CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-1 : Modéliser et décrire les performances des SLCI

Objectifs

ANALYSER MODELISER

A l'issue de la séquence, avec l'aide du cours sur les transformées de Laplace, l'élève doit être capable :

- A3 Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
 - o Identifier la structure d'un système asservi.
- B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement
 - o Compléter un modèle multi-physique.
 - o Associer un modèle aux composants des chaines fonctionnelles.
 - o Modéliser un système par schéma-blocs.
 - o Simplifier un modèle.
- B3 Valider un modèle
 - o Préciser les limites de validité d'un modèle.
- C2 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
 - o Déterminer les performances d'un système asservi.

Table des matières

1	Intr 1.1	roduction à l'automatique Système automatique	2 2		
		Différents types d'automatismes			
2 Système de commande continu			2		
ı	2.1	Système de commande en chaîne directe	3		
ı	2.2	Perturbation			
	2.3	Système de commande en Boucle fermée (chaîne fermée)	3		
3	Syst	tème asservi	4		
ı	3.1	Définition d'un système asservi			
ı	3.2	-,			
	3.3	Performances d'un système asservi	4		
4	Diff	Différents types de systèmes			
ı	4.1				
ı		Système invariant			
ı	4.3	Système continu			
	4.4	Système linéaire	7		
5	Mod	délisation des systèmes linaires continus invariants	8		
ı	5.1	Notion de modélisation			
ı	5.2	Représentation par schémas blocs			
ı	5.3	Fonction de transfert associée à un système			
ı	5.4	Opérations sur les schémas blocs			
ı	5.6	FTBO - FTBF			
	5.6	Denominations complementaires	11		
6	Mod	dèles multi-physique	12		
ı	6.1	0 0			
	6.2				
	6.3	Modèle causal			
L	6.4	Modèle acausal	13		

Introduction à l'automatique

1.1 Système automatique

Définition: Système automatique

Système assurant des fonctions avec peu ou sans intervention humaine.

Il est constitué généralement d'une partie commande et d'une partie opérative.

Définition: L'automatique

Discipline scientifique traitant, d'une part, de la caractérisation des systèmes automatisés et d'autre part du choix, de la conception, et de la réalisation du système de commande.

Il s'agit donc de modéliser le comportement complexe des systèmes :

- réalisant leurs fonctions en relative autonomie,
- assurant un contrôle des performances par la mise en place possible d'une chaîne d'acquisition (boucle de retour).

1.2 Différents types d'automatismes

1.2.1 Système instantané ou dynamique

Lorsqu'un système est soumis à une variation brusque de la grandeur d'entrée, il peut réagir de façon :

- Instantané : la sortie est directement donnée par l'entrée sans aucune notion de temps (système instantané).
- Dynamique : la sortie dépend des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrée (système dynamique).

En réalité, il n'existe que peu de systèmes instantanés car tout effet présente une certaine "inertie " ou "mémoire". L'appellation "système instantané" relève donc souvent de l'approximation.

1.2.2 Système binaire, système continu

Dans le cadre du programme, deux principales sources d'informations conduisant à des parties commandes différentes et pour lesquelles, des modélisations différentes seront étudiées :

- à partir d'informations binaires (tout ou rien) : on appelle ces systèmes des systèmes logiques combinatoires (les actions dépendent uniquement de l'état des entrées à l'instant considéré) ou logiques séquentiels (les actions dépendent de l'état des entrées à l'instant considéré mais aussi aux instants antérieurs). Ils ne contrôlent pas la manière dont l'ordre a été exécuté. Par ailleurs le nombre d'opérations est fini et prédéterminé.
- à partir d'informations continues : ce sont des systèmes continus. C'est l'objet de ce cours.

2 Système de commande continu

Les systèmes étudiés dans ce cours sont constitués de grandeurs physiques continues. La grandeur de sortie (mettant en jeu généralement des énergies importantes) est pilotée par la grandeur d'entrée ou commande (faible énergie). Il est alors possible de définir une relation entrée-sortie.

L'énergie nécessaire à la grandeur de sortie ne provient pas directement de la commande. Elle est apportée dans le système via un préactionneur (ou amplificateur).

EXEMPLE : Remplissage d'un réservoir : une faible énergie nécessaire à la manœuvre du robinet permet de commander un système impliquant une énergie importante (débit et pression du fluide).

2.1 Système de commande en chaîne directe

Définition: Chaîne directe:

Un système fonctionne en chaîne directe s'il n'y a pas de contrôle sur la manière dont la consigne a été exécutée.

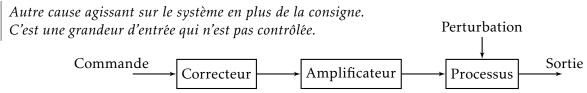


Ainsi le remplissage du réservoir constitue un système en chaîne directe. Lorsque la relation entre l'ouverture d'un robinet et le débit est connue, il suffit d'appliquer toujours la même consigne (ouverture du robinet durant un temps donné) pour obtenir le même niveau d'eau dans un réservoir au remplissage.

Lorsque l'utilisateur souhaite un niveau d'eau précis, cette commande n'est pas idéale car une légère variation de pression dans le réseau d'eau ou quelques fuites peuvent perturber le système.

2.2 Perturbation

Définition: Perturbation



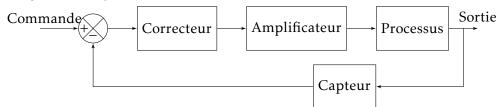
Exemple: Les fuites, l'évaporation ou la pression du réseau sont des sources de perturbations du réservoir. Pour un avion, les vents extérieurs sont des perturbations agissant sur sa direction.

En pratique, pour obtenir un niveau d'eau précis, il suffit de mesurer le niveau et fermer le robinet lorsque le niveau (la sortie) correspond à la consigne.

2.3 Système de commande en Boucle fermée (chaîne fermée)

Définition : Système en boucle fermée

Un système fonctionne en boucle fermée si une mesure de la sortie est réalisée afin de la comparer à la consigne et d'agir en conséquence.



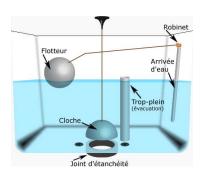
L'asservissement du système de commande consiste à mesurer la sortie et à utiliser cette information pour corriger la grandeur d'entrée du processus qui est auparavant amplifiée. Dans beaucoup d'exemples de la vie courante, l'homme réalise lui même l'asservissement. Mais il est possible de le faire automatiquement.

3. Système asservi 4/13



← Chaîne fermée réalisée par l'homme

Contrôle du niveau de réservoir →



3 Système asservi

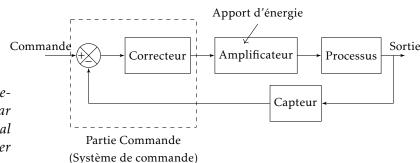
3.1 Définition d'un système asservi

Un système asservi est un système :

- à amplification de puissance
- en boucle fermée

Définition: Système asservi

Système bouclé dans lequel la grandeur de retour est comparée à la grandeur d'entrée par élaboration d'un signal, appelé écart. Ce signal écart est adapté et amplifié afin de commander la partie opérative.

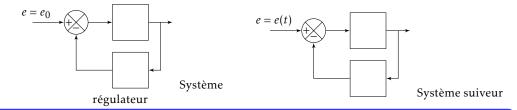


Remarque: l'amplification de puissance n'est pas forcément liée à un amplificateur au sens propre, transformant une grandeur physique donnée en une grandeur physique de même nature plus importante. L'amplification se fait en passant du signal de commande élaborée par la chaine d'information à l'énergie modulée en sortie du préactionneur.

3.2 Système régulateur ou suiveur

On distingue généralement les systèmes régulateurs où la consigne est constante (l'asservissement corrige les effets des perturbations) et les systèmes suiveurs où la consigne évolue continûment (l'asservissement suit la consigne).

EXEMPLE: Un réfrigérateur est constitué d'un système régulateur tandis que la fusée Ariane possède un système suiveur.



3.3 Performances d'un système asservi

En fonction du régime du système (transitoire ou permanent), il est possible de définir quatre critères permettant de mesurer les performances d'un système asservi : stabilité, précision, rapidité et amortissement.

Tous les graphes ci-dessous représentent l'évolution temporelle de la sortie d'un système suite à une consigne en échelon (valeur constante imposée).

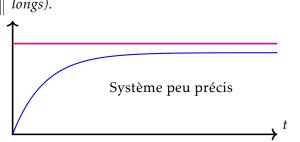
3. Système asservi 5/13

3.3.1 Régime permanent

3.3.1.1 Précision

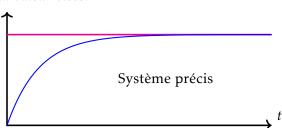
Définition: Régime permanent

Moment où le signal de sortie est établi (temps longs).



Définition: Précision

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée.

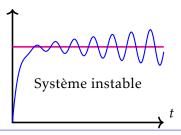


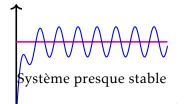
Elle est mesurée par l'écart entre la consigne souhaitée et la valeur effectivement atteinte par la grandeur de sortie.

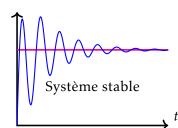
3.3.1.2 Stabilité

Définition: Stabilité

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



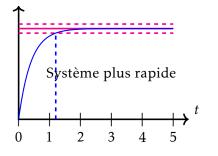


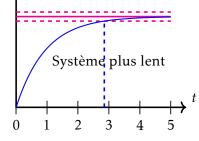


3.3.2 Régime transitoire

3.3.2.1 Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. Cependant la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à n%.



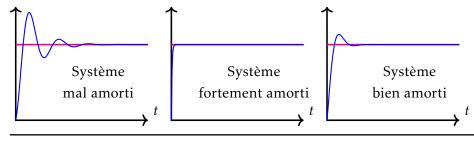


En pratique, on utilise le temps de réponse à 5%.

Définition: Temps de réponse à n%

Temps mis par le système pour atteindre et rester dans une zone définie à \pm n % de sa valeur de régime permanent.

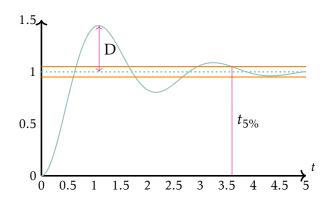
3.3.2.2 Amortissement



L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti. Pour caractériser la qualité de l'amortissement on peut retenir deux critères :

- le taux de dépassement (D), qui caractérise l'amplitude maximale des oscillations,
- le temps de réponse à 5% ($t_{5\%}$)

Il est à noter que pour certaines applications (l'usinage par exemple) un comportement oscillant n'est pas autorisé et tout dépassement est inacceptable.



4 Différents types de systèmes

Le cadre de l'étude que nous allons nous fixer cette année est celui des systèmes linéaires continus invariants monovariables.

4.1 Système monovariable

Définition: Système monovariable

Système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie.

Bien que les systèmes automatisés puissent gérer plusieurs sorties en fonction de plusieurs entrées principales, nous nous limiterons, pour des raisons de simplicité, aux systèmes monovariables.

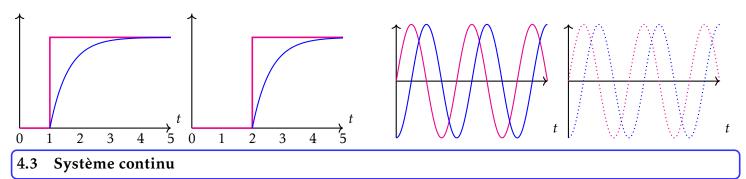
Si le système doit obligatoirement fonctionner avec plusieurs entrées (ou une entrée et des perturbations), il sera possible, dans certains cas, d'étudier séparément la relation entre la sortie et chacune des entrées, puis de superposer, dans un second temps, les effets de chaque entrée (par linéarité).

4.2 Système invariant

Définition: Système invariant

Système dont les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps ("le système ne vieillit pas").

Ce n'est pas le cas de tous les systèmes physiques à cause notamment de l'usure ou de la fatigue. Par exemple, moteur thermique s'altère avec le temps. Son comportement s'en trouve modifié.



Définition: Système continu

Système où les variables d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t.

Les signaux sont alors dits analogiques. En revanche, dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée de façon informatique ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. Ce sont des systèmes et des signaux discrets.

4.4 Système linéaire

Définition: Système linéaire

Système où l'effet (signal de sortie) sera toujours proportionnel à la cause (signal d'entrée).

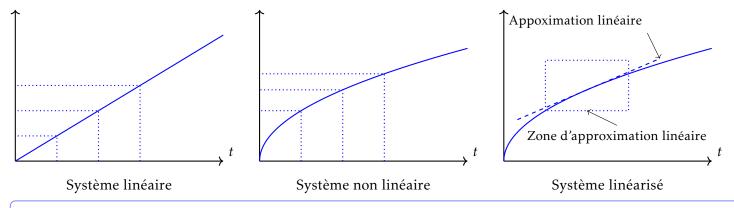
La relation de comportement d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs (cf passage dans le domaine symbolique de Laplace).

4.4.1 Principe de superposition

Le système étant linéaire, le principe de superposition peut être appliqué. Soient deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ donnés et F une fonction linéaire telle que $F[e_1(t)] = s_1(t)$ et $F[e_2(t)] = s_2(t)$ avec $s_i(t)$, sorties correspondantes. Alors par linéarité de F, \forall $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: $F[\lambda.e_1(t) + \mu.e_2(t)] = \lambda.F[e_1(t)] + \mu.F[e_2(t)] = \lambda.s_1(t) + \mu.s_2(t)$.

4.4.2 Traitement des non linéarités

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'application. Cependant dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine. Sous ces conditions, il est possible en général d'approcher le comportement par un modèle linéaire. On dit alors que le système est linéarisé.



4.4.3 Quelques non linéarités remarquables

Les systèmes réels présentent des non linéarités. Voici quelques cas très couramment observés :

Dénomination	Saturation	Seuil	Hystérésis
Schéma	S E	S E	$\xrightarrow{S} \xrightarrow{E}$
Exemples	Butée mécanique, aimantation, moteur électrique	Frottement	Jeux mécaniques, matériaux (élastomère)

5 Modélisation des systèmes linaires continus invariants

Afin de prévoir le comportement du système, il s'agit d'être capable de proposer une équation reliant l'entrée et la sortie.

Les systèmes industriels étant par nature complexes, il convient de décomposer le système en sous-systèmes plus facilement modélisable par un modèle de comportement ou un modèle de connaissance. Par assemblage des différents modèles, le comportement global peut être déduit.

5.1 Notion de modélisation

On distingue trois phases dans la modélisation :

- 1. Isoler le système étudié en positionnant la frontière
- 2. Effectuer une décomposition en sous-systèmes plus facilement exploitable.
- 3. Établir un modèle de connaissance ou modèle de comportement pour chaque sous-système.

Définition: Modèle de connaissance

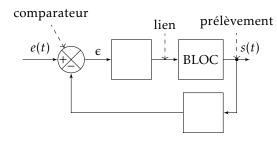
Modèle obtenu à partir de lois physiques. Cette modélisation est analytique et possède un sens physique fort.

Définition : Modèle de comportement

Modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une boîte noire. Le comportement réel est identifié au mieux à partir de résultats expérimentaux.

5.2 Représentation par schémas blocs

Un système sera représenté par un schéma bloc ou (schéma bloc fonctionnel), dans lequel on pourra distinguer :



• Les blocs :

Chaque sous-système est représenté par une boîte noire (bloc fonctionnel). Chaque bloc fonctionnel possède une seule entrée et une seule sortie (système monovariable).

A chaque bloc fonctionnel correspond une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n \cdot \frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t)$$

Suivant la représentation envisagée, on indiquera à l'intérieur du bloc pour :

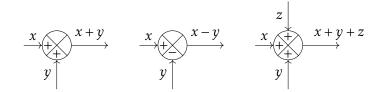
- un schéma bloc fonctionnel : le nom du composant ou l'opérateur mathématique associé à un composant particulier (exemple : l'opérateur \int pour un intégrateur).
- un schéma bloc: l'équation mathématique issue de la transformation de Laplace de l'équation différentielle ou appelée encore fonction de transfert.

• Les liens :

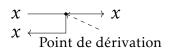
Ils représentent les grandeurs physiques véhiculées dans le système. Ils sont orientés.

• Sommateur ou comparateur :

Un sommateur se représente par un cercle, éventuellement barré d'une croix, auquel aboutissent plusieurs flèches affectées d'un signe "+" ou "-" suivant l'entrée considérée et d'où part un seul arc représentant la somme algébrique des entrées.



• Point de dérivation ou de jonction :



Un point de dérivation est un point où l'on prélève un signal à destination d'un ou plusieurs organes du système de commande. Le signal dans la branche de prélèvement est le même que celui qui existe dans la branche principale.

Fonction de transfert associée à un système

Le modèle mathématique (ou modèle dynamique) de comportement d'un système monovariable, linéaire, continu et invariant peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_{n}.\frac{d^{(n)}s(t)}{dt^{n}} + \dots + a_{1}.\frac{ds(t)}{dt} + a_{0}.s(t) = b_{m}.\frac{d^{(m)}e(t)}{dt^{m}} + \dots + b_{1}.\frac{de(t)}{dt} + b_{0}.e(t)$$

$$avec n \ge 1$$

Supposons que le système soit initialement au repos et que pour t négatif, l'entrée e(t) et ses dérivées successives soient toutes nulles. Cette remarque est également vraie pour la sortie s(t) (conditions initiales nulles de Heaviside).

Les transformées de Laplace permettent alors de travailler aisément avec ce type d'équation. En effet, nous verrons que pour un système respectant les conditions d'Heaviside:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{dt}^n}\right] = p^n.\mathrm{F}(p)$$

Ainsi l'équation différentielle précédente devient:

$$(a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot E(p)$$

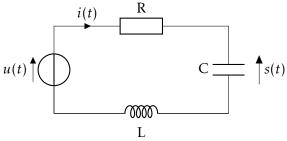
EXEMPLE: Circuit RLC

Définition: Fonction de transfert ou transmittance

On appelle fonction de transfert ou transmittance la fonction H(p) définie par le rapport fonction de sortie S(p) sur fonction d'entrée E(p) pris dans le domaine symbolique de Laplace.

$$S(p) \qquad \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot p^j \qquad b_m \cdot p^m + \ldots + b_1 \cdot p + b_0$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot p^i} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$



$$L.C.\frac{d^2s}{dt^2} + R.C.\frac{ds}{dt} + s(t) = u(t) \qquad \Rightarrow \qquad \left[L.C.p^2 + R.C.p + 1\right].S(p) = U(p)$$

La transmittance du système est une fraction rationnelle en p. H(p) représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée. Le schéma bloc dans le domaine de Laplace, définit le modèle mathématique du système :

$$\xrightarrow{E(p)} H(p) \xrightarrow{S(p)}$$

La relation entrée-sortie du système se met sous la

forme S(p) = H(p).E(p). En ordonnant les deux polynômes suivant les puissances croissantes de p, on obtient l'écriture suivante, encore appelée forme canonique de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + b'_1 \cdot p + \dots + b'_m \cdot p^m}{1 + a'_1 \cdot p + \dots + a'_n \cdot p^n}$$

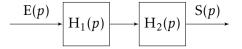
On définit :

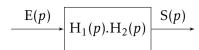
- les pôles : les racines du dénominateur
- les zéros : les racines du numérateur
- le gain: K
- la classe du système: si α > 0 alors p = 0 est un pôle du dénominateur. On dit que le système comporte α intégrateurs.

5.4 Opérations sur les schémas blocs

Deux schémas blocs sont équivalents si leurs fonctions de transfert globales sont égales.

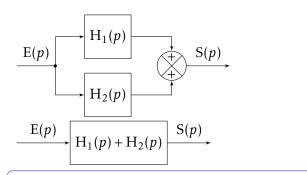
5.4.1 Transmittances en série

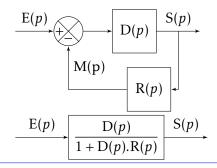




5.4.2 Transmittances en parallèle

5.4.3 Structure en boucle fermée



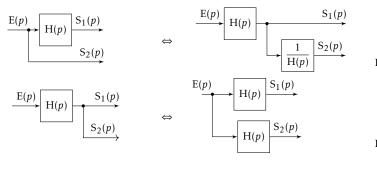


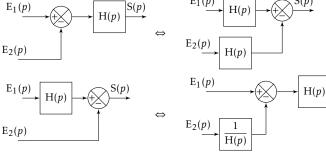
5.4.4 Déplacement des points de jonction et des sommateurs

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vu de les simplifier. La figure montre quelques schémas équivalents. La modification de la structure du schéma a pour inconvénient de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

5.4.4.1 Déplacement des points de jonction

5.4.4.2 Déplacement des sommateurs



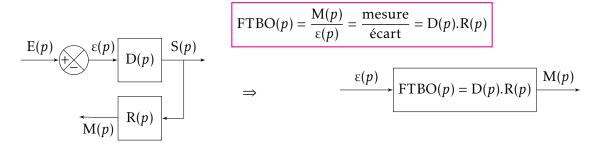


5.5 FTBO - FTBF

Le passage du système en boucle ouverte au système en boucle fermée est très important. On appelle FTBO la fonction de transfert en boucle ouverte et FTBF la fonction de transfert en boucle fermée.

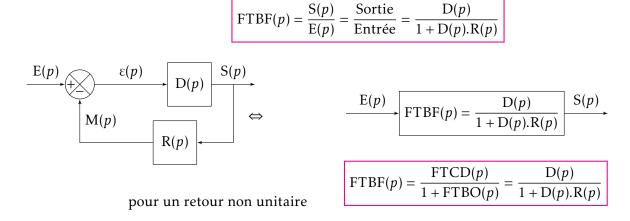
5.5.1 Système en boucle ouverte

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) est le rapport entre la mesure M(p) et l'écart $\varepsilon(p)$:

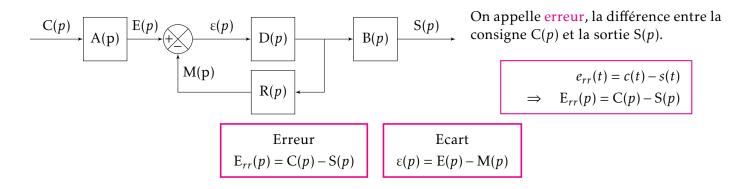


5.5.2 Système en boucle fermée

La Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) est le rapport entre la sortie S(p) et l'entrée E(p):

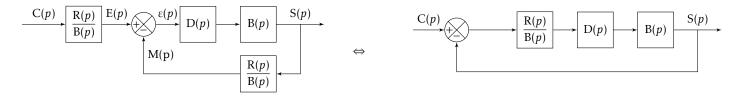


5.6 Dénominations complémentaires



FTBO	FTBF	FTCD
FTBO(p) = $\frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$ = $D(p).R(p)$	$FTBF(p) = \frac{S(p)}{C(p)}$ $= \frac{A(p).D(p).B(p)}{1 + D(p).R(p)}$	FTCD(p) = A(p).D(p).B(p)
Fonction de Transfert en Boucle Ouverte	Fonction de Transfert en Boucle Fermée	Fonction de Transfert en Chaîne Directe

Remarque: Le système bouclé peut être transformé en un système à retour unitaire si A(p) = R(p)/B(p):



6 Modèles multi-physique

6.1 Puissance - grandeurs flux et grandeurs potentielles

La puissance P fournie, transmise ou reçue par un système est liée à sa variation d'énergie E fournie, transmise ou reçue par unité de temps t: $P = \frac{dE}{dt}$.

Si la puissance d'un système s'exprime, c'est que des grandeurs physiques qui lui sont attachées influent sur d'autres grandeurs physiques. Les premières sont des grandeurs d'effort (ou potentielles notée e) et les secondes, des grandeurs flux (ou cinétiques notées f). La puissance P est le produit d'une grandeur d'effort e et d'une grandeur flux $f: P = e \times f$.

L'influences des grandeurs d'effort sur les grandeurs flux est due à la causalité des processus : pas de cause implique pas d'effet. Ainsi, par exemple, lorsqu'on applique le PFD, ce sont les efforts extérieurs qui génèrent l'accélération et non l'inverse.

6.2 Dualité - moteur/récepteur

Si un système moteur fournit de l'énergie à un système récepteur, l'un impose une grandeur effort et l'autre une grandeur flux. Un système ne peut imposer en même temps la grandeur flux et la grandeur effort pour un même transfert d'énergie. Ainsi, si un système moteur impose la vitesse de déplacement, la charge réceptrice imposera l'effort correspondant. On dresse alors le tableau des dualités effort/flux pour différents types de puissance :

Puissance	Effort e	Flux f
Mécanique de translation	Force F (en N)	Vitesse v (en m/s)
Mécanique de rotation	Couple C (en N.m)	Vitesse angulaire ω (en rad/s)
Électrique	Tension U (en V)	Intensité i (en A)
Hydraulique	Pression P (en Pa)	Débit q (en m ³ /s)
Thermique	Température T (en K)	Flux de chaleur φ (en W/K)

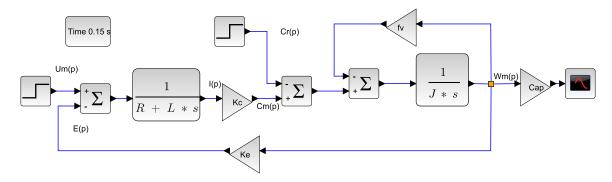
Remarque: pour parler des puissances moyennes, on utilise parfois le CV (cheval vapeur) tel qu'un 1 CV = 730 W. Pour les plus grosses puissances, on utilise le kW, le MW et le GW.

6.3 Modèle causal

Les systèmes physiques sont modélisables par des relations mathématiques liées à des équations différentielles linéaires ou non à coefficients constants ou non, d'un ordre de dérivation naturellement plus élevé sur les sorties que sur les entrées.

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants sont traitées en physique via la recherche de la solution du système homogène ou du système en régime forcé (passage aux grandeurs complexes). Elles sont traitées en SI grâce au passage dans le domaine de Laplace. Les équations différentielles linéaires ou non à coefficients constants ou non sont traitées d'un point de vu numérique avec la méthode d'Euler (et ses dérivées) en ramenant le problème différentiel à un problème de Cauchy.

Le traitement des équations différentielles linéaires à coefficients constants dans le domaine symbolique de Laplace peut se faire à l'aide de logiciels comme Matlab/Simulink ou Scilab/Xcos. Le système est alors représenté sous forme de schéma bloc :



Les grandeurs sont soit de type effort, soit de type flux. Les blocs sont des opérateurs mathématiques (gain, somme, intégrateur, dérivateur, ...).

6.4 Modèle acausal

La représentation d'un système par un modèle causal est purement mathématique et on perd l'architecture matérielle.

Un autre représentation plus récente est le modèle acausal dans lequel les blocs sont les composants du système. Les liens entre les blocs traduisent les grandeurs flux et/ou effort qui transitent sans préciser l'orientation. Les équations différentielles sont résolues à partir de solveurs (Matlab/Simulink/Simscape ou Scilab/Xcos/SIMM).

