Programme de khôlles 7

Prévoir les performances des SLCI

1 Connaissances à avoir

- définir la stabilité
- définir des marges de gain et marges de phase
- énoncer le critère du revers sur les diagrammes de Nyquist et Black
- déterminer la classe d'une fonction de transfert

2 Savoir faire

- tracer les marges de phases et marges de gain sur un diagramme de Black et sur les diagrammes de Bode
- déterminer la stabilité d'un système à partir du critère de Routh
- déterminer la précision en poursuite en fonction de la nature de l'entrée et de la classe de la FTBO
- déterminer la précision en régulation

3 Rappel de cours

3.1 Critère algébrique de stabilité ou critère de Routh (Sur FTBF)

L'analyse des pôles de la fonction de transfert permet de conclure sur la stabilité du système. Le critère de Routh est une technique mathématique permettant de déterminer si un polynôme présente des racines à parties réelles positives.

Le critère de Routh se compose de 2 conditions :

- **Condition 1 :** une condition nécessaire pour qu'un système soit stable est que tous les coefficients de l'équation caractéristique (dénominateur de la FTBF) soient de même signe et qu'il y ait au plus un pôle nul.
- **Condition 2 :** Dans la mesure où la première condition est respectée, cette seconde condition nécessaire et suffisante porte sur les coefficients de la première colonne de la table suivante construite, à partir des coefficients de la FTBF :

  $$\mathrm{FTBF}(p) = \frac{\mathrm{K}}{p^{\alpha}}.\frac{1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n}{1 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m}$$

p^m	b_m	b_{m-2}	b_{m-4}	$\dots$
p^{m-1}	b_{m-1}	b_{m-3}	b_{m-5}	
p^{m-2}	c_1	c_2	c_3	
p^{m-3}	d_1	d_2		
$\dots$				
p^0				

avec :

$$c_1 = -\frac{1}{b_{m-1}}.\begin{vmatrix} b_m & b_{m-2} \\ b_{m-1} & b_{m-3} \end{vmatrix} \qquad c_2 = -\frac{1}{b_{m-1}}.\begin{vmatrix} b_m & b_{m-4} \\ b_{m-1} & b_{m-5} \end{vmatrix}$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}.\begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad d_2 = -\frac{1}{c_1}.\begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

On construit la table horizontalement et verticalement jusqu'à obtenir des zéros.

Remarques :

- Le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à parties réelles positives.
- Un zéro dans la première colonne sera généralement considéré comme un changement de signes sauf si toutes la ligne est nulle (cas très particuliers laissés de côté).

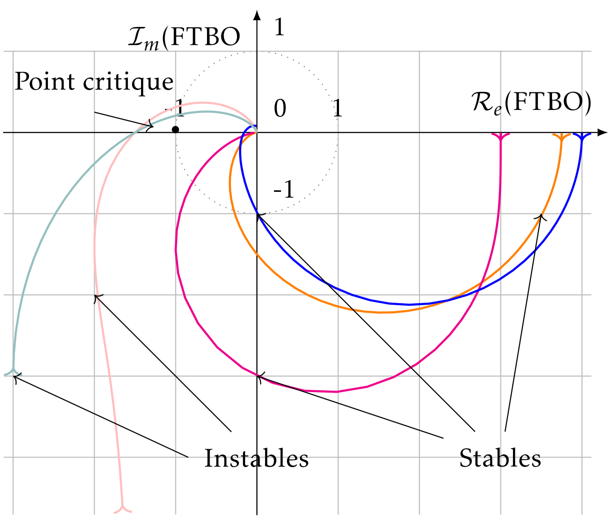
3.2 Critère du Revers

Le critère du Revers est obtenu à partir des théorèmes de Cauchy (qui ne sont pas à votre programme, mais dont les propriétés sont à connaître).

3.2.1 Énonce dans le diagramme de Nyquist

Enoncé: Critère du Revers dans le diagramme de Nyquist

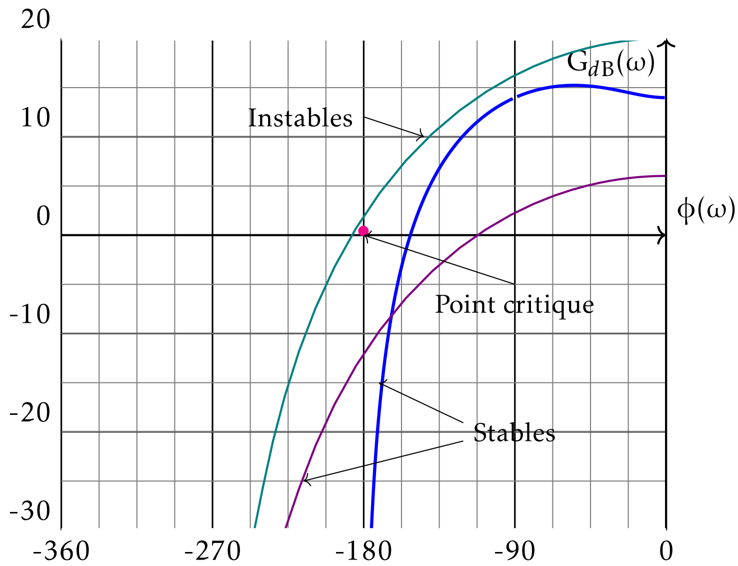
> *Un système asservi est stable en BF si en décrivant, dans le diagramme de Nyquist, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique à gauche de la courbe.*



3.2.2 Énoncé dans le diagramme de Black

Enoncé: Critère du Revers dans le diagramme de Black

> *Un système asservi est stable en BF si en décrivant, dans le diagramme de Black, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) dans le sens des pulsations croissantes on laisse le point critique à droite de la courbe.*



3.3 Marges

3.3.1 Marges de gain et de phase

DÉFINITION: Marge de gain

> *La marge de gain, exprimée en dB, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain (dB).*

$$\text{Marge de gain} = M_G = 0_{dB} - \text{Gain}(\text{FTBO}(\omega_{\phi=-180^\circ}))$$

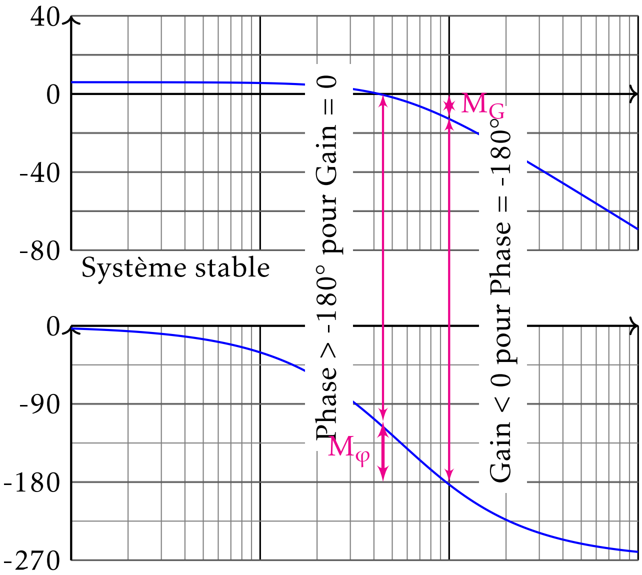
DÉFINITION: Marge de phase

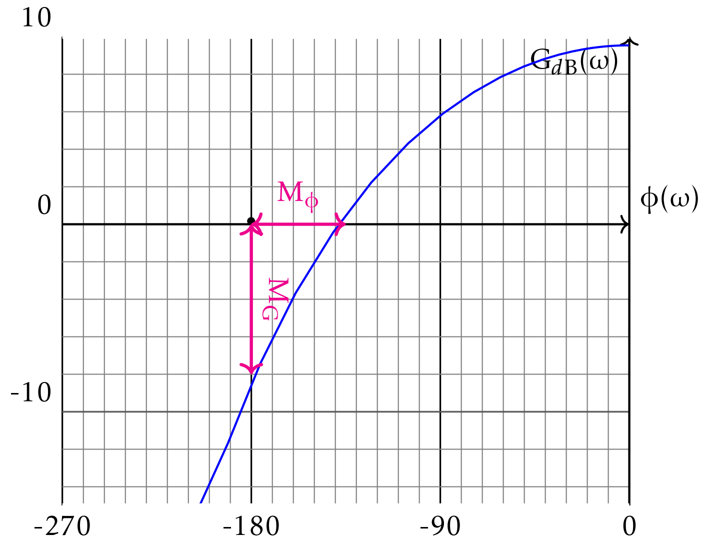
> *La marge de phase, exprimée en degré, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase (en degré).*

$$\text{Marge de phase} = M_\phi = 180^\circ + \text{Phase}(\text{FTBO}(\omega_{G=0_{dB}}))$$

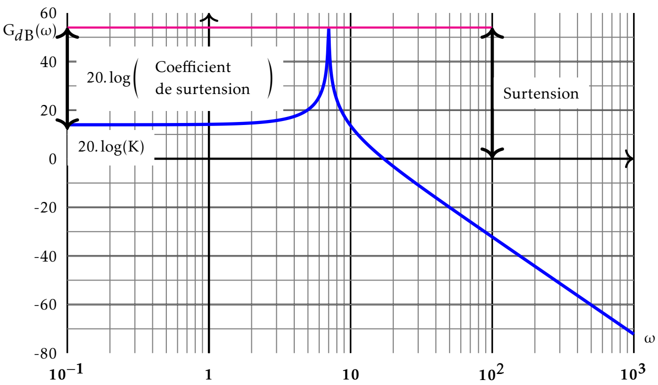
Valeurs courantes : fixé par le concepteur. Ces valeurs sont des coefficients de sécurité vis-à-vis de la stabilité.

3.3.2 Représentation des marges sur les diagrammes





3.3.3 Surtension et le coefficient de surtension



Pour les systèmes du second ordre

$$\text{FTBF}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

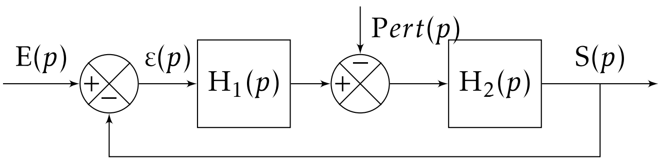
Surtention	coefficient de surtention
$20.\log\left(\frac{K}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}\right)$	$\frac{1}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}$

3.4 Précision

3.4.1 En poursuite

Erreur	Erreur de position	Erreur de Traînage	Erreur d'Accélération
Classe ⋱ Entrée	Échelon : $E(p)=\frac{1}{p}$	Rampe : $E(p)=\frac{1}{p^2}$	Parabole : $E(p)=\frac{1}{p^3}$
Classe 0 ($\alpha=0$)	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Classe 1 ($\alpha=1$)	0	$\frac{1}{K}$	∞
Classe 2 ($\alpha=2$)	0	0	$\frac{1}{K}$
Classe α	$\lim_{p\to 0}\left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha+K}\right)$	$\lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha+K}\right)$	$\lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha+K}\right)$

3.4.2 En régulation



$$S(p) = \frac{H_1(p).H_2(p)}{1+H_1(p).H_2(p)}.E(p) - \frac{H_2(p)}{1+H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)$$

$$E_r(p) = \underbrace{E(p).\left(\frac{1}{1+H_1(p).H_2(p)}\right)}_{\text{Erreur en poursuite}} + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1+H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

Remarques :

- $\alpha_1 > r-1$, alors l'erreur statique est nulle (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est supérieur ou égal à la classe de la perturbation). On parle alors de réjection de la perturbation.
- $\alpha_1 = r-1$, alors l'erreur statique est non nulle mais finie : $\frac{A}{K_1}$. La réjection de la perturbation est incomplète.
- $\alpha_1 < r-1$, alors l'erreur statique est infinie.

L'ajout d'intégrateurs en amont de la perturbation permet d'en éliminer les effets (nombre d'intégrateurs compatible avec la nature de la perturbation)

3.5 Bandes passantes