CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-4 Prévoir les réponses fréquentielles de systèmes élémentaires

Diagramme de Gain :

- K : facile, trait horizontal à $20.\log(K)$.
- p^α : pente de $\alpha.20$ dB/dec qui passe par le point $(\omega = 1, G_{dB} = 0)$.
- $(1+\tau.p)^\alpha$: trait horizontal à 0 dB jusqu'à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, puis pente de $\alpha.20$ dB/dec.
- $(1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2})^\alpha$:trait horizontal à 0 dB jusqu'à ω_0, puis pente de $\alpha.40$ dB/dec.

Diagramme de Phase :

- K : trait horizontal à 0°.
- p^α : trait horizontal à $\alpha.\frac{\pi}{2}$ en radian ou $\alpha.90°$.
- $(1+\tau.p)^\alpha$: trait horizontal à 0° jusqu'à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, puis trait horizontal à $\alpha.\frac{\pi}{2}$ en radian ou $\alpha.90°$.
- $(1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2})^\alpha$: trait horizontal à 0° jusqu'à ω_0, puis trait horizontal à $\alpha.\pi$ en radian ou $\alpha.180°$.

Objectifs — MODELISER SIMULER RESOUDRE EXPERIMENTER

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable de :

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier les paramètres d'un modèle.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
  - Compléter un modèle multiphysique.
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
  - Simplifier un modèle.
- **B3** Valider un modèle
  - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Déterminer la réponse fréquentielle.
- **D2** Proposer et justifier un protocole expérimental
  - Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.
  - Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.
  - Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.

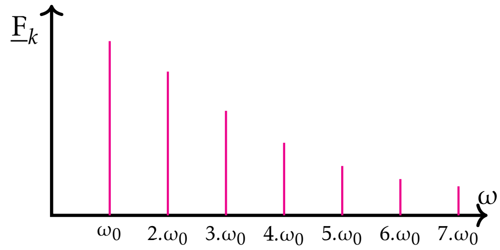
Table des matières

1 Intérêt de l'analyse fréquentielle

1.1 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

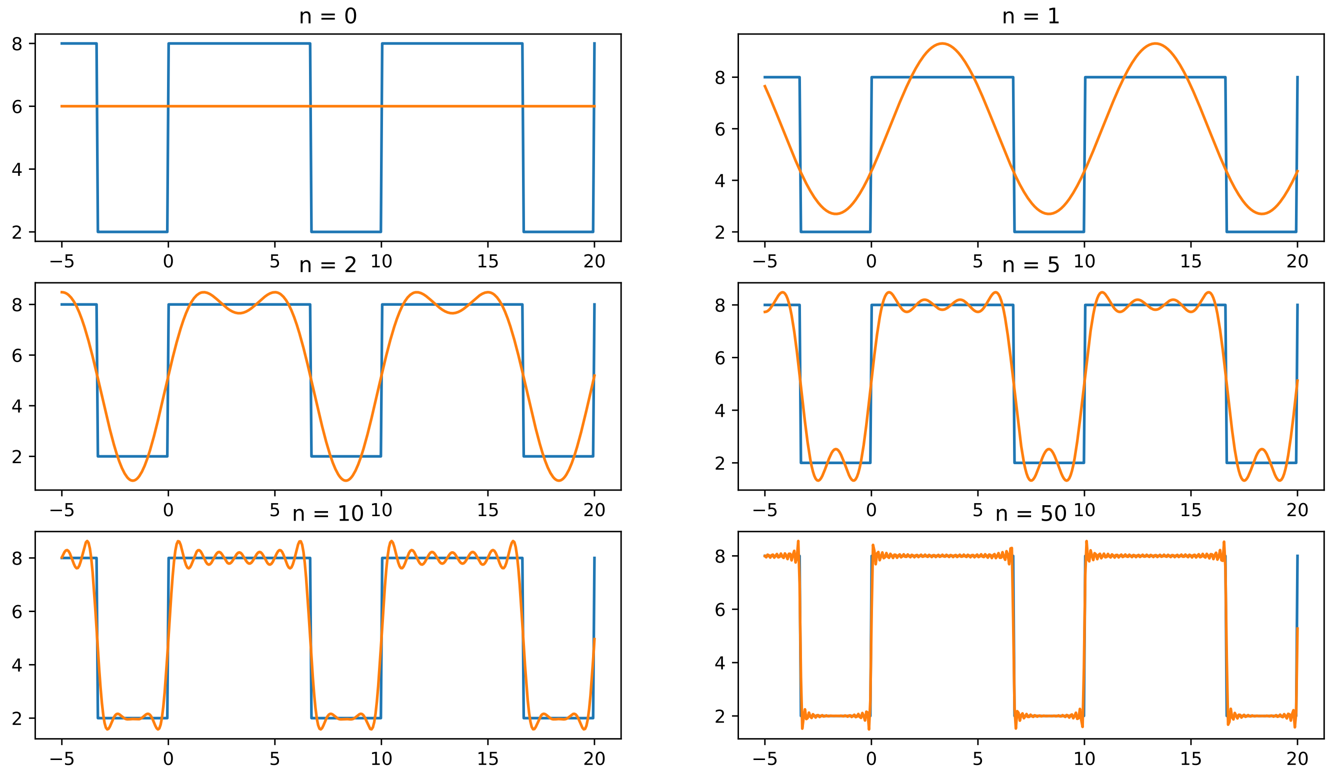
Si $f(t)$ est un signal périodique de période T_0 alors:

- $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k.\cos(k.\omega_0.t) + b_k.\sin(k.\omega_0.t))$
- $f(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \underline{F}_k.e^{j.k.\omega_0.t}$



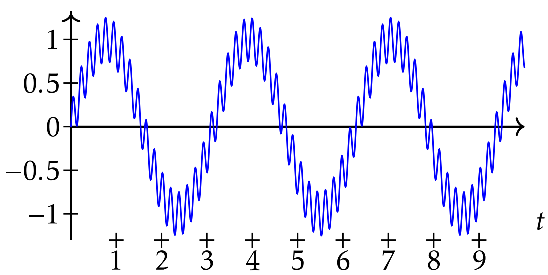
Exemple de décomposition d'un signal créneau en série de Fourier.

La série est tronquée pour différentes valeurs de $n \in \{0, 1, 2, 5, 10, 50\}$.



1.2 Transformée de Fourier d'un signal quelconque

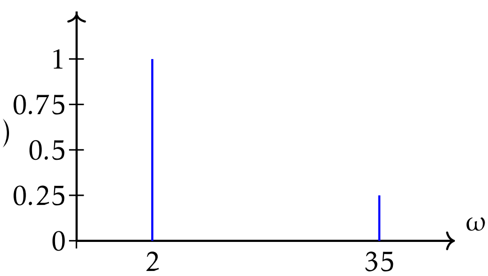
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega).e^{j.\omega.t}d\omega \qquad \underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-j.\omega.t}dt$$



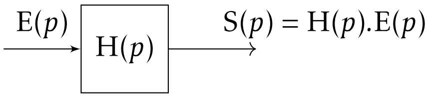
Par transformée de Fourier

$\Rightarrow$

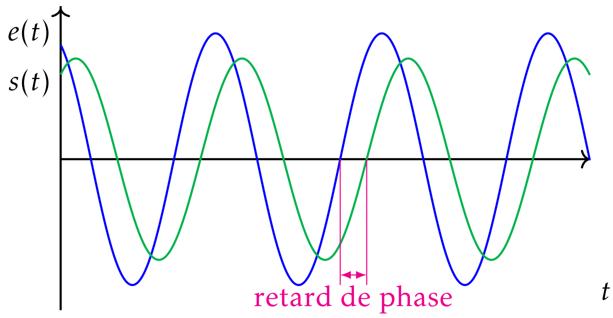
$f(t) = \sin(2.t) + 0.25.\sin(35.t)$



1.3 Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale



L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = \mathrm{E}_0.\cos(\omega.t+\Phi).u(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{E}_0.e^{j.(\omega.t+\Phi)}\right)$



En régime permanent : $s(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{E}_0.\mathrm{H}(j.\omega).e^{j.(\omega.t+\Phi)}\right) = \mathrm{E}_0.|\mathrm{H}(j.\omega)|.\cos\left(\omega.t+\Phi+\arg\left(\mathrm{H}(j.\omega)\right)\right)$

La réponse d'un système linéaire continu invariant à une entrée sinusoïdale est une réponse sinusoïdale de même fréquence (même période et même pulsation).

Le signal est déphasé de $\arg\left(\mathrm{H}(j.\omega)\right)$ et l'amplitude vaut $\mathrm{E}_0.|\mathrm{H}(j.\omega)|$.

2 Représentation du comportement harmonique

2.1 Ordres de grandeurs et modes de représentation

La fonction de transfert dépend des valeurs de ω. Pour la caractériser sur une large plage fréquentielle en donnant autant d'importance aux basses fréquences qu'aux hautes fréquences, on utilise une échelle logarithmique. De même, les échelles de variation de $|\mathrm{H}(j.\omega)|$ sont si étendues qu'il est préférable de faire figurer les logarithmes de ces quantités. On définit alors par:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{G}_{dB}(\omega) & = & 20.\log|\mathrm{H}(j.\omega)| & \text{le gain en décibels (dB)} \\ \phi(\omega) & = & \arg\left(\mathrm{H}(j.\omega)\right) & \text{la phase en degré ou en radian} \end{array}$$

Afin de représenter $\mathrm{H}(j.\omega)$, on utilise principalement les représentations de BODE, de NYQUIST et de BLACK.

2.2 Diagrammes de BODE

Au nombre de deux, ces diagrammes représentent les variations de gain en décibel et de phase (radian ou degré) en fonction de la pulsation en radian par seconde tracée sur une échelle logarithmique.

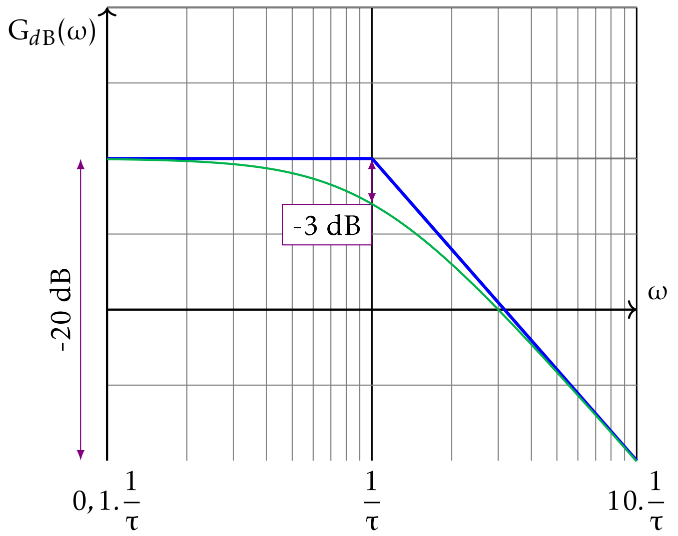
On se contente dans la majorité des cas d'un tracé asymptotique.

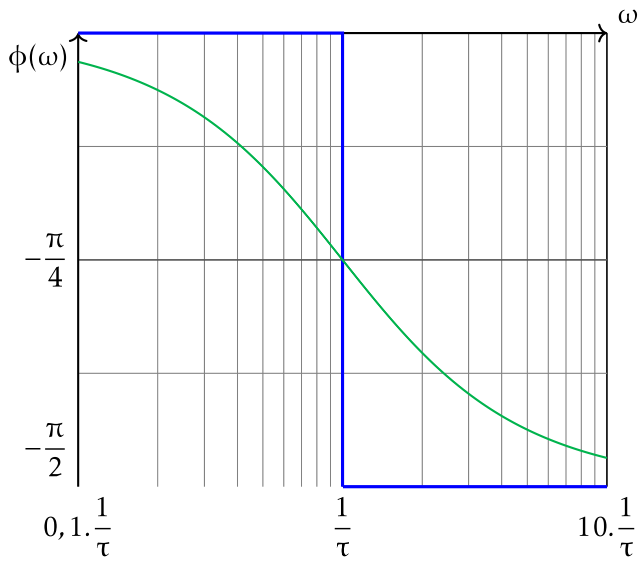
2.3 Système du 1er ordre

La transmittance (ou fonction de transfert) s'écrit sous la forme : $\mathrm{H}(p) = \dfrac{\mathrm{K}}{1+\tau.p} \Rightarrow \mathrm{H}(j.\omega) = \dfrac{\mathrm{K}}{1+\tau.j.\omega}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\mathrm{H}(j\omega)| & = & \dfrac{|\mathrm{K}|}{|1+\tau.j.\omega|} = \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) & = & \arg\left(\mathrm{H}(j.\omega)\right) = \arg(\mathrm{K}) - \arg(1+\tau.j.\omega) \\ & = & -\arctan(\tau.\omega) \\ & & \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ puisque } \tau.\omega > 0 \end{array}\right.$$

	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\omega = \frac{1}{\tau}$	$\omega \gg \frac{1}{\tau}$
$G_{dB}(\omega) \approx$	$20.\log(K)$	$20.\log(K) - 3$	$20.\log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20.\log(\omega)$
$\phi(\omega) \approx$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

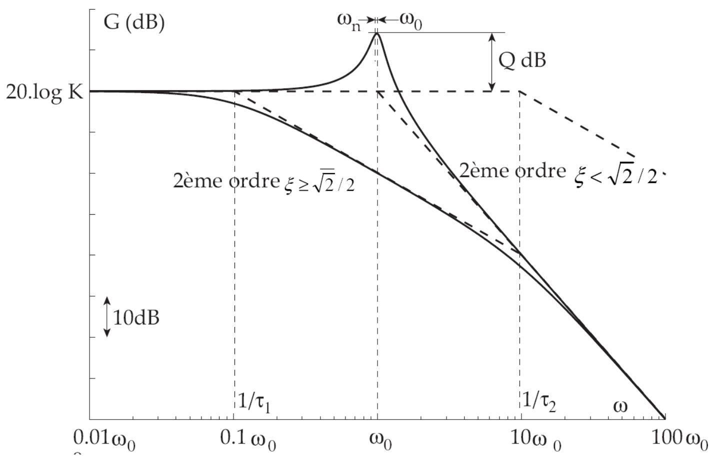




2.4 Système du 2nd ordre

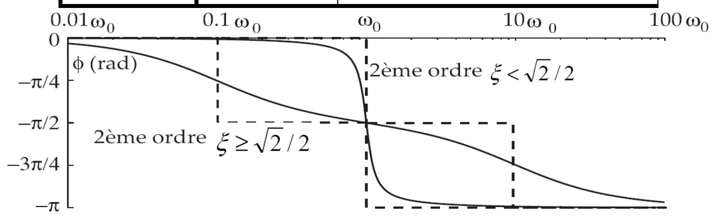
La transmittance se met sous la forme : $H(p) = \dfrac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2} \Rightarrow H(j.\omega) = \dfrac{K.\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega}$.

$$\begin{cases} |H(j.\omega)| = \dfrac{\left|K.\omega_0^2\right|}{\left|(\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega\right|} = \dfrac{K.\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4.\xi^2.\omega_0^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) = \arg(K.\omega_0^2) - \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega\right) = -\arctan\left(\dfrac{2.\xi.\omega_0.\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in [-\pi, 0] \end{cases}$$



Gain en décibels $G_B(\omega)$:

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$G_{dB}(\omega) \approx$	$20.\log(K)$	$20.\log\left(K.\omega_0^2\right) - 40.\log(\omega)$
$\phi(\omega) \approx$	0	$-\pi$



Phase $\phi_\omega(\omega)$:

Si $0 \leq \xi \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ le diagramme de Bode présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\xi^2}$. En effet, puisque la fonction racine crée une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, rechercher un extremum du dénominateur de $|H(j.\omega)|$ revient à chercher la minimum de la fonction $f(\omega)$ définie par:

$$f(\omega) = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4.\xi^2.\omega_0^2.\omega^2 \quad \Rightarrow \quad f'(\omega) = (-2.\omega).2.(\omega_0^2-\omega^2) + 4.\xi^2.\omega_0^2.2.\omega$$

$$f'(\omega_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\omega_0^2-\omega_r^2) + 2.\xi^2.\omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{On a alors:}$$

$$\begin{aligned}
G_{dB}(\omega_r) &= 20.\log\left(\frac{K.\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_r^2)^2+4.\xi^2.\omega_0^2.\omega_r^2}}\right) = 20.\log\left(\frac{K}{\sqrt{(1-(1-2.\xi^2))^2+4.\xi^2.(1-2.\xi^2)}}\right)\\
&= 20.\log\left(\frac{K}{\sqrt{4.\xi^2+4.\xi^2-8.\xi^4}}\right) = 20.\log(K) + \underbrace{20.\log\left(\frac{1}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}\right)}_{\text{coefficient de surtension}}
\end{aligned}$$

2.5 Représentation d'un système quelconque

Afin de représenter un système, il est intéressant de le décomposer en fonction élémentaire du premier ordre, deuxième ordre et en intégrateur ou dérivateur.

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{p^\alpha}.\frac{\prod_i(1+\tau_i.p).\prod_m\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.p+\frac{p^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k(1+\tau_k.p).\prod_n\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.p+\frac{p^2}{\omega_{0n}^2}\right)}}$$

- Le module de la fonction de transfert en décibels est égal à la somme des modules de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
G_B(\omega) &= 20.\log|H(j.\omega)| = 20.\log\left|\frac{K}{(j.\omega)^\alpha}.\frac{\prod_i(1+\tau_i.(j.\omega)).\prod_m\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k(1+\tau_k.(j.\omega)).\prod_n\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)}\right|\\
&= 20.\log\left|\frac{K}{(j.\omega)^\alpha}\right| + \sum_i 20.\log|1+\tau_i.(j.\omega)| + \sum_m 20.\log\left|1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right|\dots\\
&\dots - \sum_k 20.\log|1+\tau_k.(j.\omega)| - \sum_n 20.\log\left|1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right|
\end{aligned}$$

- L'argument de la fonction de transfert est égal à la somme des arguments de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
\phi_\omega(\omega) &= \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^\alpha}\frac{\prod_i(1+\tau_i.(j.\omega)).\prod_m\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k(1+\tau_k.(j.\omega)).\prod_n\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)}\right)\\
&= \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^\alpha}\right) + \sum_i \arg(1+\tau_i.(j.\omega)) + \sum_m \arg\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)\dots\\
&\dots - \sum_k \arg(1+\tau_k.(j.\omega)) - \sum_n \arg\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega)+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)
\end{aligned}$$

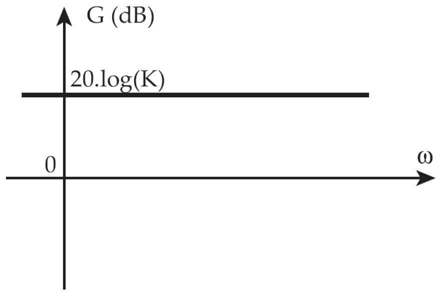
2.6 Représentation de Bode asymptotique des fonctions élémentaires

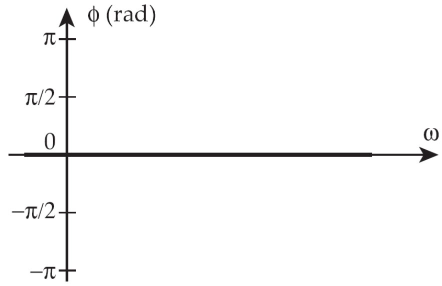
On pose : $X = \log(\omega)$

- **Action proportionnelle**

$\boxed{H(p) = K}$

$$\begin{aligned}
G_{dB}(H(j.\omega)) &= 20.\log(|K|) \\
K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow\quad &= 20.\log(K) \\
\phi(H(j.\omega)) &= \arg(K) \\
K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow\quad &= \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0
\end{aligned}$$



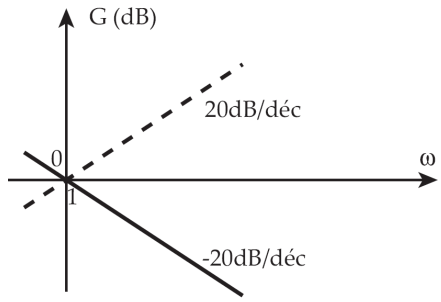


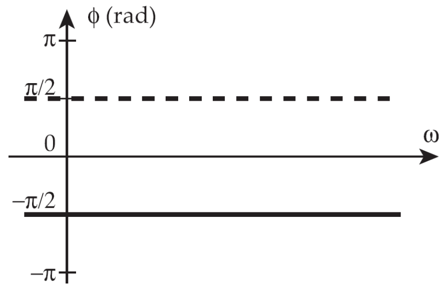
- **Action intégrale et action dérivée**

$$H(p) = p^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|(j.\omega)^{\alpha}|) = \alpha.20.\log(|j.\omega|) = \alpha.20.\log(\omega) = \alpha.20.X \\ \phi(H(j.\omega)) = \arg((j.\omega)^{\alpha}) = \alpha.\arg(0 + j.\omega) \overset{\omega \geq 0}{=} \alpha.\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Action intégrale $\boxed{H(p) = \dfrac{1}{p}}$

Action dérivée $\boxed{H(p) = p}$





- **Systèmes du premier ordre généralisé**

$$H(p) = (1 + \tau.p)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|(1 + \tau.j.\omega)^{\alpha}|) = \alpha.20.\log(|1 + j.\tau.\omega|) = \alpha.20.\log\left(\sqrt{1 + (\tau.\omega)^2}\right) \\ \phi(H(j.\omega)) = \arg((1 + \tau.j.\omega)^{\alpha}) = \alpha.\arg(1 + j.\tau.\omega) = \alpha.\arctan(\tau.\omega) \end{cases}$$

	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\omega = \frac{1}{\tau}$	$\omega \gg \frac{1}{\tau}$
$G_{dB}(H(j.\omega)) \approx$	$\alpha.20.\log(1) = 0$	$\alpha.20.\log\left(\sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau}}\right) = 3.\alpha$	$\alpha.(20.\log(\tau) + 20.\log(\omega)) = \alpha.(20.\log(\tau) + 20.X)$
	$\alpha.20.\log(1) = \alpha.(20.\log(\tau) + 20.\log(\omega))$ $0 = 20.\log(\tau.\omega)$ Intersection des asymptotes de gain au point $\left(\omega = \frac{1}{\tau}, G_{dB} = 0\right)$		
$\phi(H(j.\omega)) \approx$	$\alpha.\arctan(0) = 0$	$\alpha.\arctan\left(\frac{\tau}{\tau}\right) = \frac{\pi}{4}.\alpha$	$\alpha.\arctan(+\infty) = \alpha.\frac{\pi}{2}$

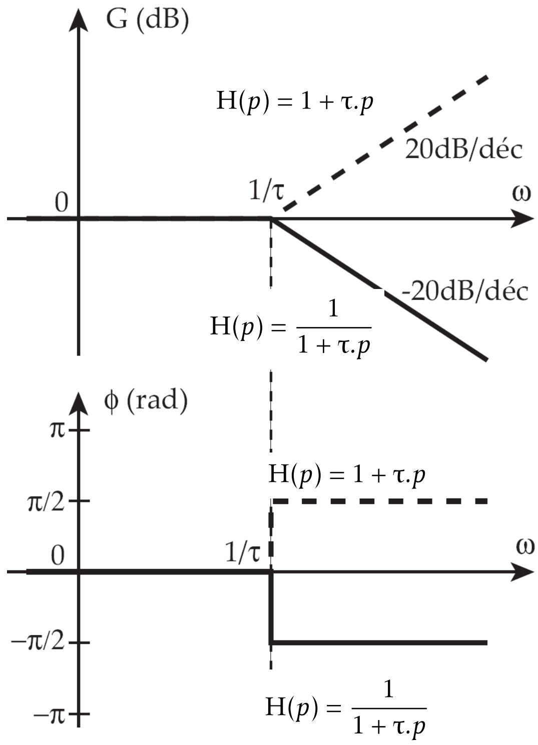
- **Systèmes du second ordre généralisé**

$$H(p) = \left(1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} G_{dB}\left(H(j.\omega)\right) & = & 20.\log\left(\left|\left(1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_0^2}\right)^{\alpha}\right|\right) = \alpha.20.\log\left(\left|1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.j.\omega-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|\right) \\ & = & \alpha.20.\log\left(\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4.\xi^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \\ \phi\left(H(j.\omega)\right) & = & \arg\left(\left(1+\frac{2.\xi}{\omega_0}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_0^2}\right)^{\alpha}\right) = \alpha.\arctan\left(\frac{2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \end{array}\right.$$

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$G_{dB}\left(H(j.\omega)\right) \approx$	$\alpha.20.\log(1) = 0$	$\alpha.20.\log(2.\xi)$	$\alpha.20.\log\left(\sqrt{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}\right) = \alpha.40.\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\alpha.40.\log(\omega_0)+\alpha.40.X$
	$\alpha.20.\log(1) = \alpha.40.\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $0 = \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ Intersection des asymptotes de gain au point $(\omega = \omega_0, G_{dB} = 0)$		
$\phi\left(H(j.\omega)\right) \approx$	$\alpha.\arctan(0) = 0$	$\alpha.\arctan(\pm\infty) = \frac{\pi}{2}.\alpha$	$\alpha.\arctan(0^-) = \alpha.\pi$

- **Systèmes du premier ordre**



- **Systèmes du second ordre**