes, liens...).
- L'**ordre** n d'un **graphe** $G(S, A)$ est le nombre de ses **sommets**. On note l'**ordre** $p = |S| = \#S$.
- Un **graphe** est **orienté** s'il existe un sens de parcours des arêtes. Les arêtes ont alors un **sens** et s'appellent alors **arc**.
- Un **graphe** est dit **vide** si l'ensemble A de ses **arêtes** est vide.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un graphe est **simple** si deux **sommets** quelconques sont reliés par au plus une **arête** et qu'aucune **arête** possède le même sommet à ses extrémités.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est **simple** si deux **sommets** quelconques sont reliés par au plus une **arête** et qu'aucune **arête** possède le même sommet à ses extrémités.
- Un **multigraphe** est un **graphe** pour lequel deux **sommets** sont reliés entre eux par plusieurs **arêtes** et/ou une **arête** possède le même sommet à ses extrémités.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est **simple** si deux **sommets** quelconques sont reliés par au plus une **arête** et qu'aucune **arête** possède le même sommet à ses extrémités.
- Un **multigraphe** est un **graphe** pour lequel deux **sommets** sont reliés entre eux par plusieurs **arêtes** et/ou une **arête** possède le même sommet à ses extrémités.
- Un **graphe** est dit **planaire** (sinon **non planaire**) s'il est possible de le représenter dans le plan sans que ses **arêtes** se croisent.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est **simple** si deux **sommets** quelconques sont reliés par au plus une **arête** et qu'aucune **arête** possède le même sommet à ses extrémités.
- Un **multigraphe** est un **graphe** pour lequel deux **sommets** sont reliés entre eux par plusieurs **arêtes** et/ou une **arête** possède le même sommet à ses extrémités.
- Un **graphe** est dit **planaire** (sinon **non planaire**) s'il est possible de le représenter dans le plan sans que ses **arêtes** se croisent.
- Un **graphe** est dit **connexe** si quelque soit un de ses **sommets**, il est possible d'atteindre tous les autres **sommets** via les **arêtes**.

REMARQUE : un graphe **non connexe** se décompose en sous-**graphe connexes**.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est dit **complet** si chacun de ses **sommets** est reliés à tous les autres.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est dit **complet** si chacun de ses **sommets** est reliés à tous les autres.
- Un **graphe** est dit **pondéré** si un nombre ou un **poids** est associé à chaque **arête**.

Vocabulaire et définitions associés aux graphes

- Un **graphe** est dit **complet** si chacun de ses **sommets** est reliés à tous les autres.
- Un **graphe** est dit **pondéré** si un nombre ou un **poids** est associé à chaque **arête**.
- Un **graphe** est dit **étiqueté** si un texte ou un **étiquette** est associé à chaque **arête**.

Dans un graphe quelconque

Dans un graphe quelconque

- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une même arête. Ces deux sommets sont alors appelés **extrémités** de l'arête et sont définis comme **voisins**.

Dans un graphe quelconque

- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une même arête. Ces deux sommets sont alors appelés **extrémités** de l'arête et sont définis comme **voisins**.
- Le nombre de **voisins** d'un sommet s_i est son **degré** que l'on note $d(s_i)$.

Dans un graphe quelconque

- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une même arête. Ces deux sommets sont alors appelés **extrémités** de l'arête et sont définis comme **voisins**.
- Le nombre de **voisins** d'un sommet s_i est son **degré** que l'on note $d(s_i)$.
- Une arête forme une **boucle** si ses **extrémités** sont identiques (ex : $\{s_i, s_i\}$).

Dans un graphe quelconque

- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une même arête. Ces deux sommets sont alors appelés **extrémités** de l'arête et sont définis comme **voisins**.
- Le nombre de **voisins** d'un sommet s_i est son **degré** que l'on note $d(s_i)$.
- Une arête forme une **boucle** si ses **extrémités** sont identiques (ex : $\{s_i, s_i\}$).
- Le **degré d'un graphe** est le **degré** maximum de tous ses sommets.

Dans un graphe orienté

Dans un graphe orienté

- les arêtes sont appelées **arcs**

Dans un graphe orienté

- les arêtes sont appelées **arcs**
- un **arc** a une **extrémité initiale** (sommet de départ, origine ou prédécesseur) et une **extrémité finale** ou **extrémité terminale** (sommet d'arrivée, extrémité ou successeur).

Dans un graphe orienté

- les arêtes sont appelées **arcs**
- un **arc** a une **extrémité initiale** (sommet de départ, origine ou prédécesseur) et une **extrémité finale** ou **extrémité terminale** (sommet d'arrivée, extrémité ou successeur).
- un sommet s_i a un **degré entrant** (nombre d'**arcs** dont il est l'**extrémité finale**) noté $d_-(s_i)$ aussi appelé **demi-degré intérieur** et un **degré sortant** (nombre d'**arcs** dont il est l'**extrémité initiale**) noté $d_+(s_i)$ aussi appelé **demi-degré extérieur**.

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de **chaîne** et on note $\chi(A, B)$, le **chemin** de A vers B .

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de **chaîne** et on note $\chi(A, B)$, le **chemin** de A vers B .
- Un **chemin** peut être donné par la séquence des sommets ou par la séquence des arcs empruntées $(a_0, a_1, \dots, a_{c-1})$.

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de **chaîne** et on note $\chi(A, B)$, le **chemin** de A vers B .
- Un **chemin** peut être donné par la séquence des sommets ou par la séquence des arcs empruntées $(a_0, a_1, \dots, a_{c-1})$.
- La **longueur d'une chaîne** (ou d'un **chemin**) est le nombre d'arêtes utilisées pour aller du **sommet de départ** s_0 au **sommet d'arrivé** s_c .

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de **chaîne** et on note $\chi(A, B)$, le **chemin** de A vers B .
- Un **chemin** peut être donné par la séquence des sommets ou par la séquence des arcs empruntées $(a_0, a_1, \dots, a_{c-1})$.
- La **longueur d'une chaîne** (ou d'un **chemin**) est le nombre d'arêtes utilisées pour aller du **sommet de départ** s_0 au **sommet d'arrivé** s_c .
- La **distance** entre deux sommets est la **longueur** minimale d'une **chaîne** (ou d'un **chemin**) reliant ces deux sommets.

Vocabulaire et définitions liés parcours d'un graphe

- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne**, une séquence (s_0, s_1, \dots, s_c) où deux sommets consécutifs sont adjacents. Le **sommet de départ** est s_0 et le **sommet d'arrivé** s_c .
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** plutôt que de **chaîne** et on note $\chi(A, B)$, le **chemin** de A vers B .
- Un **chemin** peut être donné par la séquence des sommets ou par la séquence des arcs empruntées $(a_0, a_1, \dots, a_{c-1})$.
- La **longueur d'une chaîne** (ou d'un **chemin**) est le nombre d'arêtes utilisées pour aller du **sommet de départ** s_0 au **sommet d'arrivé** s_c .
- La **distance** entre deux sommets est la **longueur** minimale d'une **chaîne** (ou d'un **chemin**) reliant ces deux sommets.
- On appelle **diamètre** d'un graphe, la plus longue **distance** entre deux sommets.
REMARQUE : s'il n'existe pas de **chaîne** ou de **chemin** reliant ces deux sommets, la distance entre ces sommets est **infinie**.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.
- Une **chaîne eulérienne** d'un graphe est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.
- Une **chaîne eulérienne** d'un graphe est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un **cycle hamiltonien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.
- Une **chaîne eulérienne** d'un graphe est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un **cycle hamiltonien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe.
- Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un **cycle hamiltonien**.

Vocabulaire et définitions liés aux chaînes

- Une chaîne est dite **simple** si chaque arête du graphe y apparaît au plus une fois.
- Une chaîne est dite **fermée** si le sommet de départ est le sommet de fin.
- Un **cycle** est une chaîne **fermée simple**.
- Un **cycle eulérien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.
- Une **chaîne eulérienne** d'un graphe est une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe.
- Un **cycle hamiltonien** d'un graphe est un **cycle** passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe.
- Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un **cycle hamiltonien**.
- Une **chaîne hamiltonienne** d'un graphe est une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe.

Nombre cyclomatique

Nombre cyclomatique

Pour un graphe G ayant n arêtes, p sommets et c composantes connexes, on définit le **nombre cyclomatique** $\nu(G)$ du graphe par : $\nu(G) = n - p + c$. Le nombre cyclomatique représente le nombre de cycles indépendants.

Nombre cyclomatique

Pour un graphe G ayant n arêtes, p sommets et c composantes connexes, on définit le **nombre cyclomatique** $v(G)$ du graphe par : $v(G) = n - p + c$. Le nombre cyclomatique représente le nombre de cycles indépendants.

- Un **arbre** est un graphe connexe de **nombre cyclomatique** nul.

Nombre cyclomatique

Pour un graphe G ayant n arêtes, p sommets et c composantes connexes, on définit le **nombre cyclomatique** $\nu(G)$ du graphe par : $\nu(G) = n - p + c$. Le nombre cyclomatique représente le nombre de cycles indépendants.

- Un **arbre** est un graphe connexe de **nombre cyclomatique** nul.
- Une **forêt** est graphe non connexe composé d'**arbres**.

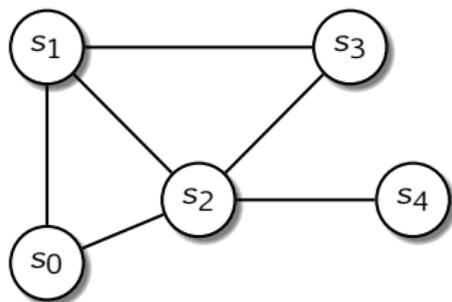
Sommaire

- 1 Vocabulaire et définitions
- 2 Représentations des graphes
 - Représentations graphiques
 - Représentations par adjacence
- 3 Implémentation des graphes

Représentations graphiques

Le plus simple pour représenter un graphe est de le dessiner sous forme de schéma.

EXEMPLE : $G(S, A)$, graphe non orienté, connexe, d'ordre 5 et de degré 4.



$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$A = \{\{s_0, s_1\}, \{s_0, s_2\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$$

$$d(s_2) = 4 \quad \text{et} \quad d(s_4) = 1$$

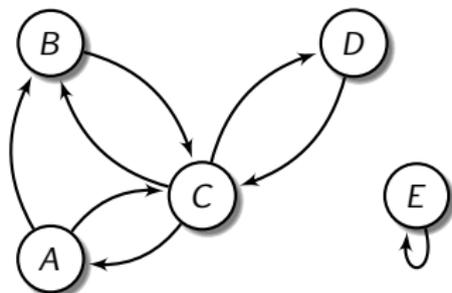
$$\nu(G) = 6 - 5 + 1 = 2$$

Les voisins du sommet s_2 sont s_0, s_1, s_3 et s_4 et l'unique voisin du sommet s_4 est s_2 .

EXEMPLE :

$G(S,A)$, graphe orienté non connexe, d'ordre 5 et de degré 6.

$$\nu(G) = 8 - 5 + 2 = 5$$



$$S = \{A, B, C, D, E\}$$

$$A = \{(A, B), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, D), (D, C), (E, E)\}$$

$$d_+(B) = 1 \quad ; \quad d_-(B) = 2 \quad \text{et} \quad d(B) = 3$$

(D, C, B) est une chaîne et (A, B, C, A) est une chaîne fermée.

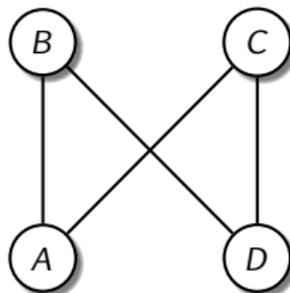
(B, A, C) n'est pas une chaîne (et pas non plus un chemin). (A, B, C, D) est une chaîne de longueur 3. A est à une distance de D de 2 (via la chaîne (A, C, D)).

Graphe planaire

$$G(\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, D\}, \{D, C\}, \{C, A\}\})$$

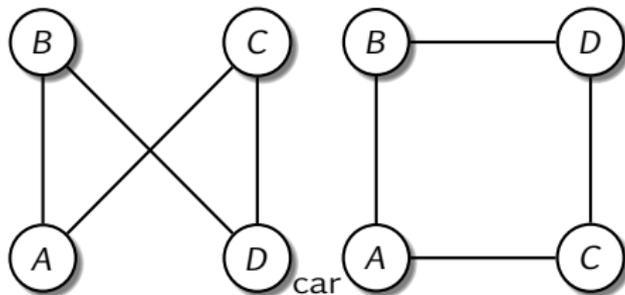
Graphe planaire

$G(\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, D\}, \{D, C\}, \{C, A\}\})$

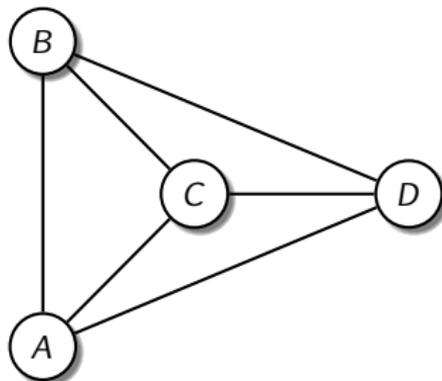


Graphe planaire

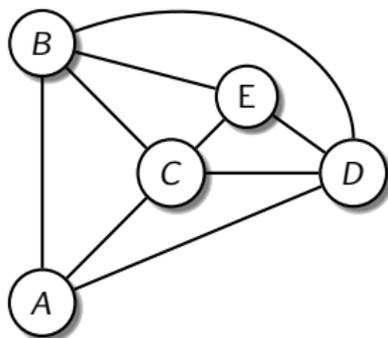
$G(\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, D\}, \{D, C\}, \{C, A\}\})$



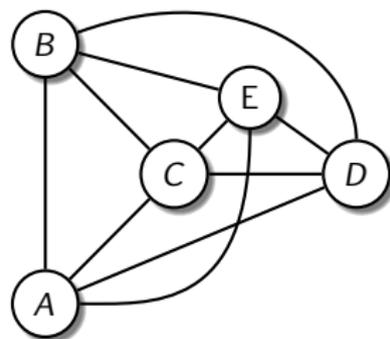
Graphe complet planaire



Graphe complet non planaire



Graphe complet non planaire



Représentations par adjacence

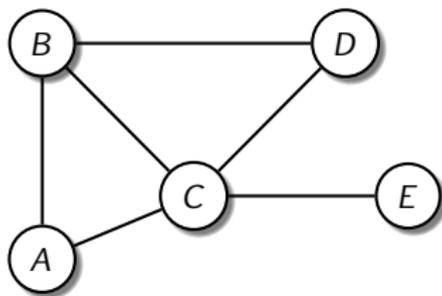
Une façon de représenter un graphe est de définir pour chaque nœud :

- soit l'ensemble de ses voisins,
- soit l'ensemble de ses successeurs,
- soit l'ensemble de ses prédécesseurs,
- soit l'ensemble des arêtes dont il est extrémité,
- soit l'ensemble des arcs incidents vers l'extérieur (sortant)
- soit l'ensemble des arcs incidents vers l'intérieur (entrant).

Listes d'adjacences

Donner pour chaque sommet la liste de ses voisins, c'est ce qu'on appelle donner les **listes d'adjacence**.

L'ordre d'écriture n'a pas d'importance et nous verrons par la suite l'intérêt des dictionnaires dans l'étude des graphes.



A : B, C
B : A, C, D
C : A, B, D, E
D : B, C
E : C

Dans le cas d'un graphe orienté, on peut donner, pour chaque nœud, la liste des successeurs.

Si le graphe est pondéré, on inscrit le poids à côté du sommet ou de l'arête.

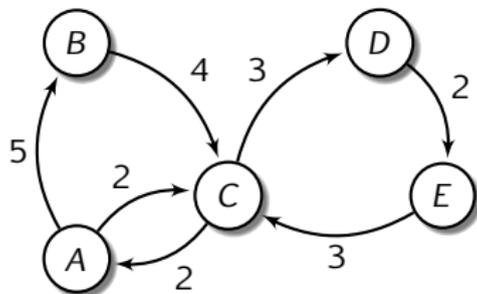
A : (B, 5), (C, 2)

B : (C, 4)

C : (A, 2), (D, 3)

D : (E, 2)

E : (C, 3)

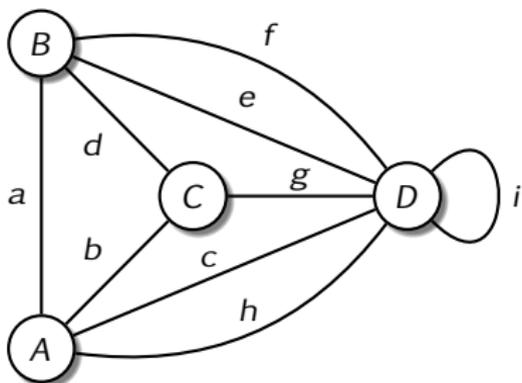


Représentation par tableaux et matrices

Pour un graphe $G(S, A)$, les liens entre les sommets s_i ou entre sommets s_i et arêtes a_k peuvent se traduire à l'aide de tableaux à deux entrées.

Tableau ou matrice d'incidence d'un graphe non-orienté

La **matrice d'incidence** \mathbb{M}_G de G est une matrice $p \times n$ où le coefficient \mathbb{M}_{Gik} représente le nombre d'incidences entre le sommet s_i et l'arête a_k .



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	1	1	1	0	0	0	0	1	0
B	1	0	0	1	1	1	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	1	0	0
D	0	0	1	0	1	1	1	1	2

$$\mathbb{M}_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tableau ou matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté non pondéré

Comme le nombre d'arêtes est souvent bien supérieur au nombre de sommets, on préfère utiliser un tableau ou **matrice d'adjacence** \mathbb{A}_G de G , matrice carrée $p \times p$ où le coefficient \mathbb{A}_{Gij} représente le nombre d'arêtes entre le sommet s_i et le sommet s_j . Le graphe étant non orienté, le tableau est symétrique.

EXEMPLE : en reprenant le graphe de la partie précédente.

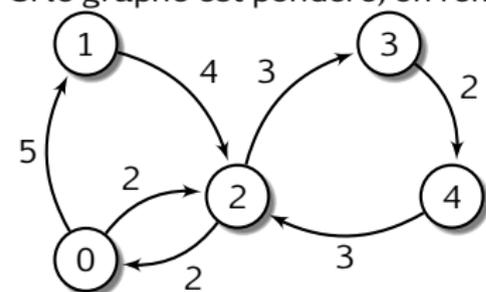
	A	B	C	D
A	0	1	1	2
B	1	0	1	2
C	1	1	0	1
D	2	2	1	2

$$\mathbb{A}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tableau ou matrice d'adjacence d'un graphe orienté et pondéré

Dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est pas forcément symétrique. On place sur le coefficient A_{Gij} un 1 (ou True) s'il existe un arc de s_i vers s_j et un 0 (ou False) sinon.

Si le graphe est pondéré, on remplace les 1 par le poids de l'arc.



↗	0	1	2	3	4
0	0	5	2	0	0
1	0	0	4	0	0
2	2	0	0	3	0
3	0	0	0	0	2
4	0	0	3	0	0

Sommaire

1 Vocabulaire et définitions

2 Représentations des graphes

3 Implémentation des graphes

- Implémentation à partir d'une matrice d'adjacence
- Implémentation à partir de listes d'adjacence
- Implémentation à partir de dictionnaires

Implémentation des graphes

D'un point de vue informatique, plusieurs structures permettent de représenter les graphes. Les objets **Python** `list`, `array` et `dict` sont particulièrement adaptés.

Implémentation à partir d'une matrice d'adjacence

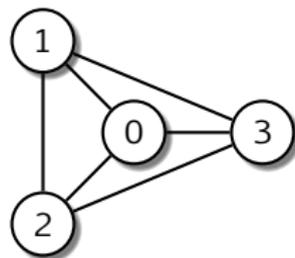
Si on pose $G = [[0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 0]]$ on perçoit que G est un graphe complet à 4 sommets.

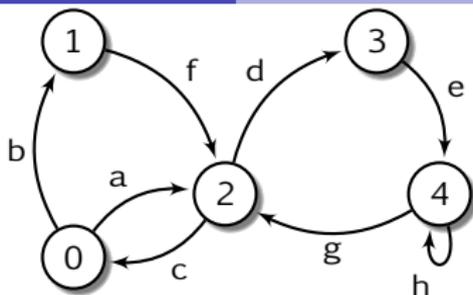
```
>>> T = np.array(G)
>>> T
array([[0, 1, 1, 1],
       [1, 0, 1, 1],
       [1, 1, 0, 1],
       [1, 1, 1, 0]])
```

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$G[i]$ donne la liste des relations entre le sommet i et les autres sommets.

Si $G[i][j] == 0$, il n'y a pas d'arête entre les sommets i et j .





```

>>> T
array([[ '0', 'b', 'a', '0', '0'],
       [ '0', '0', 'f', '0', '0'],
       [ 'c', '0', '0', 'd', '0'],
       [ '0', '0', '0', '0', 'e'],
       [ '0', '0', 'g', '0', 'h']], dtype='<U11')

```

L'élément $T[i, j]$ traduit la présence d'arc entre les sommets s_i et s_j en y référant son étiquette.

$T[i]$ donne la liste des arcs incidents vers l'extérieur du sommet s_i et $T[:, j]$ donne la listes des arcs incidents vers l'intérieur du sommet s_j .

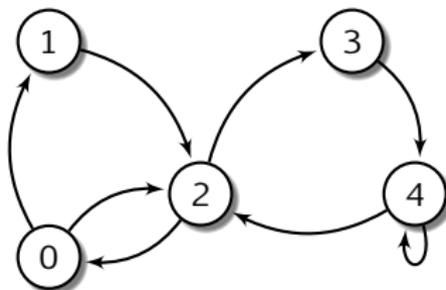
Implémentation à partir de listes d'adjacence

Dans la partie 1, l'utilisation de tableau oblige à stocker des 0 quand il n'existe pas d'arête entre deux sommets.

Avec une structure par liste d'adjacence, on ne stocke, pour chaque sommet, que ses voisins :

```
G = [[1, 2], [2], [3, 0], [4], [2, 4]]
```

Ainsi $G[i]$ donne la liste des voisins du sommet i .



Cependant, les sommets ne sont pas toujours des entiers. On peut alors représenter un graphe G par une liste de listes pour laquelle l'élément i est constitué du nom du sommet i et de la liste des voisins du sommet i :

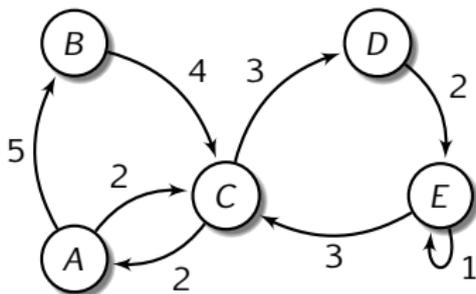
```
G = [[0, [1, 2]], [1, [2]], [2, [3, 0]], [3, [4]], [4, [2, 4]]]
```

Implémentation à partir de dictionnaires

Étant donné l'absence de relation d'ordre entre les nœuds et entre les voisins, l'utilisation de dictionnaires s'avère plus adaptée. Les clés du dictionnaires sont les noms des sommets et les valeurs des clés, la liste des voisins de la clé.

```
G = {0 : [1, 2], 1 : [2], 2 : [3, 0], 3 : [4], 4, : [2, 4]}
```

Dans le cas d'un graphe pondéré, il faut ajouter à chaque voisin le poids de l'arc qui y conduit. On se tourne alors vers un dictionnaire de ... dictionnaires !



```

G = {'A' : {'B' : 5, 'C' : 2}, 'B' : {'C' : 4}, 'C' : {'A' : 2, 'D' : 3},
      'D' : {'E' : 2}, 'E' : {'C' : 3, 'E' : 1}}
  
```