CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-2

Modéliser les signaux et les fonctions de transfert. Passer du domaine temporel au domaine symbolique de Laplace et inversement.

Objectifs MODELISER RESOUDRE

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable de :

- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
  - Modéliser le signal d'entrée.
  - Simplifier un modèle.

Table des matières

1 Introduction 2
- 1.1 Domaine symbolique de Laplace . . . 2
- 1.2 Définition . . . 2
- 1.3 Conditions d'Heaviside . . . 2

2 Propriétés et théorèmes 3
- 2.1 Unicité . . . 3
- 2.2 Linéarité . . . 3
- 2.3 Dérivation . . . 3
- 2.4 Intégration . . . 3
- 2.5 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale . . . 3
- 2.6 Retard . . . 4
- 2.7 Amortissement . . . 4

3 Transformées de Laplace des fonctions usuelles 4
- 3.1 Signaux d'entrée types . . . 4
  - 3.1.1 Signal Impulsion (Dirac) . . . 4
  - 3.1.2 Signal Echelon . . . 5
  - 3.1.3 Signal Rampe . . . 5
  - 3.1.4 Signal Sinusoïdale . . . 5
- 3.2 Autres signaux . . . 6
  - 3.2.1 Signaux causaux . . . 6
  - 3.2.2 Décomposition d'un signal . . . 6

4 Transformée de Laplace inverse 6
- 4.1 Définition . . . 6
- 4.2 Décomposition en éléments simples . . . 6

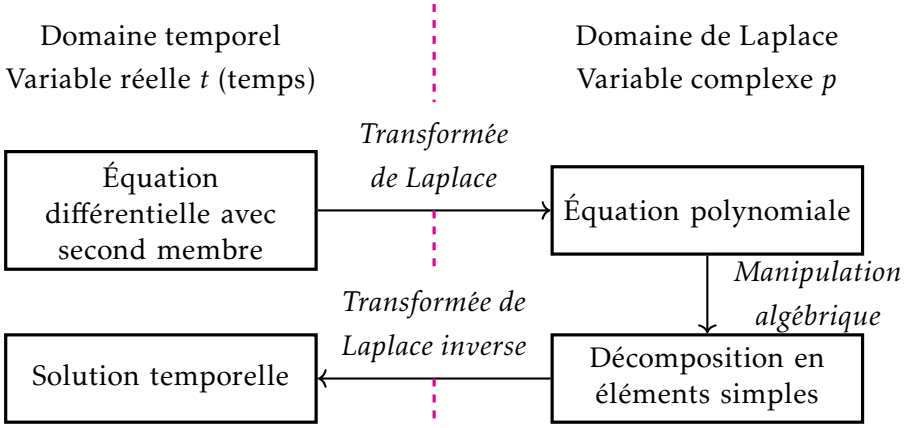
5 Tableau des transformées de Laplace 8

1 Introduction

1.1 Domaine symbolique de Laplace

En Sciences de l'Ingénieur, la transformée de Laplace sera utilisée de manière privilégiée afin de traiter les équations différentielles à coefficients constants. Elle permet de changer de domaine de travail. Utilisation des transformées de Laplace :
La transformée de Laplace permet de :

- transformer une équation différentielle linéaire à coefficients constants en une équation algébrique plus facilement exploitable.
- revenir dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse (cas simple)
- donner les caractéristiques principales du système en terme de performances sans calculer la réponse temporelle (cas plus complexes)



1.2 Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$
- où p représente une variable complexe

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t)\,dt$$

Sous réserve d'existence, la transformée (unilatérale) de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est définie par la relation ci-dessus, p étant une variable complexe.

Remarque :

1. $\int_0^{+\infty} (\ldots)\,dt$ signifie $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} (\ldots)\,dt$. C'est une intégrale impropre (cf. votre cours de maths et ses propriétés)
2. $F(p)$ existe si l'intégrale a un sens et converge. Dans les cas rencontrés en SI, les conditions d'existences et de convergence sont réunies.
3. La variable p peut aussi être notée avec la lettre s
4. La transformée de Laplace inverse sera notée : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions causales c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse,....

1.3 Conditions d'Heaviside

Les conditions d'Heaviside imposent à une fonction f et ses dérivées, d'être nulles en 0: $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

2 Propriétés et théorèmes

2.1 Unicité

La transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ est unique.

2.2 Linéarité

Soient f et g deux fonctions du temps ayant les "bonnes" propriétés par rapport à la transformée de Laplace :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.\mathcal{L}[f(t)] + \beta.\mathcal{L}[g(t)]$$

2.3 Dérivation

La transformée de Laplace de la dérivée de f vaut : $\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = p.F(p) - f(0)}$ avec $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$

Démonstration :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f'(t)\,dt = \underbrace{\left[e^{-p.t}.f(t)\right]_0^{+\infty}}_{-f(0)} - \underbrace{\int_0^{+\infty} -p.e^{-p.t}.f(t)\,dt}_{-p.F(p)} \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}[f'(t)] = p.F(p) - f(0)$$

En répétant l'intégration par partie, nous obtenons :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p) - p^{n-1}.f(0) - p^{n-2}.f'(0)\ldots - f^{(n-1)}(0) \quad \text{soit:} \quad \boxed{\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1-i)}.f^{(i)}(0)}$$

Si toutes les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside, $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$), l'expression précédente se réduit à : $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p)$ Une équation différentielle à coefficients constants devient donc

$$a_n.\frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \ldots + a_1.\frac{ds(t)}{dt} + a_0.s(t) = b_m.\frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \ldots + b_1.\frac{de(t)}{dt} + b_0.e(t)$$

$$\mathcal{L}[\ldots = \ldots] \quad \Rightarrow \quad (a_n.p^n + \ldots + a_1.p + a_0).S(p) = (b_m.p^m + \ldots + b_1.p + b_0).E(p)$$

2.4 Intégration

Uniquement pour une intégration de 0 à t: $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau).d\tau\right] = \frac{F(p) - g(0)}{p}}$ où g est une primitive de f

Remarque : Si les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside) :

- dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique
- intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

2.5 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Pour obtenir des informations sur la fonction originale $f(t)$ (au voisinage de $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$) sans calculer la transformée de Laplace inverse de F(p), il est possible d'utiliser les théorème de la valeur initiale et de la valeur finale (Théorèmes valables dans la mesure où la limite existe...):

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p.F(p)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)}$$

Démonstration :

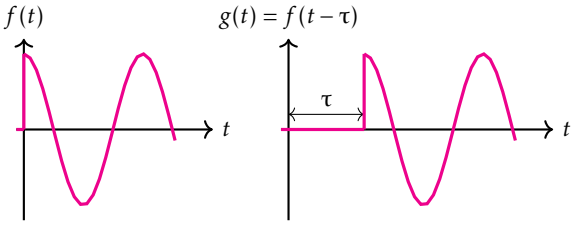
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)\,dt &= p.\mathrm{F}(p) - f(0) \\
\underbrace{\lim_{p\mapsto\infty}\int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)\,dt}_{\mapsto 0} &= \lim_{p\mapsto\infty}[p.\mathrm{F}(p) - \underbrace{f(0)}_{\lim_{t\mapsto 0} f(t)}] \\
\text{d'ou}\quad \lim_{t\mapsto 0} f(t) &= \lim_{p\mapsto+\infty} p.\mathrm{F}(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)\,dt &= p.\mathrm{F}(p) - f(0) \\
\lim_{p\mapsto 0}\int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)\,dt &= \lim_{p\mapsto 0}[p.\mathrm{F}(p) - f(0)] \\
\int_0^\infty f'(t)\,dt = [f(t)]_0^\infty &= \lim_{p\mapsto 0} p.\mathrm{F}(p) - f(0) \\
\lim_{t\mapsto\infty} f(t) - f(0) &= \lim_{p\mapsto 0} p.\mathrm{F}(p) - f(0) \\
\text{d'ou}\quad \lim_{t\mapsto\infty} f(t) &= \lim_{p\mapsto 0} p.\mathrm{F}(p)
\end{aligned}$$

2.6 Retard

Dans le cas d'un retard τ:

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau.p}.\mathrm{F}(p)$$



2.7 Amortissement

Dans le cas d'une fonction f amortie par une fonction exponentielle décroissante $e^{-a.t}$, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathcal{L}\left[f(t).e^{-a.t}\right] = \mathrm{F}(p+a)$$

Démonstration : $\mathcal{L}\left[f(t).e^{-a.t}\right] = \int_0^\infty e^{-p.t}.f(t).e^{-a.t}\,dt = \mathrm{F}(p+a)$

3 Transformées de Laplace des fonctions usuelles

3.1 Signaux d'entrée types

Pour évaluer les performances d'un système, des signaux tests sont appliqués en entrée $e(t)$, de façon théorique ou expérimentale.

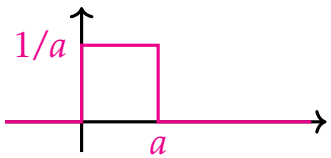
3.1.1 Signal Impulsion (Dirac)

L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère. Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Exemple : Fonction créneaux de durée infinitésimale

Soit $f(t)$ une fonction créneau :

- pour tout $t < 0$ et $t > a$: $f_a(t) = 0$
- pour $0 \leq t \leq a$: $f_a(t) = \frac{1}{a}$



$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} f_a(t)$$

L'impulsion Dirac peut être imagée par un créneau de surface unité pour lequel on fait tendre a vers zéro.
Propriétés :

- Mathématiquement parlant, le Dirac $\delta(t)$ est une distribution particulière (voir plus tard en Math). En résumé et pour faire simple : c'est une fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$ sauf en zéro et dont l'intégrale vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)\,dt = f(0)$$

- La transformée de Laplace de cette fonction est donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}.\delta(t)\,dt = e^{-p.0} = 1 \;\Rightarrow\; \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

- La réponse temporelle d'un système à un Dirac est appelée réponse impulsionnelle.

3.1.2 Signal Echelon

Un échelon unitaire $u(t)$ est définie de la manière suivante :

- pour $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$
- pour $t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

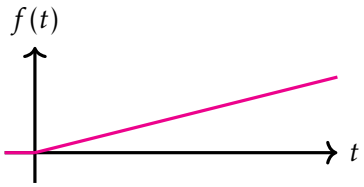
Sa transformée de Laplace vaut : $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{p}$

La réponse temporelle d'un système soumis à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle.

Remarque : L'échelon est le signal le plus facilement réalisable expérimentalement. On l'appelle fonction d'Heaviside.

3.1.3 Signal Rampe

Une rampe est définie par : $r(t) = k.t.u(t)$



Sa transformée de Laplace vaut : $\mathcal{L}[r(t)] = \dfrac{k}{p^2}$

La réponse temporelle d'un système soumis à une rampe unitaire est appelée réponse en suivi (ou en poursuite).

3.1.4 Signal Sinusoïdale

Soit
$f(t) = \sin(\omega.t)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)\,dt = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.t).e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\cos(\omega.t)\,dt \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}.\left[\sin(\omega.t).e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{p^2}{\omega^2}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)\,dt \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}.\mathcal{L}[f(t)] \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}[\sin(\omega.t)].\left[1 + \frac{p^2}{\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega.t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

La réponse temporelle d'un système à une fonction sinusoïdale est appelée réponse harmonique.

Remarque : Ce signal est utilisé expérimentalement pour effectuer une analyse fréquentielle d'un système

3.2 Autres signaux

3.2.1 Signaux causaux

Définition : Signal causal

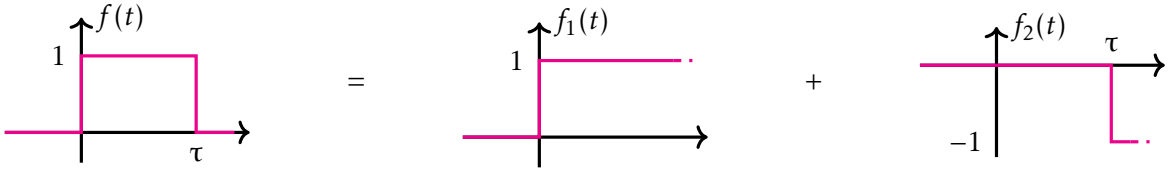
un signal $c(t)$ est dit causal si pour $t < 0$, $c(t) = 0$

La plupart des systèmes mécaniques ne produisent un effet qu'à partir de l'apparition d'une cause. Ces systèmes sont donc des systèmes causaux.

3.2.2 Décomposition d'un signal

Pour avoir des signaux causaux (nul pour $t < 0$) et pour éviter d'utiliser une définition des fonctions par intervalle, on définit les signaux avec une combinaison d'échelons unitaires, éventuellement retardés.

Exemple :



Le signal f peut être défini:

- soit par intervalle :

$$\begin{cases} t < 0 & \rightarrow & f(t) = 0 \\ t \leq 0 < \tau & \rightarrow & f(t) = 1 \\ t \geq \tau & \rightarrow & f(t) = 0 \end{cases}$$

- soit en le décomposant à l'aide de deux échelons :
  - Le signal f_1 est un échelon unitaire classique : $f_1(t) = u(t)$
  - Le signal f_2 est un échelon unitaire négatif, retardé de τ : $f_2(t) = -u(t-\tau)$
  - On en déduit donc que $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = u(t) - u(t-\tau)$

Par linéarité, on peut calculer la transformée de Laplace de f: $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = \dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-\tau.p}}{p}$

4 Transformée de Laplace inverse

Cette opération consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une expression F(p) donnée.

4.1 Définition

La formule mathématique permettant de passer du domaine symbolique de Laplace au domaine temporelle est donnée par:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(p)] = \frac{1}{2.\pi.i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p.t}.\mathrm{F}(p)dp$$

Cette formule n'étant guère enthousiasmante, on lui préfère très souvent la décomposition en éléments simples...

4.2 Décomposition en éléments simples

Pour éviter d'utiliser la formule précédente, il faut décomposer la fonction F(p) en éléments simples (éléments pour lesquels on connaît les transformées de Laplace inverses).

Souvent, F(p) est une fonction rationnelle. Il faut donc identifier les pôles de F(p), puis déterminer les constantes

relatives à chaque élément simple :

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=A_0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{ij}}{(p-\alpha_i)^j}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{q_k}\frac{B_{kl}.p+C_{kl}}{\left[(p+\beta_k)^2+\omega_k^2\right]^l}$$

n: nb pôles réels
r: nb de dipôles conjugués $(z,\bar{z})$
m_i, q_k: multiplicité des pôles

Le calcul des coefficients A_0, A_{ij}, B_{kl} et C_{kl} se fait :

- soit en prenant des valeurs particulières (moyennant une multiplication afin de faire disparaître les pôles → méthode d'occultation).
- soit par identification en recomposant la fraction (bien pour les cas simples).

Exemple : Décomposition en éléments simples sans pôles complexes:

$$F(p)=\frac{9}{(p+1)(p-2)^2}=\frac{\alpha}{p+1}+\frac{\beta}{p-2}+\frac{\gamma}{(p-2)^2}$$

- Pour α: multiplication par $(p+1)$ et évaluation de l'expression pour $p=-1$

$$(p+1).F(p) = \frac{9}{(p-2)^2}=\alpha+\beta.\frac{p+1}{p-2}+\gamma.\frac{p+1}{(p-2)^2}\overset{p=-1}{\Rightarrow}\frac{9}{(-1-2)^2}=\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha=1$$

- Pour γ: multiplication par $(p-2)^2$ et évaluation de l'expression pour $p=2$

$$(p-2)^2.F(p) = \frac{9}{p+1}=\alpha.\frac{(p-2)^2}{p+1}+\beta.(p-2)+\gamma\overset{p=2}{\Rightarrow}\frac{9}{2+1}=\gamma \quad\Rightarrow\quad \gamma=3$$

- Pour β : évaluation de $p.F(p)$ en...l'infini :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}p.F(p)=\lim_{p\to\infty}p.\frac{9}{(p+1)(p-2)^2} &= \lim_{p\to\infty}p.\frac{\alpha}{p+1}+p.\frac{\beta}{p-2}+p.\frac{\gamma}{(p-2)^2}\\ 0 &= \alpha+\beta+0 \text{ d'où } \beta=-\alpha=-1\end{aligned}$$

  Dans le cas où une partie entière est présente, on prend directement $\lim_{p\to\infty}$ pour déterminer A_0.

- Pour β on pouvait aussi utiliser la dernière technique : évaluation de l'expression en un point, par exemple $p=0$

$$\begin{aligned}F(0)=\frac{9}{(1)(-2)^2} &= \frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{-2}+\frac{\gamma}{(-2)^2}\\ \frac{9}{4} &= \alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{4} \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{4.\alpha+\gamma-9}{2}=-1\end{aligned}$$

La fraction rationnelle associée à $F(p)$ étant décomposée en éléments simples, il s'agit d'utiliser le tableau des transformées usuelles pour passer au domaine temporel.

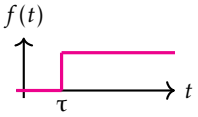
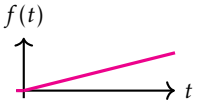
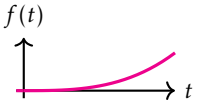
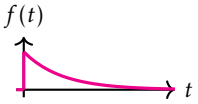
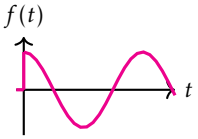
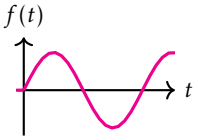
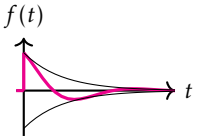
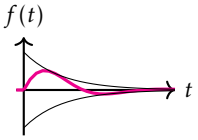
$$F(p)=\frac{9}{(p+1).(p-2)^2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-2}+\frac{3}{(p-2)^2}\Rightarrow f(t)=e^{-t}-e^{2.t}+3.t.e^{2.t}$$

Exemple : Décomposition en éléments simples avec pôles complexes:

$$\begin{aligned}F(p)=\frac{2.p+3}{(p^2+p+1).(p+1)}=\frac{\alpha}{p+1}+\frac{\beta.p+\gamma}{p^2+p+1} &= \frac{\alpha.(p^2+p+1)+(\beta.p+\gamma).(p+1)}{(p^2+p+1).(p+1)}\\ \alpha=1,\beta=-1 \text{ et } \gamma=2 \Leftarrow \quad &= \frac{(\alpha+\beta).p^2+(\alpha+\beta+\gamma).p+\alpha+\gamma}{(p^2+p+1)(p+1)}\end{aligned}$$

Il est aussi possible de décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$: $F(p)=\frac{\alpha}{p+1}+\frac{\lambda}{p+j}+\frac{\mu}{p+\bar{j}}$

5 Tableau des transformées de Laplace

Nom	Allure	$f(t)$	F(p)	Pôles de F(p)
Dirac		$\delta(t)$	1	aucun
Échelon		$u(t)$	$\frac{1}{p}$	0
Retard		$g(t-\tau)$	$e^{-\tau.p}.G(p)$	0
Rampe		$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	0 (d'ordre 2)
Fonction puissance		$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0 (d'ordre $n+1$)
Exponentielle		$e^{-a.t}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	-a
Générale, la plus importante		$t^n e^{-a.t}.u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	-a (ordre $n+1$)
Cosinus		$\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Sinus		$\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Cosinus amorti		$e^{-at}\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$
Sinus amorti		$e^{-at}\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$

Remarque : En fonction de la nature des pôles (racines du dénominateur) des transformées de Laplace, on peut déduire des indications sur la fonction temporelle.