CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-3 Prévoir les réponses temporelles de systèmes élémentaires

Objectifs — **MODELISER SIMULER RESOUDRE EXPERIMENTER**

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable de :

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier les paramètres d'un modèle.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
  - Compléter un modèle multiphysique.
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
  - Simplifier un modèle.
- **B3** Valider un modèle
  - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Déterminer la réponse temporelle.
- **D2** Proposer et justifier un protocole expérimental
  - Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.
  - Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.
  - Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.

Table des matières

1 Gain pur 2
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Réponses temporelles . . . 2

2 Système du premier ordre 2
- 2.1 Définition . . . 2
- 2.2 Réponse impulsionnelle . . . 2
- 2.3 Réponse à un échelon . . . 2
  - 2.3.1 Propriétés remarquables . . . 3
  - 2.3.2 Influence des paramètres caractéristiques . . . 3
- 2.4 Réponse à une rampe . . . 3

3 Système du deuxième ordre 4
- 3.1 Définition . . . 4
- 3.2 Réponse indicielle . . . 4
  - 3.2.1 Régime permanent . . . 4
  - 3.2.2 Régime transitoire . . . 4
  - 3.2.3 Réponse indicielle en fonction de ξ . . . 6
- 3.3 Caractéristique du régime pseudo périodique . . . 6
  - 3.3.1 Dépassements . . . 6
  - 3.3.2 Relation entre les amplitudes des dépassements et le coefficient d'amortissement . . . 6
- 3.4 Influence des paramètres caractéristiques . . . 8
- 3.5 Compléments concernant le régime apériodique . . . 8

4 Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques 9
- 4.1 Actions dérivées et intégrales . . . 9
- 4.2 Réponses impulsionnelles (unitaires) . . . 10
- 4.3 Réponses à une rampe (unitaire) . . . 10

1 Gain pur

1.1 Définition

La relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est simplement $s(t) = \mathrm{K}.e(t)$ pour un système assimilé à un gain pur K.

1.2 Réponses temporelles

Pour les entrées canoniques, un système assimilé à un gain pur K donne directement :

Sollicitation	Dirac	Échelon	Rampe	Sinus
$e(t)$	$\delta(t)$	$\mathrm{E}_0.u(t)$	$\mathrm{V}_0.t.u(t)$	$\mathrm{E}_0.\sin(\omega.t).u(t)$
$s(t)$	$\mathrm{K}.\delta(t)$	$\mathrm{K}.\mathrm{E}_0.u(t)$	$\mathrm{K}.\mathrm{V}_0.t.u(t)$	$\mathrm{K}.\mathrm{E}_0.\sin(\omega.t).u(t)$

2 Système du premier ordre

2.1 Définition

Définition : Système du premier ordre

On appelle système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, un système régi par une équation différentielle de type:

$$\boxed{\tau.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = \mathrm{K}.e(t)}$$

Avec les conditions d'Heaviside ($s(0^-) = e(0^-) = 0$), la fonction de transfert est $\mathrm{H}(p) = \dfrac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}$ avec K le gain statique et τ la constante de temps.

2.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est par définition, la réponse à un Dirac :

$$\left.\begin{array}{r} e(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}(p) = 1 \\ \mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p).\mathrm{E}(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p)\times 1 = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p} = \frac{\frac{\mathrm{K}}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{\mathrm{K}}{\tau}.e^{-t/\tau}$$

2.3 Réponse à un échelon

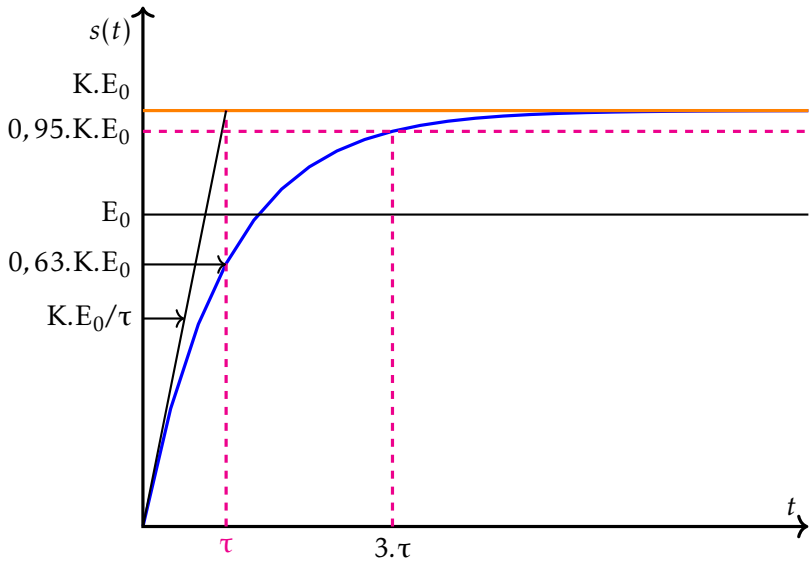
La réponse à un échelon d'un système est, par définition, la réponse à une sollicitation constante (par exemple d'amplitude E_0) pour $t \geq 0$:

$$e(t) = \mathrm{E}_0.u(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{E}(p) = \frac{\mathrm{E}_0}{p}$$

$$\mathrm{S}(p) = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}.\frac{\mathrm{E}_0}{p} = \mathrm{K}.\mathrm{E}_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau.p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad s(t) = \mathrm{K}.\mathrm{E}_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad s'(t) = \frac{\mathrm{K}.\mathrm{E}_0}{\tau}.e^{-t/\tau}$$



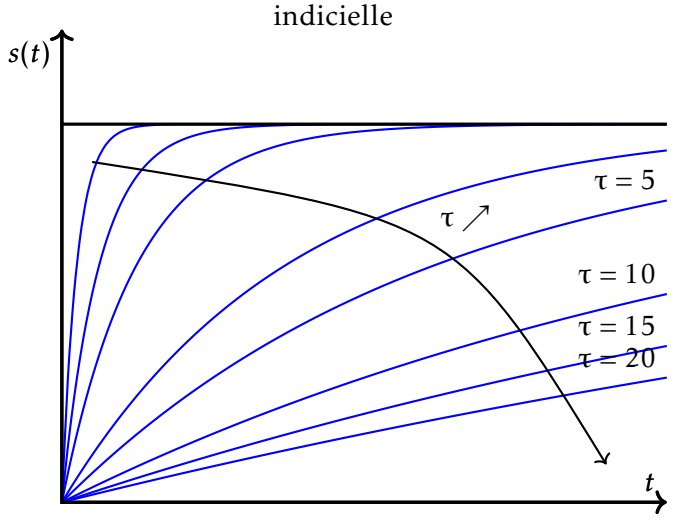
2.3.1 Propriétés remarquables

- La valeur à convergence vaut : $\lim_{t \mapsto +\infty} s(t) = \mathrm{K.E_0}$ ou $\lim_{p \mapsto 0^+} p.\mathrm{S}(p) = \mathrm{K.E_0}$
- Le temps de réponse à 5% est obtenu pour un temps $t = 3.\tau$: $s(3.\tau) \approx 0,95.\mathrm{K.E_0}$
- Pour le temps $t = \tau$, on obtient : $s(t) = 0,63.\mathrm{K.E_0}$
- La pente à l'origine vaut $\dfrac{\mathrm{K.E_0}}{\tau}$

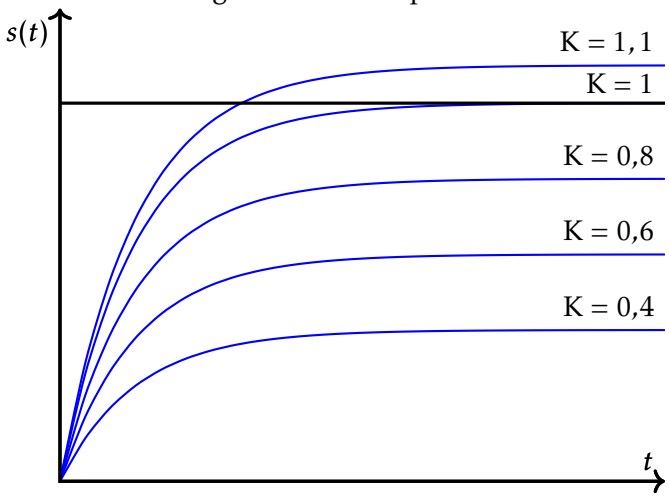
2.3.2 Influence des paramètres caractéristiques

Rappel on appelle réponse indicielle la réponse à un échelon unitaire.

Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



Influence du gain K sur la réponse indicielle.

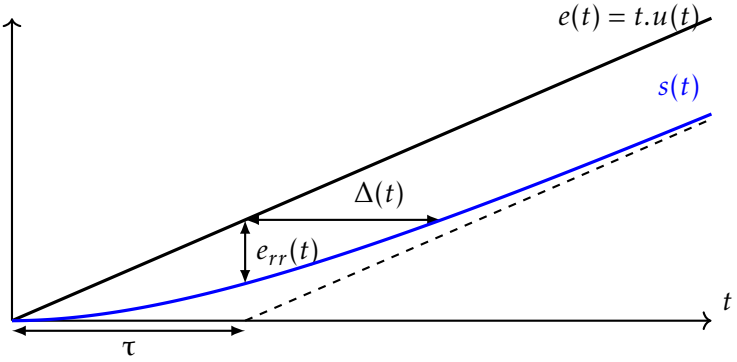


Une augmentation de la constante de temps diminue la rapidité du système (temps de réponse à 5% obtenue pour $t = 3.\tau$). Une augmentation de K agit comme une augmentation de la consigne.

2.4 Réponse à une rampe

Rappel on appelle réponse à une rampe de pente $\mathrm{V_0}$ (ou réponse en vitesse), la réponse d'un système à une sollicitation croissant de façon proportionnelle au temps : $e(t) = \mathrm{V_0}.t.u(t)$.

$$\mathrm{S}(p) = \mathrm{H}(p).\mathrm{E}(p) = \frac{\mathrm{K}}{1+\tau.p}.\frac{\mathrm{V_0}}{p^2} = \mathrm{K.V_0}.\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p}\right) \quad \Rightarrow \quad s(t) = \mathrm{K.V_0}.\left(t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}\right)$$



- On appelle erreur en traînage (ou en poursuite ou en vitesse) $e_{rr}(t)$
- On appelle retard en traînage $\Delta(t)$
- s va rejoindre l'asymptote d'équation $y = \mathrm{K.V_0}.(t - \tau)$.
  - On trouve τ à son intersection avec l'axe des abscisses.
  - Si $\mathrm{K} = 1$ l'asymptote est parallèle à l'évolution de la consigne.

3 Système du deuxième ordre

3.1 Définition

Définition : Système du second ordre

On appelle système du second ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ un système régi par une équation différentielle de type:

$$\boxed{a_2.\frac{d^2s}{dt^2}+a_1.\frac{ds}{dt}+a_0.s(t)=b_0.e(t)}$$

Les systèmes du second ordre sont généralement caractérisés à partir des coefficients:

Le gain statique : K

$$\boxed{K=\frac{b_0}{a_0}}$$

La pulsation propre du système non amorti : ω_0

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}}$$

Le facteur d'amortissement : ξ

$$\boxed{\xi=\frac{a_1}{2.\sqrt{a_0.a_2}}}$$

Dans les systèmes réels à dissipation d'énergie $\xi \geq 0$.

La fonction de transfert $H(p)=S(p)/E(p)$ devient avec les conditions d'Heaviside ($s(0^-)=e(0^-)=0$):

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2.\xi}{\omega_0}.\frac{ds}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$

$$\boxed{H(p)=\frac{K}{1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

ou encore $H(p)=\dfrac{K.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2}$

3.2 Réponse indicielle

3.2.1 Régime permanent

Étude de régime établi.

$$\left.\begin{array}{l} e(t)=E_0.u(t) \\ S(p)=H(p).E(p) \end{array}\right\} \Rightarrow S(p)=\frac{K}{1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}.\frac{E_0}{p}$$

En appliquant le théorème de la valeur initiale et celui de la valeur finale, il vient:

$$\begin{aligned} s(0^+) &= \lim_{p\mapsto+\infty} p.S(p)=0 \\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{(0^+)} &= \lim_{p\mapsto+\infty} p.(p.S(p)-s(0^+))=0 \\ \lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{p\mapsto 0} p.S(p)=K.E_0 \end{aligned}$$

Remarques :

- Le régime établi ne dépend que de $K.E_0$ donc du gain statique. En revanche, ξ et ω_0 n'influence pas le régime définitif.
- La tangente à l'origine est de pente nulle (c'est lié aux conditions d'Heaviside)

3.2.2 Régime transitoire

Le calcul du régime transitoire impose de décomposer $S(p)$ en fractions rationnelles. Il convient donc de connaître les pôles de la fonction de transfert. L'équation caractéristique est alors définie par :

$$\boxed{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta=(2.\xi.\omega_0)^2-4.\omega_0^2=4.\omega^2.\left(\xi^2-1\right)}$$

En fonction des valeurs du coefficient d'amortissement ξ, on distingue 3 cas :

- ★ Régime pseudo périodique $\xi < 1$
- ★ Régime apériodique critique $\xi = 1$
- ★ Régime apériodique $\xi > 1$

- **Régime apériodique** $\xi > 1$
  L'équation caractéristique présente deux racines réelles p_1 et p_2:

$$\boxed{p_1 = -\xi.\omega_0 - \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad p_2 = -\xi.\omega_0 + \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

  On introduit alors les valeurs τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 = -p_1^{-1}$ et $\tau_2 = -p_2^{-1}$ qui conduisent ainsi à l'expression de $S(p)$ suivante :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{E_0}{p} = \frac{K\omega_0^2}{p_1.p_2.(-p.\tau_1-1)(-p.\tau_2-1)}.\frac{E_0}{p} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2.(\xi^2-(\xi^2-1))(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\ &= \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} = K.E_0.\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_2}}\right) \\ \Rightarrow & \quad \boxed{s(t) = K.E_0.\left(1 + \frac{1}{\tau_2-\tau_1}.\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1} - \tau_2.e^{-t/\tau_2}\right)\right)} \end{aligned}$$

- **Régime apériodique critique** $\xi = 1$
  L'équation caractéristique présente une racine double $p_0 = -\omega_0$. Posons $\tau = \omega_0^{-1}$

$$\boxed{S(p) = \frac{1}{p}.\frac{K.E_0}{(1+\tau.p)^2} \qquad \Rightarrow \qquad s(t) = K.E_0.\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right).e^{-t/\tau}\right]}$$

- **Régime pseudopériodique** $\xi < 1$
  L'équation caractéristique présente deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$:

$$\boxed{z = -\xi.\omega_0 \pm j.\underbrace{\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)}_{\omega_p}}$$

  Pour éviter toutes confusions avec l'intensité, j est la variable complexe $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et non la racine troisième de l'unité $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On note $\omega_p = \omega_0.\sqrt{1-\xi^2}$ la pulsation propre du système.

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p-z)(p-\bar{z})} = \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{\left[(p+\xi.\omega_0)+j\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]\left[(p+\xi.\omega_0)-j\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]} \\ &= \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} = K.\frac{E_0}{p} - \frac{K.E_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.\left(\sqrt{1-\xi^2}\frac{(p+\xi.\omega_0)}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} + \xi.\frac{\omega_p}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2}\right) \end{aligned}$$

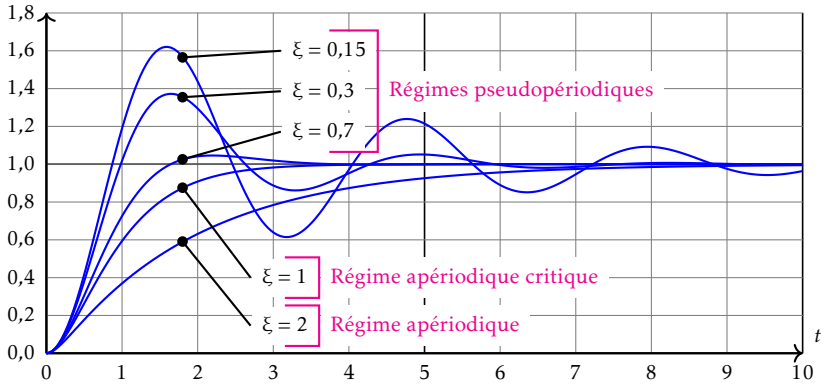
$$s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\sqrt{1-\xi^2}.\cos(\omega_p t) + \xi.\sin(\omega_p t)\right)\right] = K.E_0\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_p.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]}$$

3.2.3 Réponse indicielle en fonction de ξ

La réponse indicielle d'un système du second ordre présente trois types de régime suivant les valeurs de ξ:

- régime apériodique
- régime apériodique critique
- régime pseudopériodique



3.3 Caractéristique du régime pseudo périodique

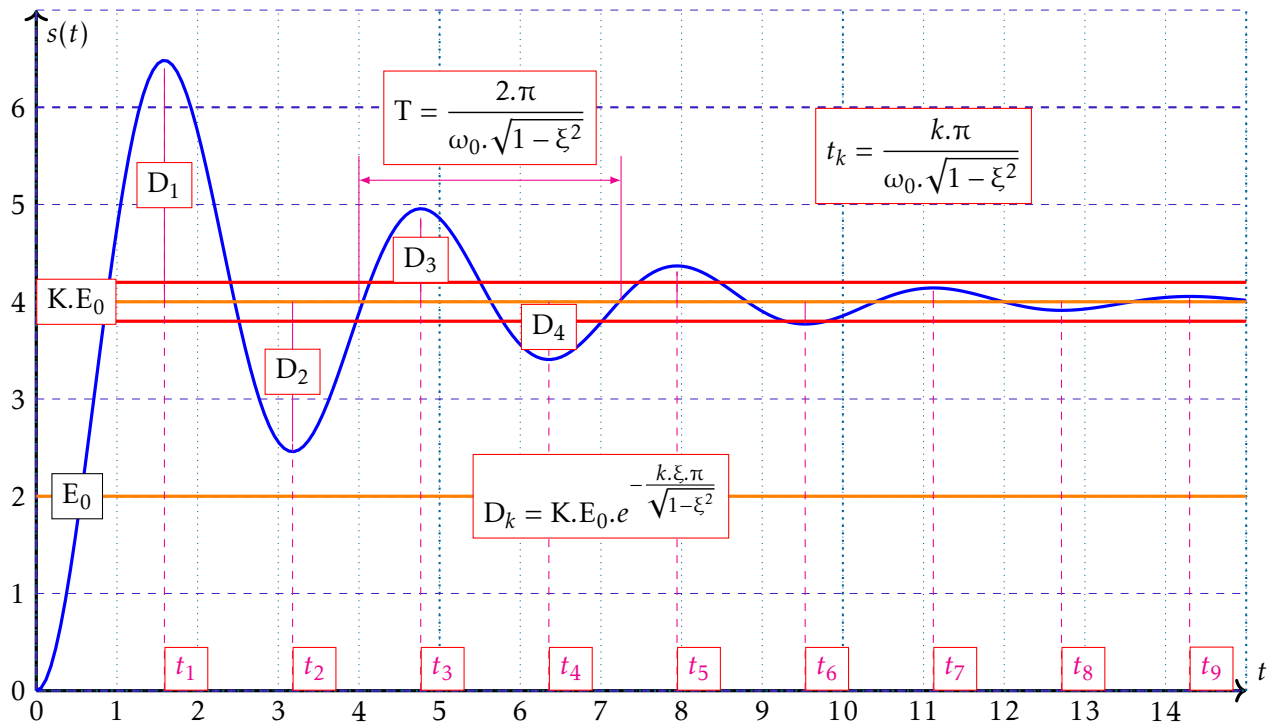
On parle ici de la **réponse indicielle** d'un système de **second ordre**.

3.3.1 Dépassements

Les dépassements dépendent des valeurs du coefficient d'amortissement ξ

- Les réponses des systèmes du second ordre peuvent présenter des dépassements dont l'amplitude peut être comparable à celle de l'échelon lui-même.
- Le temps de réponse à 5% varie suivant la valeur du coefficient d'amortissement ξ:
  - $\xi \ll 1$: l'amortissement est faible ($\xi = 0,1$ par exemple), les oscillations sont mal amorties, le temps de réponse est grand.
  - $\xi = 0,7$: le système présente un dépassement faible de 5%, avec le temps de réponse le plus faible.
  - $\xi = 1$: le système ne présente pas de dépassement au sens mathématique. Il ne correspond pas au minimum absolu du temps de réponse mais il s'agit cependant du système sans dépassement le plus rapide.
  - $\xi \gg 1$: il n'y a pas de dépassement, mais le système est lent, donc le temps de réponse est grand.

3.3.2 Relation entre les amplitudes des dépassements et le coefficient d'amortissement



Un système du second ordre soumis à un échelon ne présente de dépassement que pour $\xi < 1$. Cherchons la relation entre les dates t_i des maxima et minima locaux, les amplitudes D_i des dépassements et le coefficient d'amortissement ξ.

- **Recherche des t_i:** Pour chercher les t_i, on cherche quand la dérivée de $s(t)$ s'annule:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[s'(t)] &= p.S(p) - s(0) = p.\frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} - 0 = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2}\\ s'(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2}\right] = K.E_0.\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\sin(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t)\end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule pour :

- $t \mapsto \infty$, ce qui correspond au régime établi
- $t = 0$, tangente horizontale en 0
- $\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t = k.\pi$.

Le $n^{\text{ième}}$ maximum D_n est atteint en :

$$\boxed{t_n = \frac{(2.n-1).\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le $m^{\text{ième}}$ minimum relatif pour $k = 2.m$ en :

$$\boxed{t_m = \frac{2.m.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- **Recherche des D_i:**

Le dépassement est donnée par $D_i = s(t_{2.i-1}) - \lim\limits_{t\mapsto\infty} s(t)$:

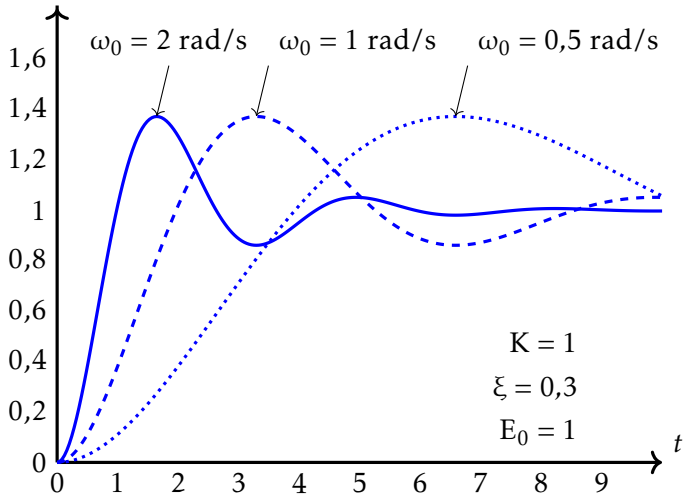
$$\begin{aligned}D_i &= K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t_{2.i-1} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] - K.E_0\\ &= -K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.\frac{(2.i-1).\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]\\ &= -K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left((2i-1).\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]\\ &= K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] \quad \text{or} \quad \frac{\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi} = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi+\sin^2\phi} = \sin^2\phi\end{aligned}$$

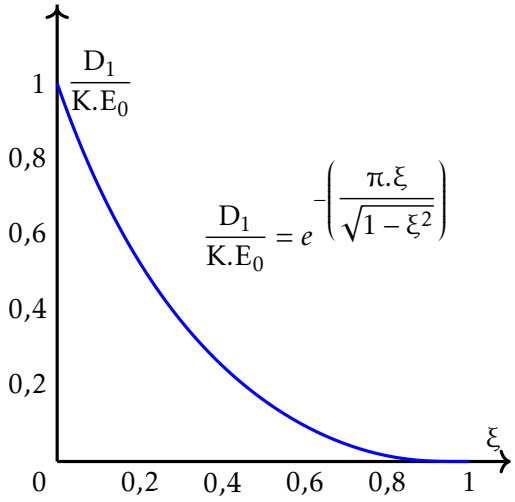
$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

et comme $\sqrt{1-\xi^2} \geq 0$ et $\xi \geq 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui implique:

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$ Il vient alors pour D_i $$\boxed{D_i = K.E_0.e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}} = K.E_0.e^{-\left[(2.i-1)\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]}}$$

Remarque : La pulsation ω_0 ne modifie pas l'amplitude des dépassements

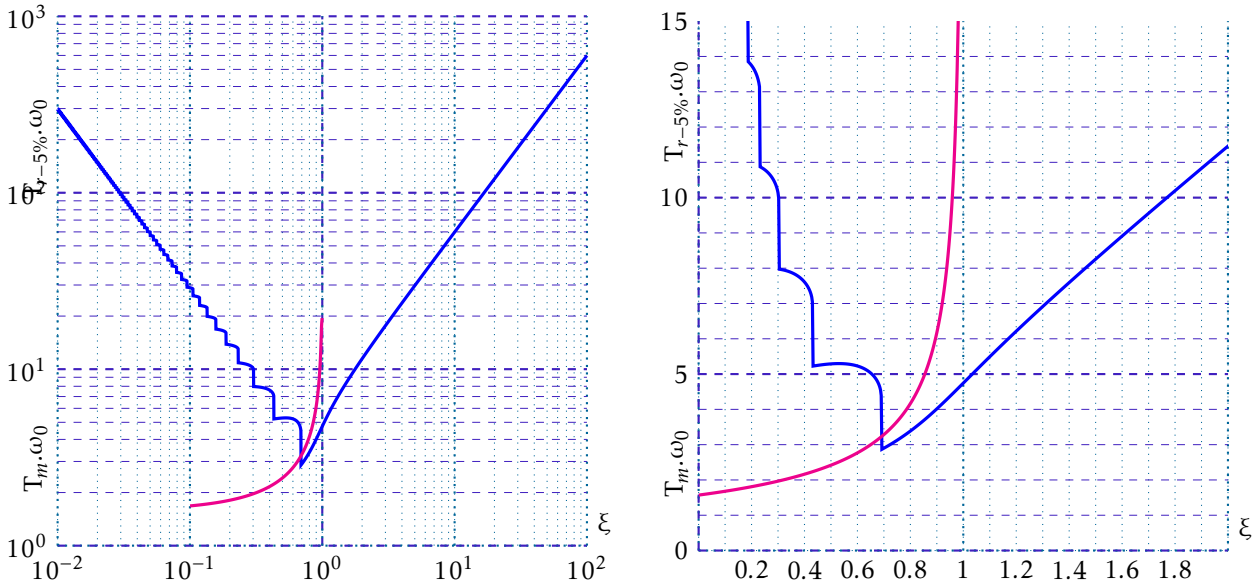




3.4 Influence des paramètres caractéristiques

Les courbes ci-contre, représentent les produits du temps de réponse à 5% t_r par la pulsation propre ω_0, et du temps de montée t_m par la pulsation propre ω_0, Ces produits sont tracés en fonction du coefficient d'amortissement ξ. Le temps de montée correspond au temps de la première intersection de la réponse avec l'asymptote $K.E_0$.

Le temps de réponse minimum (réponse indicielle) est atteint pour 0,7. Au delà de cette valeur, la courbe est régulière car il n'y a plus de dépassement. Les bosses de la partie gauche de la courbe sont dues aux sauts d'un extremum à un autre du temps de réponse. Le temps de montée devient infinie pour $\xi \geq 1$ puisqu'il n'y a plus de dépassement.

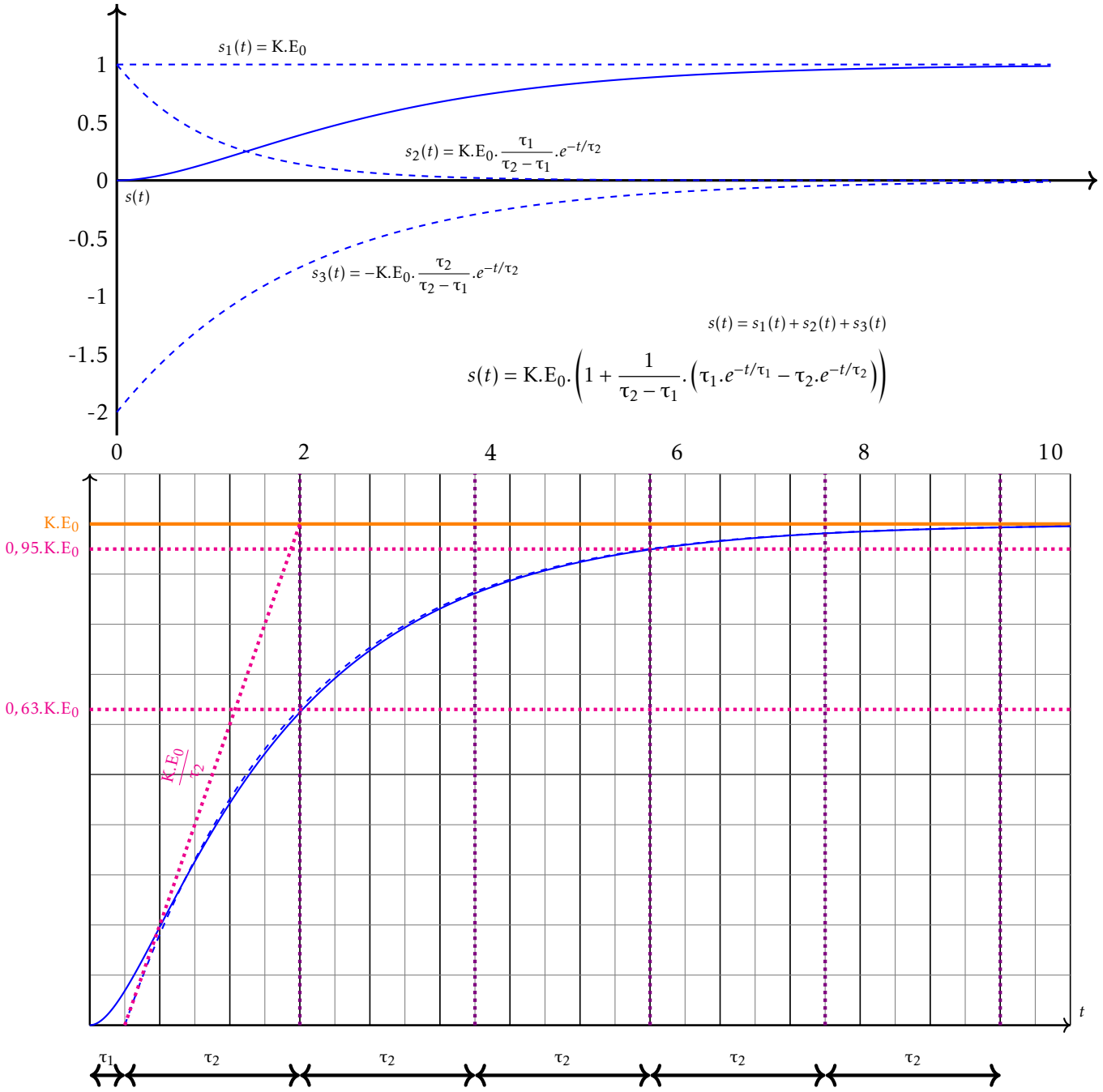


Temps de réponse à 5% réduit $T_{r-5\%}.\omega_0$ et temps de montée T_m en fonction du coefficient d'amortissement, en échelle logarithmique (à gauche) et en échelle linéaire (à droite).

3.5 Compléments concernant le régime apériodique

La réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique ($\xi > 1$ avec deux pôles réels) est la somme d'un échelon (représentant la réponse permanente) et de deux exponentielles amorties de constantes de temps différentes (représentant la partie transitoire de la réponse). Les pentes à l'origine sont exactement opposées ce qui conduit à une tangente horizontale pour la somme.

Lorsque un système du second ordre en régime amorti présente deux pôles réels p_1 et p_2 très différents ($|p_2| \ll |p_1|$), le pôle p_2 de norme la plus petite (donc la constante de temps τ_2 est la plus grande) est dit dominant. Le système peut être assimilé à un premier ordre, éventuellement retardé de la valeur de la constante de temps τ_1.



La figure ci-dessus présente un second ordre pour lequel $p_1 = 5.p_2$, i.e. $\tau_2 = 5.\tau_1$.

4 Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques

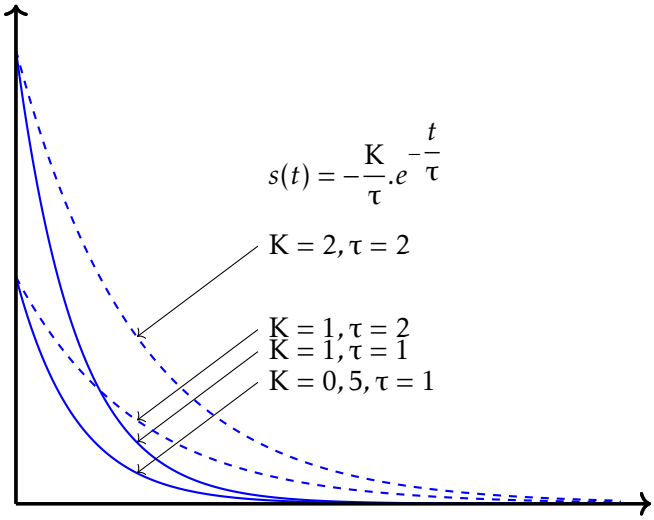
4.1 Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près). Ainsi, l'expression temporelles d'une entrée canonique sera une autre entrée canonique.

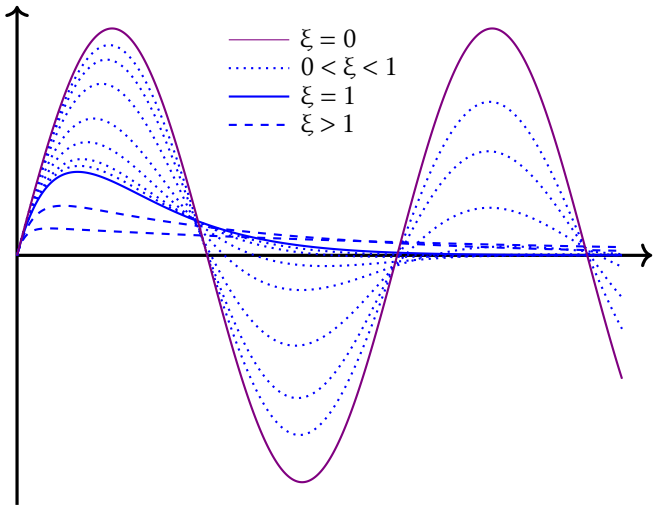
On peut ainsi donner le tableau suivant :

Entrée	$\delta(t)$	$u(t)$	$t.u(t)$	$t^n.u(t)$
Sortie d'un système dérivateur	-	$\delta(t)$	$u(t)$	$n.t^{n-1}.u(t)$
Sortie d'un système intégrateur	$u(t)$	$t.u(t)$	$\frac{1}{2}.t^2.u(t)$	$\frac{1}{n}.t^{n+1}.u(t)$

4.2 Réponses impulsionnelles (unitaires)

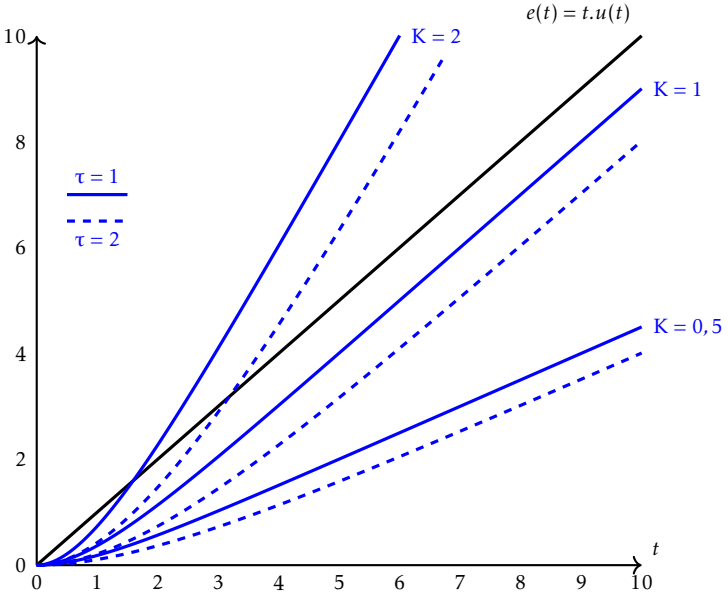


Premier ordre (réponse impulsionnelle)

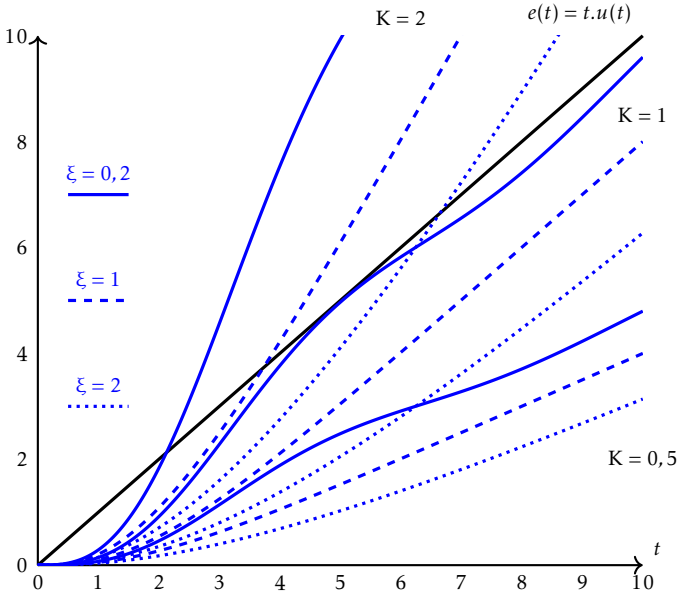


Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)

4.3 Réponses à une rampe (unitaire)



Premier ordre (réponse en poursuite)



Deuxième ordre (réponse en poursuite)