

Td CI-3-3 : PRÉVOIR ET VÉRIFIER LES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES.

1 Torseurs

Soit E un espace vectoriel, muni d'un repère $\mathcal{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On donne :

- deux points A et B définis par leurs coordonnées respectives $(0, 0, 3)$ et $(6, 0, 0)$.
- un torseur \mathcal{F} défini par ses éléments de réduction en A :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\} \quad \text{avec } \vec{R} = \vec{y} \text{ et } \vec{M}(A) = 3.\vec{y} + 3.\vec{z}$$

Q - 1 : Définir les éléments de réduction de \mathcal{F} en O et en B .

Q - 2 : Calculer et comparer $\vec{R}.\vec{M}(O)$, $\vec{R}.\vec{M}(A)$ et $\vec{R}.\vec{M}(B)$.

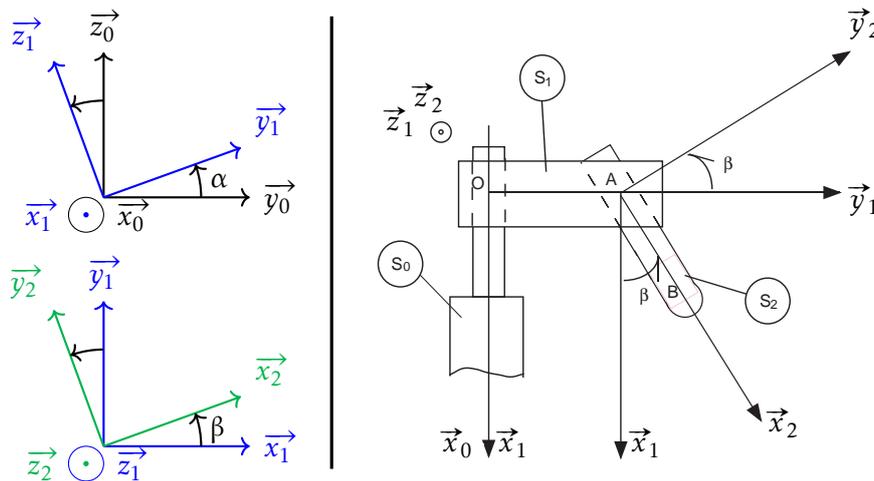
Q - 3 : Déterminer l'axe central de \mathcal{F} . Préciser son intersection avec le plan (O, \vec{x}, \vec{z}) .

Q - 4 : Représenter le repère en perspective cavalière et tracer les éléments de réduction de \mathcal{F} en A , ainsi que l'axe central. Préciser les propriétés de l'axe central d'un torseur.

2 Chaînes ouvertes

2.1 Centrifugeuse de laboratoire de Chimie

On considère une centrifugeuse composée d'un bâti (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) qui peut contenir deux liquides de masses volumiques différentes.



Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_0) (fixe). Les solide (S_1) admet une rotation par rapport au solide (S_0) d'axe (O, \vec{x}) . $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1) . Posons $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\alpha = \omega.t$ et ω étant une constante positive exprimée en radians par seconde. On pose $\vec{OA} = a.\vec{y}_1$.

Le solide (S_2) admet une rotation par rapport à (S_1) d'axe (A, \vec{z}_1) telle que $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ soit lié à (S_2). On pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, β étant une fonction du temps inconnue. Soit B le centre d'inertie de (S_2) tel que $\overrightarrow{AB} = b \cdot \vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètre).

Le solide (S_2) admet une rotation par rapport à (S_1) d'axe (A, \vec{z}_1) telle que $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ soit lié à (S_2). On pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, β étant une fonction du temps inconnue. Soit B le centre d'inertie de (S_2) tel que $\overrightarrow{AB} = b \cdot \vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètre).

Q - 1 : Déterminer les vecteurs taux de rotation $\vec{\Omega}_{(1/0)}$ du solide (S_1) par rapport au solide (S_0), $\vec{\Omega}_{(2/1)}$ de S_2/S_1 et $\vec{\Omega}_{(2/0)}$ de S_2/S_0 .

Q - 2 : Donner la vitesse en O du solide S_1 par rapport au solide S_0 .

Q - 3 : Déterminer $\vec{V}_{(A,1/0)}$, la vitesse en A du solide S_1 par rapport au solide S_0 .

Q - 4 : Donner $\vec{V}_{(A,2/1)}$, la vitesse en A du solide S_2 par rapport au solide S_1 . En déduire $\vec{V}_{(A,S_2/S_0)}$.

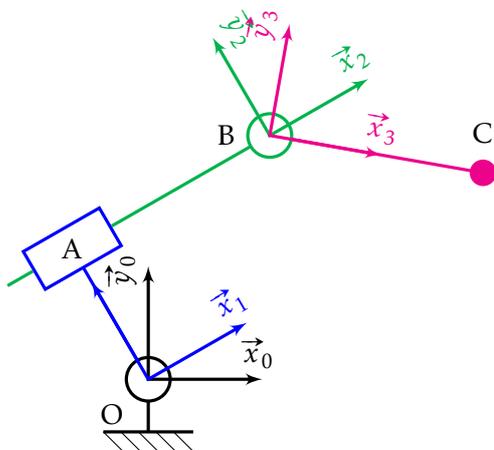
Q - 5 : Déterminer $\vec{V}_{(B,2/1)}$, la vitesse en B du solide S_2 par rapport au solide S_1 .

Q - 6 : Déterminer $\vec{V}_{(B,1/0)}$, la vitesse en B du solide S_1 par rapport au solide S_0 .

Q - 7 : En déduire $\vec{V}_{(B,2/0)}$, la vitesse en B du solide S_2 par rapport au solide S_0 .

Q - 8 : Déterminer finalement $\vec{A}_{(B,2/0)}$, le vecteur accélération du point B du solide S_2 par rapport à S_0 .

2.2 Bras télescopique



- Soit $\mathcal{R}(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_0) (fixe).
- Le solide (S_1) admet une rotation par rapport au solide (S_0) d'axe (O, \vec{z}_0). $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1).
- Le solide (S_2) est en translation par rapport au solide (S_1) de direction (\vec{x}_1). $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \cdot \vec{x}_1$. $\mathcal{R}_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Le solide (S_3) admet une rotation par rapport au solide (S_2) d'axe (B, \vec{z}_0). $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère lié à (S_3).

Posons $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\beta(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$.
 $\overrightarrow{OA} = L \cdot \vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BC} = R \cdot \vec{x}_3$.

2.3 Manège de l'extrême !

Le bras principal 1, associé au repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ supporte l'ensemble du manège. Il est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le sol 0. Sa rotation est paramétrée par l'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. Un vérin de corps 5 et de tige 6 commande la rotation du bras 1. L'angle α varie entre $\pi/4$ et $\pi/2$.

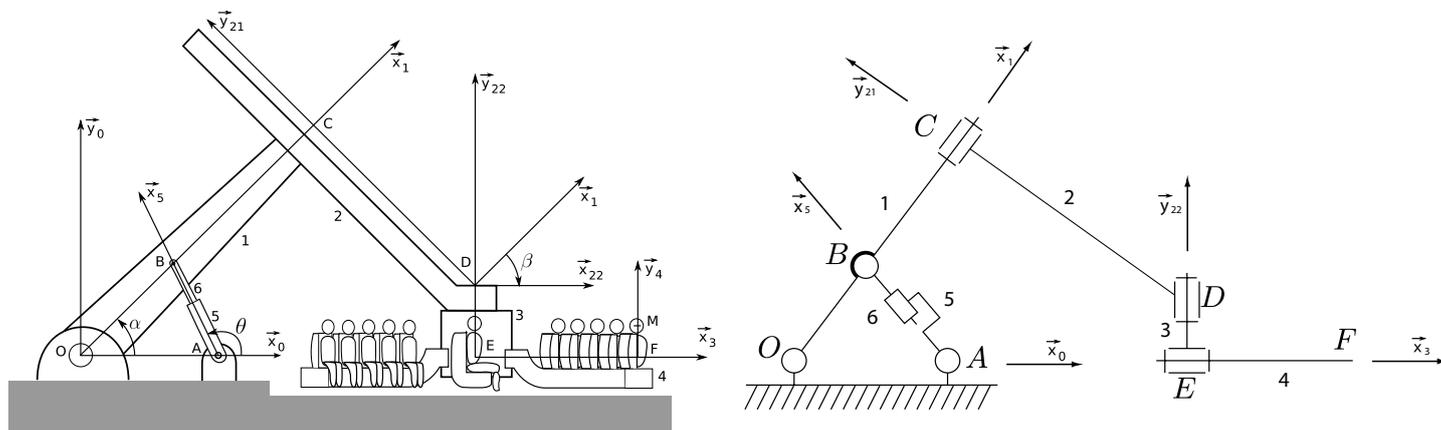
La rotation du vérin est paramétrée par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5)$ et sa longueur est paramétrée par λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{x}_5$.

Le bras secondaire 2, associé au repère $\mathcal{R}_{21}(C, \vec{x}_1, \vec{y}_{21}, \vec{z}_{21})$ est en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_1). La rotation est paramétrée par l'angle $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_{21})$. Un second repère $\mathcal{R}_{22}(D, \vec{x}_{22}, \vec{y}_{22}, \vec{z}_{21})$ est associé au solide 2, tourné d'un angle

$\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{22}) = -45^\circ$ constant, autour de l'axe \vec{z}_{21} (attention cet angle est négatif). Ce repère permet de définir la rotation de la tourelle 3.

La tourelle 3, associé au repère $R_3(E, \vec{x}_3, \vec{y}_{22}, \vec{z}_3)$ est en liaison pivot d'axe (D, \vec{y}_{22}) . La rotation est paramétrée par l'angle $\delta = (\vec{x}_{22}, \vec{x}_3)$.

Le banc 4, associé au repère $R_4(E, \vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est en liaison pivot d'axe (E, \vec{x}_3) . La rotation est paramétrée par l'angle $\phi = (\vec{y}_{22}, \vec{y}_4)$.



Sol 0 associé au repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Bras principal 1 associé au repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Bras secondaire 2 associé au repère $\mathcal{R}_{21}(C, \vec{x}_{21}, \vec{y}_{21}, \vec{z}_{21})$

- associé au repère $\mathcal{R}_{22}(D, \vec{x}_{22}, \vec{y}_{22}, \vec{z}_{22})$

Tourelle 3 associé au repère $\mathcal{R}_3(E, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Banc 4 associé au repère $\mathcal{R}_4(E, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_0 \text{ avec } a = 1.5 \text{ m.}$$

$$\vec{OB} = b \cdot \vec{x}_1 \text{ avec } b = 1.5 \text{ m.}$$

$$\vec{OC} = c \cdot \vec{x}_1 \text{ avec } c = 4 \text{ m.}$$

$$\vec{CD} = -d \cdot \vec{y}_{21} \text{ avec } d = 4 \text{ m.}$$

$$\vec{DE} = -e \cdot \vec{y}_{22} \text{ avec } e = 1 \text{ m.}$$

$$\vec{EF} = f \cdot \vec{x}_3 \text{ avec } f = 3 \text{ m.}$$

$$\vec{FM} = h \cdot \vec{y}_4 \text{ avec } h = 0.5 \text{ m.}$$

$$\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{x}_5.$$

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

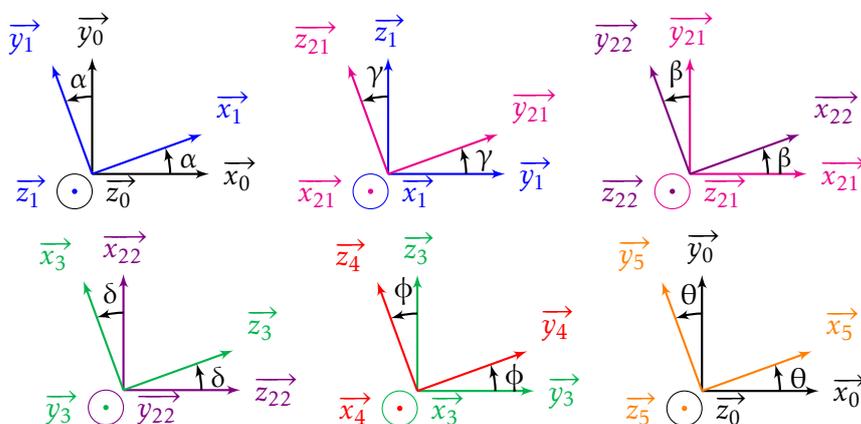
$$\beta = (\vec{x}_{21}, \vec{x}_{22}) = (\vec{y}_{21}, \vec{y}_{22})$$

$$\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_{21}) = (\vec{z}_1, \vec{z}_{21})$$

$$\delta = (\vec{x}_{22}, \vec{x}_3) = (\vec{z}_{22}, \vec{z}_3)$$

$$\phi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$$

$$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5)$$



3 Chaines fermées

3.1 Mécanisme à mouvement alternatif

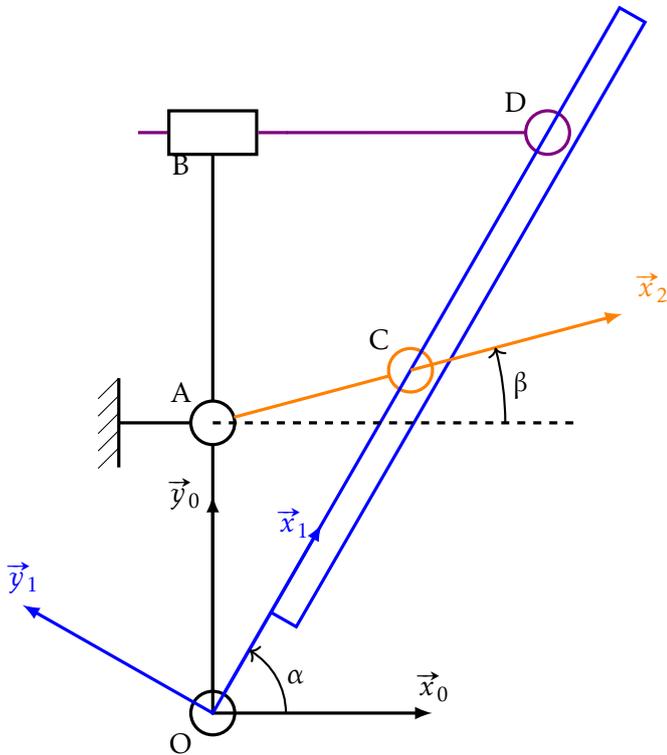
Le problème est supposé plan. L'objectif est de déterminer les relations entre les différents paramètres cinématiques dans un système en chaîne fermée. Le système considéré est un mécanisme à mouvement alternatif.

Q - 1 : Tracer le graphe de structure (ou graphe des liaisons);

Q - 2 : Caractériser les torseurs cinématiques associés à chaque liaison.

Q - 3 : Déterminer la relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\alpha}$. en fonction de la géométrie et des différents angles.

Q - 4 : Déterminer la relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$ en fonction de la géométrie et des différents angles.



Au bâti **0** est associé le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. on pose:

$$\vec{OA} = a. \vec{y}_0 \quad \vec{OB} = b. \vec{y}_0$$

La pièce **1** est liée au bâti **0** par une liaison pivot d'axe O, \vec{z}_0 . On lui attache le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et on pose:

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

La bielle **2** est liée au bâti **0** par une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) . On lui attache le repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et on pose:

$$\vec{AC} = c. \vec{x}_2 \quad \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$$

Elle est également liée à la pièce **1** en C, par une liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x}_1) .

Le coulisseau **3** est lié au bâti par une liaison glissière d'axe (B, \vec{x}_0) .

Il est également lié à la pièce **1** en D par une liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x}_1) .

3.2 Malaxeur

La figure représente de façon schématique un malaxeur.

Un moteur électrique entraîne la vis sans fin (S_1) qui engrène avec la roue (S_2). Cette roue est en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_0) avec le bâti (S_0). La rotation de cette roue (S_2) va provoquer le mouvement du bras mélangeur (S_4) par l'intermédiaire des pièces (S_3) et (S_5).

(S_3) est en contact avec (S_2) sur une surface sphérique de centre C et avec (S_4) sur une surface cylindrique de révolution d'axe (C, \vec{z}_4) . (S_5) est liée au bras (S_4) par une liaison pivot d'axe (D, \vec{x}_5) et au bâti (S_0) par une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) .

REMARQUE : On ne tient pas compte dans l'exercice de la vis sans fin (S_1).

Le repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à (S_0), le repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à (S_2), le repère $\mathcal{R}(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à (S_4), et le repère $\mathcal{R}(D, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ à (S_5). On note $\vec{OC} = r. \vec{z}_2$, $\vec{CD} = -\lambda. \vec{z}_4$ (λ variable), $\vec{OD} = L. \vec{y}_0$, $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$, $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5)$ et $\gamma = (\vec{y}_5, \vec{y}_4) = (\vec{z}_5, \vec{z}_4)$.

Q - 1 : Préciser les liaisons (nom, caractéristiques et torseur cinématique) entre les pièces (S_2)/(S_3) et (S_3)/(S_4). Déterminer la liaison cinématique $\mathcal{L}_{2/4}$ équivalente aux liaisons $\mathcal{L}_{2/3}$ et $\mathcal{L}_{3/4}$.

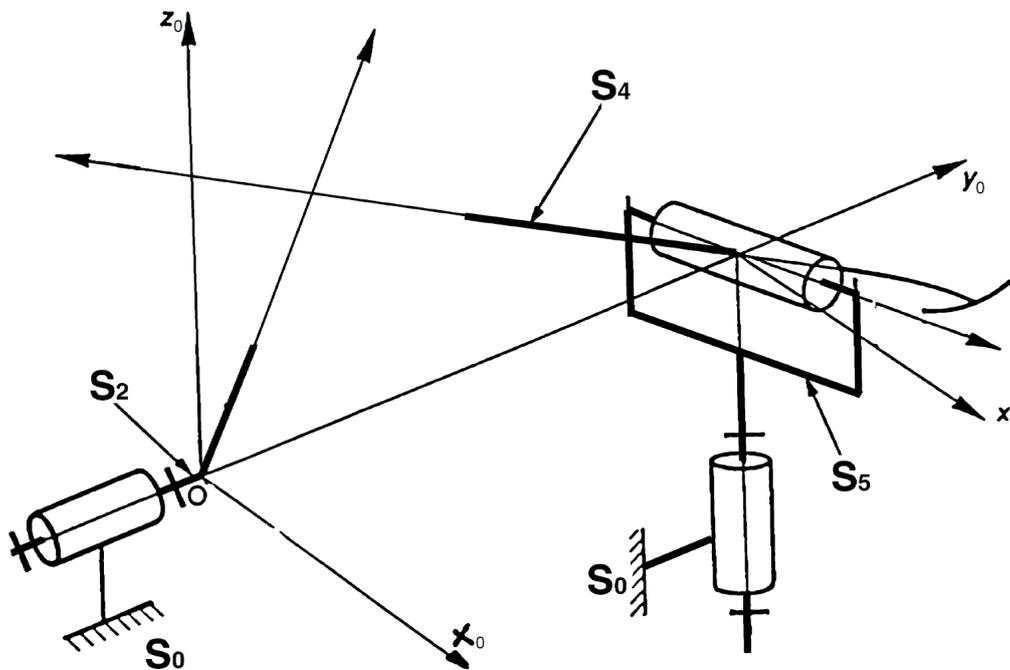
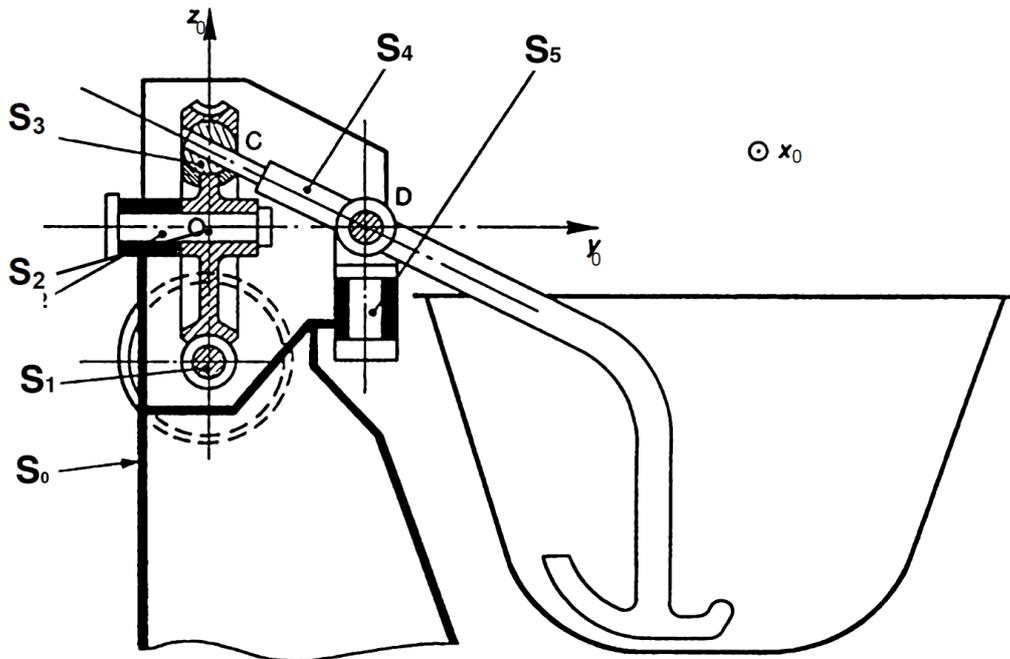
On considère pour la suite de l'exercice la liaison équivalente $\mathcal{L}_{2/4}$.

Q - 2 : Compléter le schéma cinématique minimal en perspective du mécanisme, et indiquer sur ce schéma les points C, D, les angles α , β et les vecteurs \vec{z}_2 et \vec{x}_5 .

Q - 3 : Donner les torseurs cinématiques des liaisons (S_5/S_4) , (S_4/S_2) , (S_2/S_0) , et (S_5/S_0) .

Q - 4 : Montrer que λ est constant.

Q - 5 : Par une projection judicieuse de la fermeture cinématique du système, trouver la relation entrée (angle α) sortie (angle β) du mécanisme.



3.3 Toit escamotable de 206 CC

3.3.1 Présentation

En 2001, Peugeot commercialise une version coupé-cabriolet d'un de ses modèles FIG ?? . Grâce à son toit rigide escamotable à commande électrohydraulique, la 206 CC permet d'apprécier le confort d'un coupé tant au point de vue acoustique que de l'étanchéité tout en offrant la possibilité de se découvrir rapidement en cabriolet. Ce système permet d'offrir, de plus, une lunette arrière chauffante en verre.

Le mécanisme de toit escamotable met en jeu cinq éléments : les vitres, le pavillon, la lunette arrière, le coffre et une tablette. Le cycle d'ouverture du toit est piloté par le calculateur FIG 2 :

- A : les vitres de porte et de custode descendent en position basse,
- B : la malle se déverrouille et s'ouvre,
- C : le toit se soulève et vient se replier dans le coffre,
- D : la tablette sort et la malle se ferme et se verrouille.



FIGURE 1 – Photographie du toit escamotable

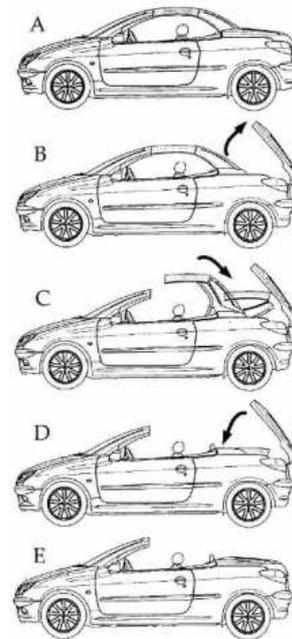


FIGURE 2 – Cycle d'ouverture du toit

Les vitres ne remontent pas mais leur commande est de nouveau possible. Le mouvement du toit escamotable est imposé par un mécanisme articulé FIG 3, actionné par deux vérins hydrauliques. La partie inférieure du mécanisme est fixée au châssis du véhicule et la partie supérieure porte le pavillon.

3.3.2 Analyse du mouvement

Q - 6 : A compléter sur la FIG 4. A partir de l'étude de la nature des mouvements des pièces (10) et (20), dessinez la position de la pièce (30) en traçant le segment (EF) dans les positions intermédiaires du mécanisme repérées (1) et (2) sur le document.

Q - 7 : Précisez alors la nature du mouvement entre la pièce (30) et l'ensemble S.

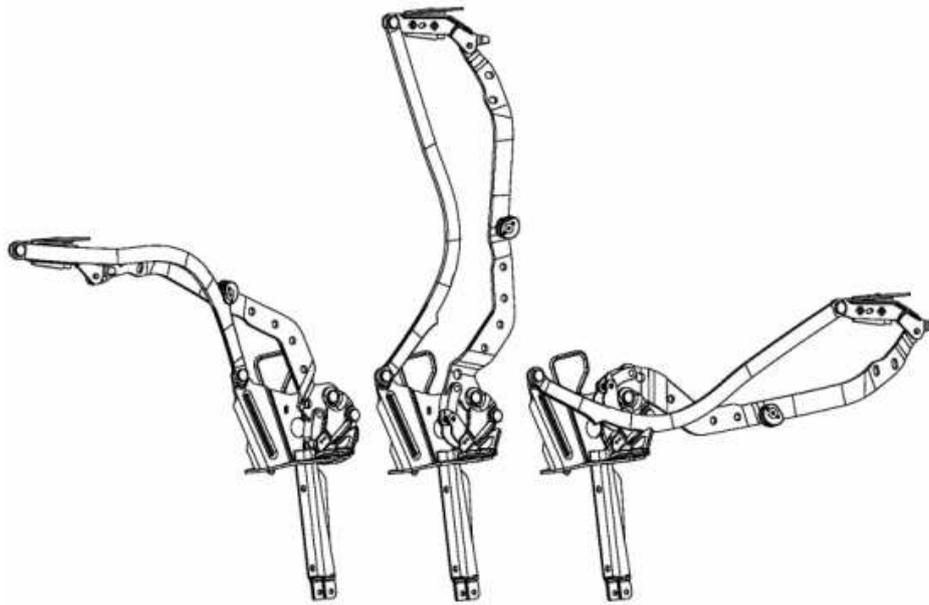


FIGURE 3 – Mécanisme du toit escamotable dans trois position(fermée, intermédiaire et ouverte

3.3.3 Détermination de la vitesse de sortie du vérin

On cherche ici à déterminer la valeur de la vitesse de sortie de la tige du vérin, par une étude graphique sur la FIG 5. Les deux configurations extrêmes du mécanisme, la position " coupé " et la position " cabriolet " sont données sur la FIG 5. Le point (A) passe de la position (A) (" coupé ") à la position (AF) (" cabriolet ").

Q - 8 : Déterminez alors la course du vérin (la course est la distance dont s'est déplacée la tige du vérin).

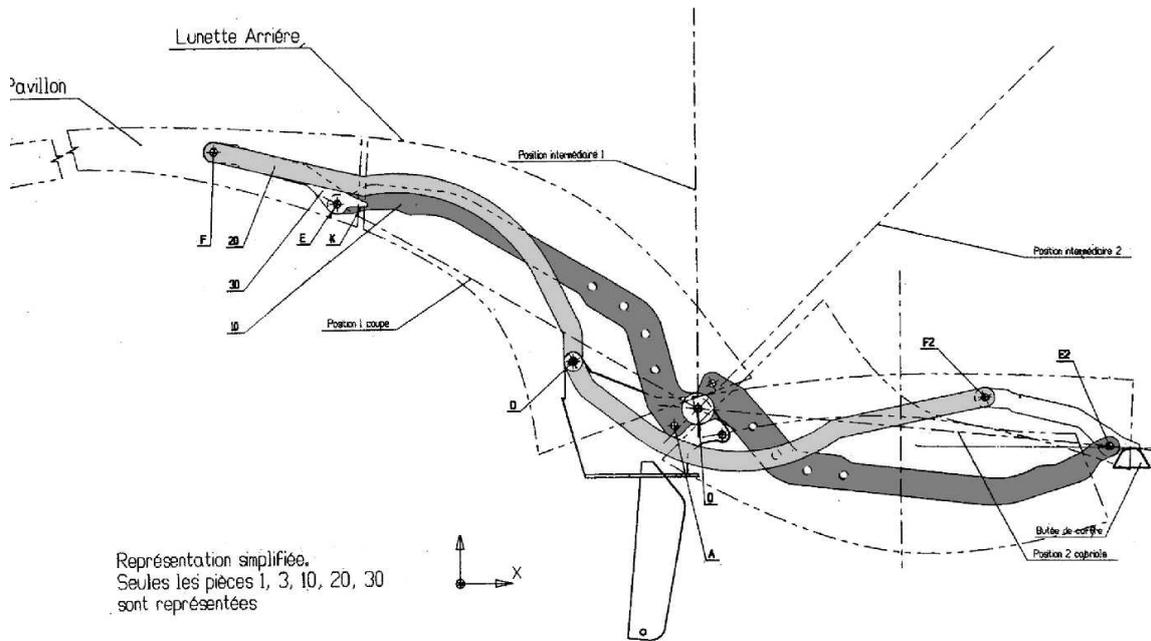
Q - 9 : Sachant que les vérins se déplacent à vitesse constante, la durée de la phase d'ouverture est de 10 secondes et que le diamètre du vérin vaut 20 mm, calculez le débit que doit fournir la pompe pour alimenter les deux vérins (coté droit et coté gauche du toit).

3.3.4 Détermination de la vitesse d'accostage en K

Les premières constructions se feront sur la FIG 6, échelle : $10\text{mm/s} \Leftrightarrow 30\text{ mm}$ sur le graphique. Les constructions suivantes se feront sur la FIG 7, échelle : $10\text{mm/s} \Leftrightarrow 5\text{ mm}$ sur le graphique.

Q - 10 : En justifiant votre démarche, déterminer à partir de la vitesse de sortie du vérin la vitesse d'impact : $\vec{V}_{(K,10/S)}$.

Q - 11 : Déterminez enfin $\vec{V}_{(G,30/S)}$.



Document réponse DR1

FIGURE 4 -

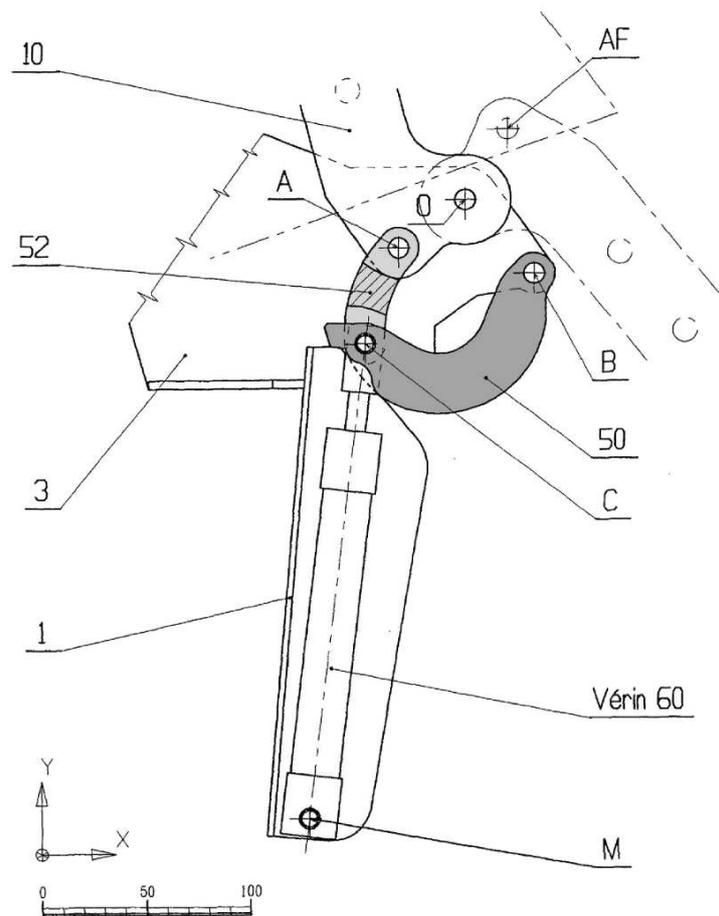


FIGURE 5 -

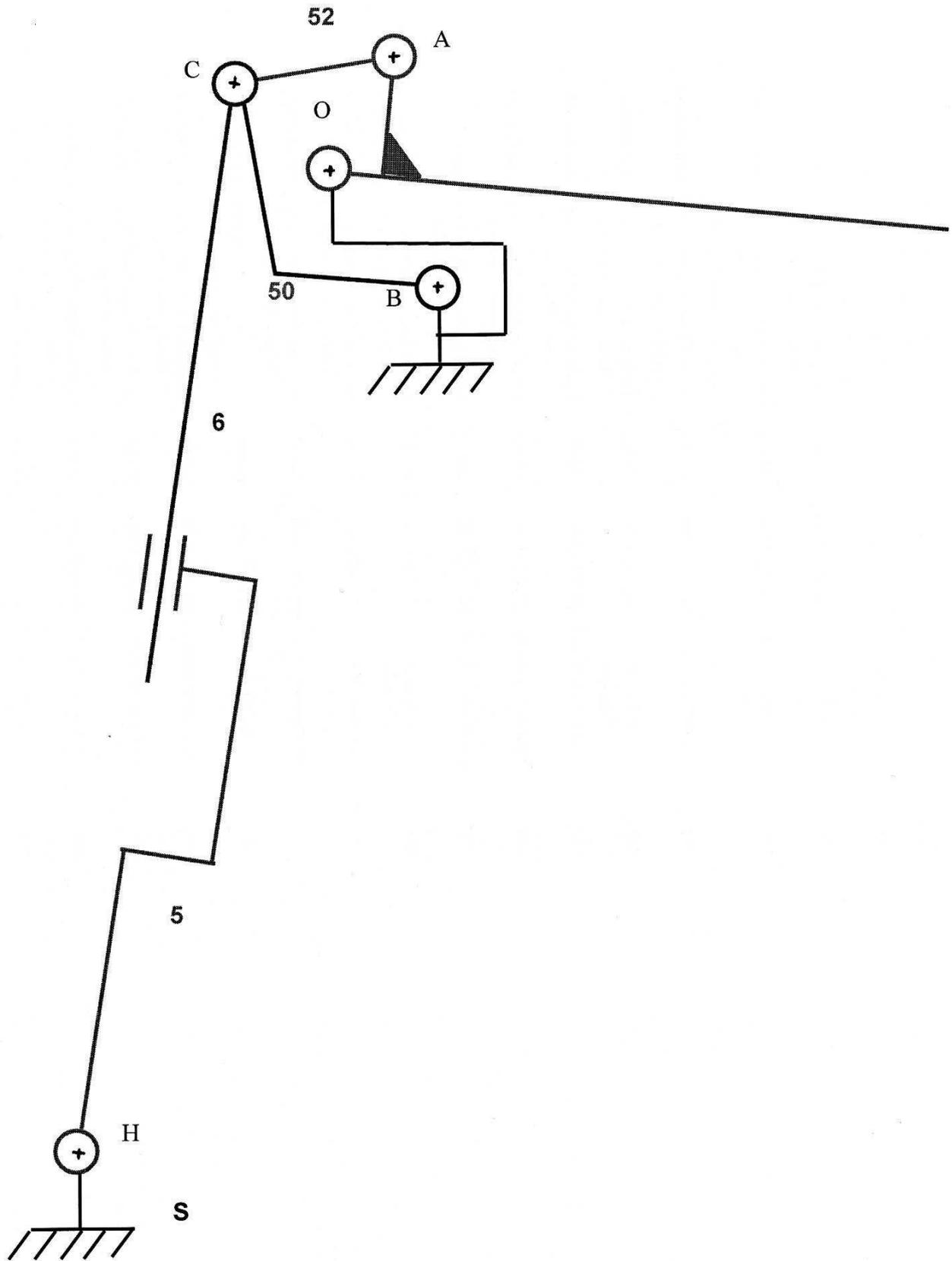


FIGURE 6 –

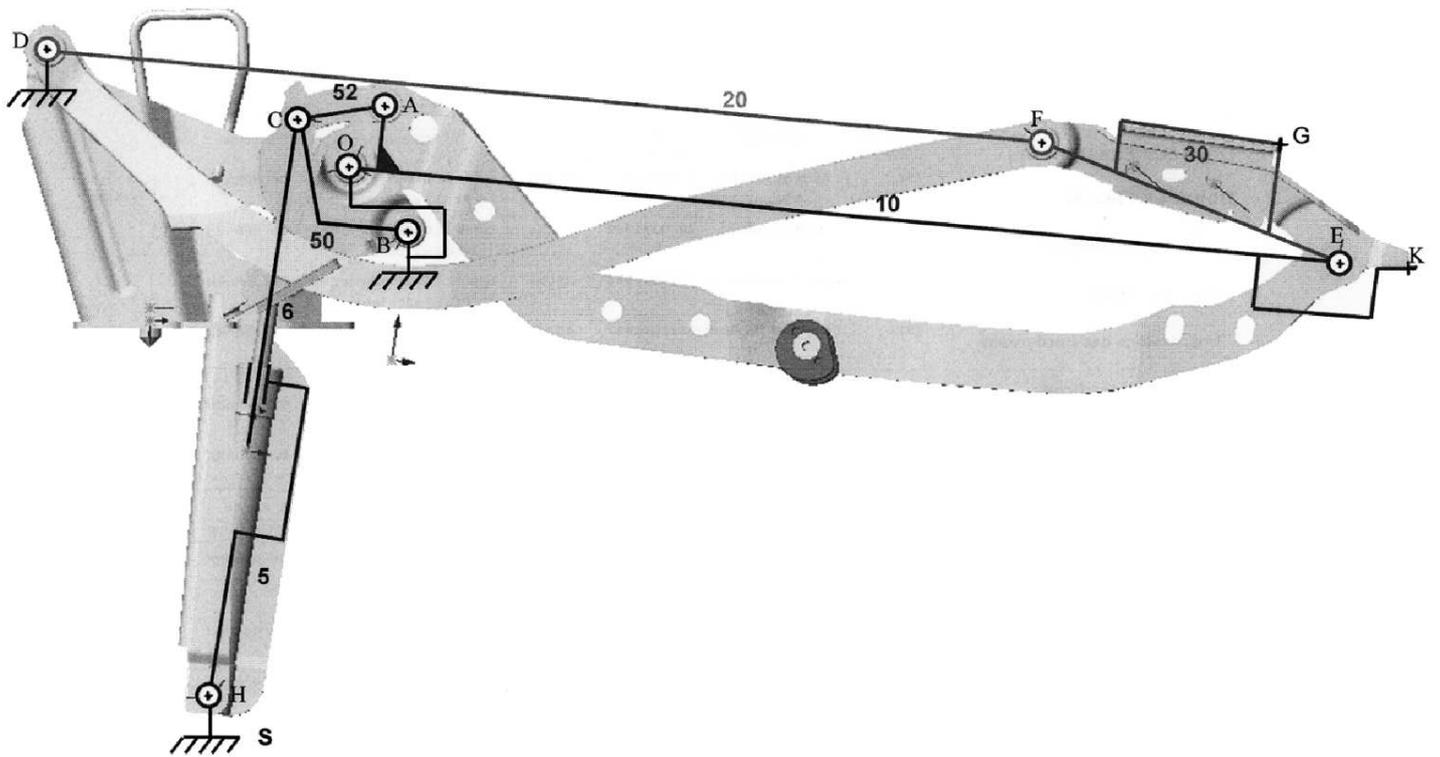


FIGURE 7 –