Programme de khôlles 3

Prévoir les réponses temporelles d'un système du premier ou du second ordre. Caractériser un système à partir de sa réponse temporelle.

1 Connaissances à avoir

- transformée de Laplace d'une dérivée
- transformée de Laplace d'une équation différentielle sous conditions d'Heaviside
- théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- théorème du retard
- théorème de l'amortissement
- Dirac : définition + transformée de Laplace
- réponse impulsionnelle
- fonction de Heaviside : définition + transformée de Laplace
- réponse indicielle
- rampe : définition + transformée de Laplace
- réponse en suivi (ou en poursuite)
- caractéristiques des systèmes de premier et de second ordre :
  - forme canonique d'un premier ordre $\left(\dfrac{K}{1+\tau.p}\right)$ et d'un second ordre $\left(\dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}\right)$
  - l'allure de la réponse indicielle de chacun de ces deux systèmes
  - l'influence sur la réponse indicielle des paramètres caractéristiques de la fonction de transfert (K, τ, ξ, ω_0)
- les valeurs remarquables du coefficients d'amortissement et leurs conséquences sur la réponse indicielle.

2 Savoir faire

- décomposer un signal temporel causal en fonctions causales
- décomposer en éléments simples une fonction rationnelle.
- déterminer l'expression temporelle à partir de la décomposition en éléments simples d'une grandeur dans donnée dans le domaine de Laplace
- appliquer les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale
- calculer les réponses temporelles des systèmes du premier et second ordre
- identifier à partir d'une courbe expérimentale (réponse indicielle) les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert (K, τ, ξ, ω_0)

3 Fiche synthèse

3.1 Formulaire

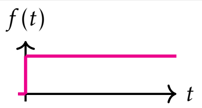
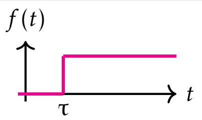
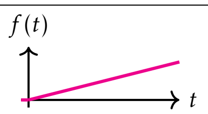
Dérivation $\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = p.\mathrm{F}(p) - f(0)}$ avec $f(0) = \lim\limits_{t \to 0} f(t)$	**Intégration** $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau).d\tau\right] = \dfrac{\mathrm{F}(p) - g(0)}{p}}$ où g est une primitive de f
Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} p.\mathrm{F}(p)}$ et $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p.\mathrm{F}(p)}$	**Retard** $\boxed{\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau.p}.\mathrm{F}(p)}$
Amortissement	$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathcal{L}\left[f(t).e^{-a.t}\right] = \mathrm{F}(p+a)}$

$$\mathrm{F}(p) = \frac{\mathrm{N}(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i)^{m_i}} = \mathrm{A}_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\mathrm{A}_{ij}}{(p-\alpha_i)^j}$$

Expression valable uniquement si le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur. S'il est strictement inférieur alors $\mathrm{A}_0 = 0$

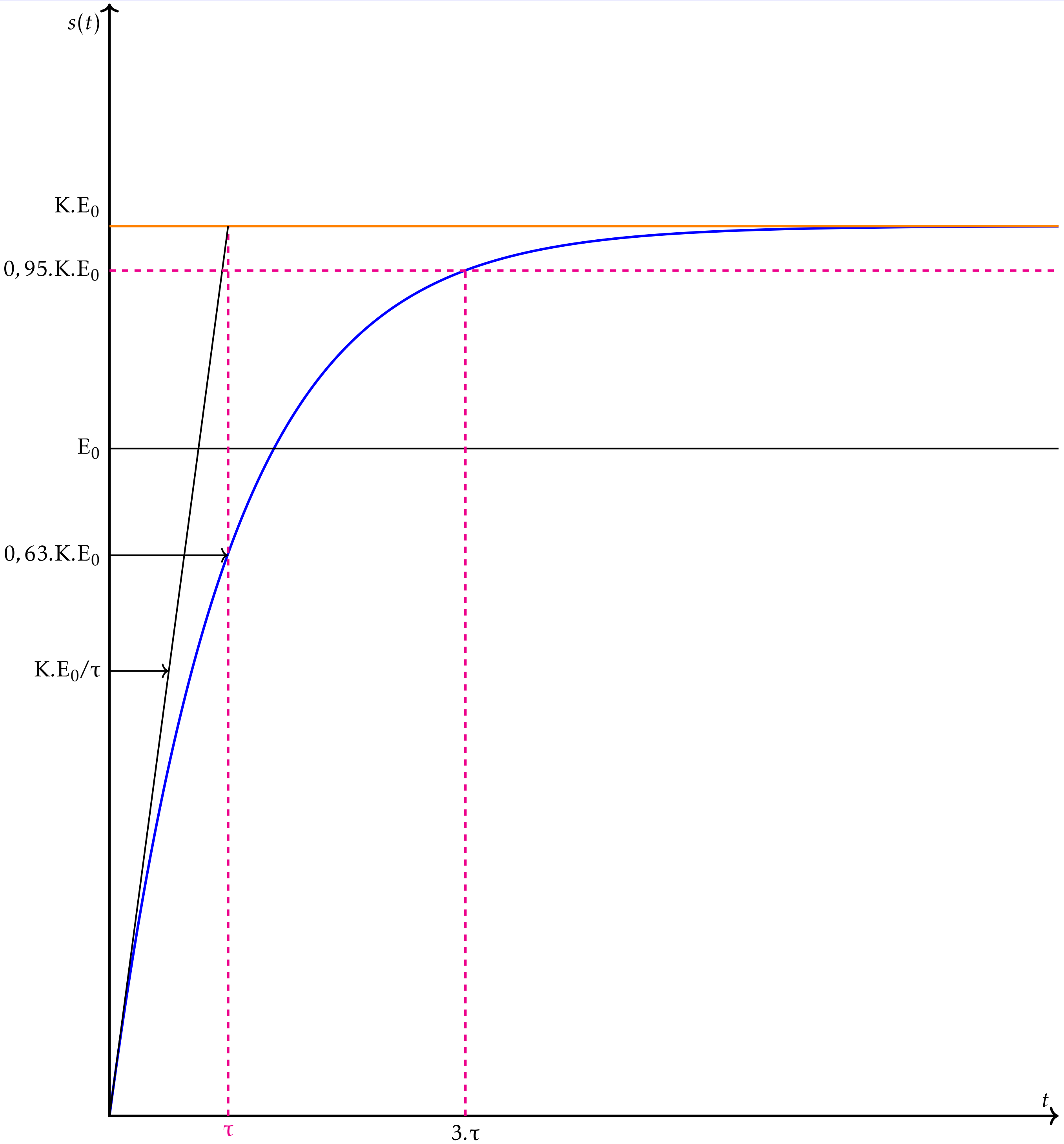
n : nb pôles différents
α_i : pôle
m_i : multiplicité du pôles i

3.2 Tableau des transformées de Laplace

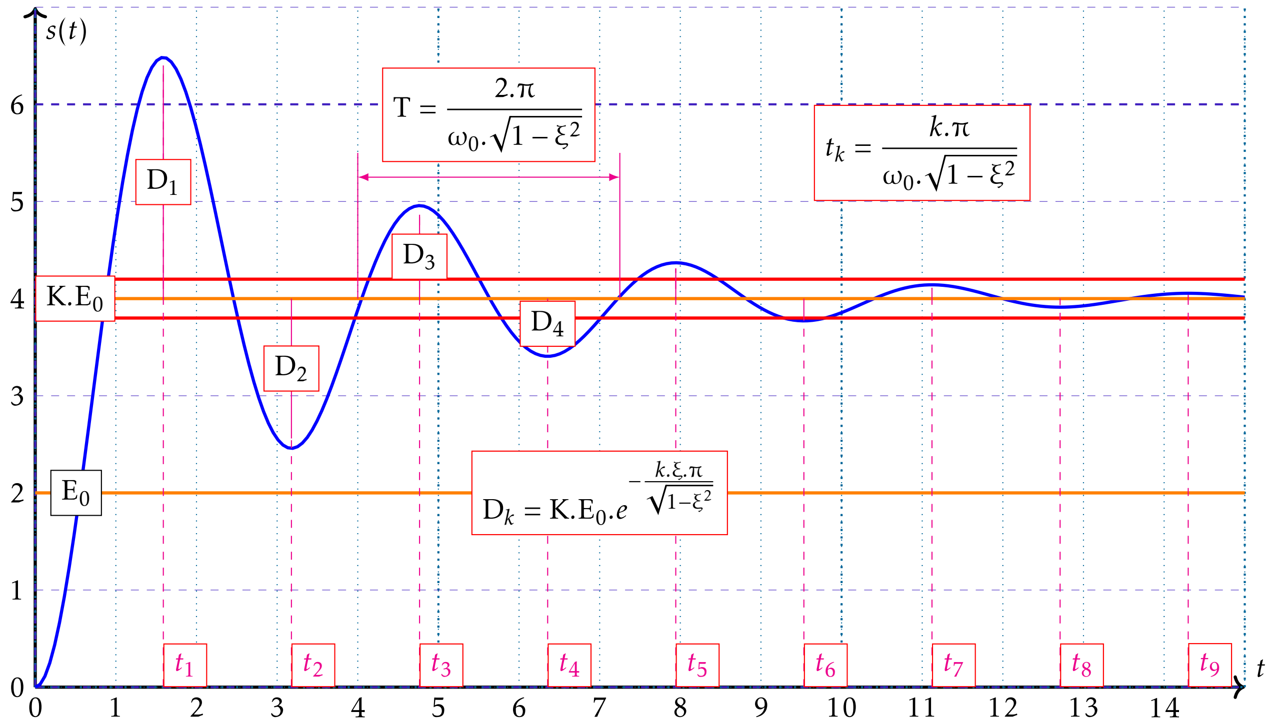
Nom	**Allure**	$f(t)$	$\mathrm{F}(p)$	Pôles de $\mathrm{F}(p)$
Dirac		$\delta(t)$	1	aucun
Échelon		$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$	0
Retard		$g(t-\tau)$	$e^{-\tau.p}.\mathrm{G}(p)$	0
Rampe		$t.u(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$	0 (d'ordre 2)
Générale, la plus importante		$t^n e^{-a.t}.u(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	-a (ordre $n+1$)

3.3 Réponses temporelles

3.3.1 Premier ordre



3.3.2 Second ordre $\xi < 1$



3.3.3 Second ordre $\xi > 1$ et $\tau_1 \ll \tau_2$