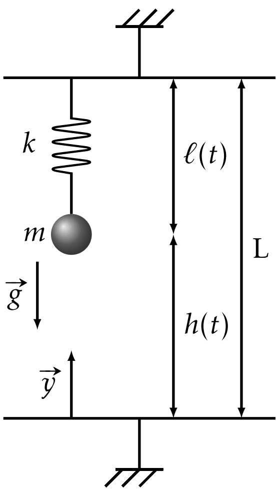
CI-0 Introduction : Mécanique & électricité

1 Mécanique

1.1 Système masse ressort



Pour commencer, partons d'un système masse-ressort. La masse vaut m et le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide ℓ_0.

Isolons la masse. Elle est soumise à:

- l'action de la gravitation : $\vec{F}_g = -m.g.\vec{y}$
- l'action du ressort : $\vec{F}_r = k.(\ell(t) - \ell_0).\vec{y}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le repère galiléen lié au bâti:

$$\sum_i \vec{F}_i = m.\vec{a}(t) = m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}.\vec{y} \quad \Rightarrow \quad m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}.\vec{y} = k.(\ell(t) - \ell_0).\vec{y} - m.g.\vec{y}$$

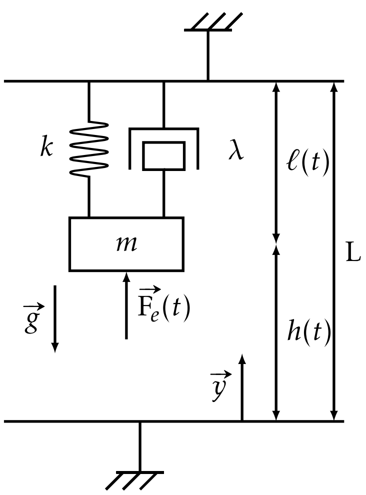
$$\Rightarrow \quad m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = k.(\mathrm{L} - h(t) - \ell_0) - m.g$$

L'équilibre de ce système se traduit par : $k.(\mathrm{L} - h_{equi} - \ell_0) - m.g = 0$ soit $h_{equi} = \mathrm{L} - \ell_0 - \dfrac{m.g}{k}$.

Posons alors $y(t) = h(t) - h_{equi}$. Cette fonction traduit la différence d'altitude entre la position de la masse m à l'instant t et sa position au repos. L'équation différentielle devient:

$$m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = k.(\mathrm{L} - h(t) - \ell_0) - m.g \quad \Rightarrow \quad m.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + k.y(t) = 0$$

1.2 Système masse-ressort-amortissement visqueux-régime forcé



Isolons la masse. Elle est soumise à:

- l'action de la gravitation : $\vec{F}_g = -m.g.\vec{y}$
- l'action du ressort : $\vec{F}_r = k.(\ell(t) - \ell_0).\vec{y}$
- l'action du frottement visqueux : $\vec{F}_f = -\lambda.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.\vec{y}$
- l'action d'une force d'excitation : $\vec{F}_e = \mathrm{F}(t).\vec{y}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le repère galiléen lié au bâti:

$$\sum_i \vec{F}_i = m.\vec{a}(t) = m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}.\vec{y} \quad \Rightarrow \quad m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}.\vec{y} = k.(\ell(t) - \ell_0).\vec{y} - m.g.\vec{y} - \lambda.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.\vec{y} + \mathrm{F}(t).\vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad m.\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = k.(\mathrm{L} - h(t) - \ell_0) - m.g - \lambda.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \mathrm{F}(t)$$

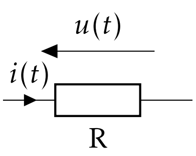
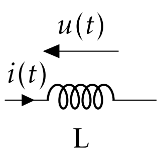
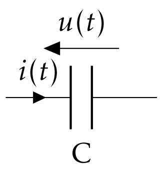
A l'équilibre, sans excitation ($F_e(t_{equi}) = 0$), la position de la masse est fixe. Ainsi $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_{equi}} = 0$ et $\left.\frac{d^2h}{dt^2}\right|_{t=t_{equi}} = 0$.
L'équilibre de ce système se traduit par : $k.(L - h_{equi} - \ell_0) - m.g = 0$ soit $h_{equi} = L - \ell_0 - \frac{m.g}{k}$. La position d'équilibre est donc la même. En reprenant les notations précédentes, nous obtenons donc :

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda.\frac{dy}{dt} + k.y(t) = F(t)$$

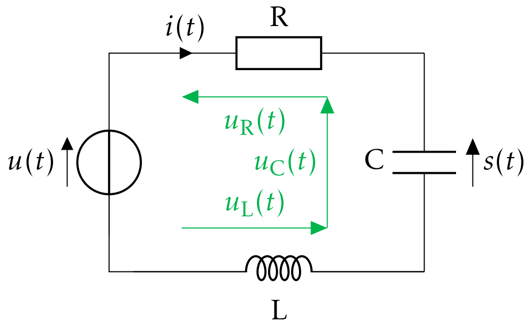
2 Électricité

2.1 Dipôles R L C

Voici les relations liant la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ aux bornes des dipôles R, L et C en convention récepteur :

Dipôle	Résistance R	Inductance L	Capacité C
Symbole			
Équation	$u(t) = R.i(t)$	$u(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C.\frac{du(t)}{dt}$

2.2 Circuit R-L-C série



$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u(t) &= u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) \\ &= R.i(t) + s(t) + L.\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

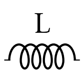
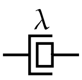
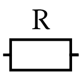
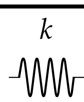
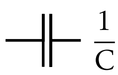
Puisque $i(t) = C.\frac{ds}{dt}$ alors $u(t) = R.C.\frac{ds}{dt} + s(t) + L.C.\frac{d^2s}{dt^2}$ d'où $L.\frac{d^2s}{dt^2} + R.\frac{ds}{dt} + \frac{1}{C}.s(t) = \frac{1}{C}.u(t)$

3 Analogie mécanique/électricité

Le comportement des circuits électriques avec des dipôles R, L, C et celui des systèmes mécaniques masses, ressorts et frottements visqueux sont représentés par des équations différentielles semblables.

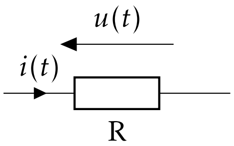
Il est possible d'établir une analogie entre un circuit électrique RLC en série et un système mécanique masse/-ressort amorti en assimilant :

- une masse à une inductance
- un frottement visqueux à une résistance linéaire
- la raideur d'un ressort à l'inverse d'une capacité.

Termes	Inertie	Dissipatif	Raideur
Symboles	 	 	 
Noms	masse/inductance	frottement visqueux/résistance	raideur/inverse de la capacité

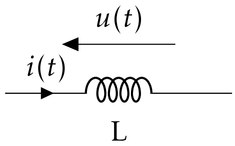
4 Relations de comportement des composants « classiques »

4.1 Systèmes électriques et électromécaniques



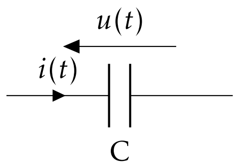
$u(t) = \mathrm{R}.i(t)$

Résistance R (Ω)



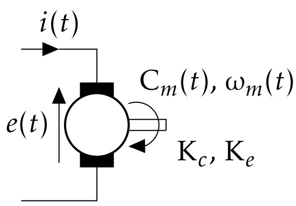
$u(t) = \mathrm{L}.\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{dt}}$

Inductance L (H)



$i(t) = \mathrm{C}.\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{dt}}$

Capacité C (F)

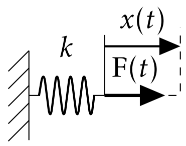


$$\begin{aligned} \mathrm{C}_m(t) &= \mathrm{K}_c.i(t) \\ e(t) &= \mathrm{K}_e.\omega_m(t) \end{aligned}$$

Constante de couple : K_c ($\mathrm{N.m.A^{-1}}$)
Constante de f.c.e.m : K_e ($\mathrm{V.rad^{-1}.s}$)

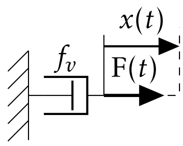
avec $i(t)$ l'intensité (A), $u(t)$ la tension (V), $e(t)$ la force contre électromotrice f.c.e.m (V), $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation ($\mathrm{rad.s^{-1}}$) et le $\mathrm{C}_m(t)$ couple moteur (N.m).

4.2 Systèmes mécaniques



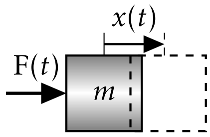
$\mathrm{F}(t) = k.(x(t) - \ell_0)$

Raideur k ($\mathrm{N.m^{-1}}$)



$\mathrm{F}(t) = f_v.\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{dt}}$

Coefficient d'amortissement visqueux f_v ($\mathrm{N.m.^{-1}.s}$)



$\mathrm{F}(t) = m.\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{dt}^2}$

Masse m (kg)

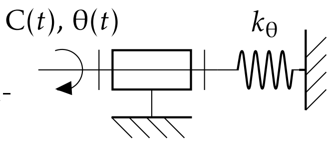
avec

$x(t)$	le déplacement (m)
$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{dt}}$	la vitesse ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
$\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{dt}^2}$	l'accélération ($\mathrm{m.s^{-2}}$)
$\mathrm{F}(t)$	la force (N).

---

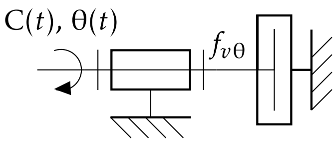
avec :

$\theta(t)$	l'angle (rad)
$\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{dt}}$	la vitesse angulaire ($\mathrm{rad.s^{-1}}$)
$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{dt}^2}$	l'accélération angulaire ($\mathrm{rad.s^{-2}}$)
$\mathrm{C}(t)$	le couple (N.m)



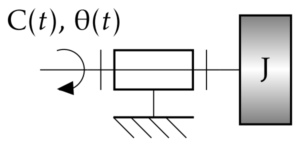
$\mathrm{C}(t) = k_\theta.\theta(t)$

Raideur angulaire k_θ ($\mathrm{N.m.rad^{-1}}$)



$\mathrm{C}(t) = f_{v\theta}.\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{dt}}$

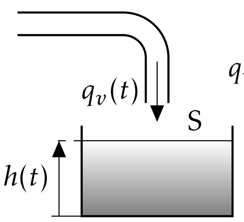
Coefficient d'amortissement visqueux $f_{v\theta}$ ($\mathrm{N.m.rad^{-1}.s}$)



$\mathrm{C}(t) = \mathrm{J}.\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{dt}^2}$

Moment d'inertie J ($\mathrm{kg.m^2}$)

4.3 Systèmes hydrauliques



$q_v(t) = \mathrm{S}.\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{dt}}$

Surface S ($\mathrm{m^2}$)
Raideur hydraulique R_h ($\mathrm{Pa.m^{-3}.s}$)

$h(t)$ hauteur d'eau (m)
$q_v(t)$ débit volumique ($\mathrm{m^3}$)
$p_{am}(t)$ pression amont (Pa)
$p_{av}(t)$ pression aval (Pa)

$\Delta p(t) = p_{am}(t) - p_{av}(t) = \mathrm{R}_h.q_v(t)$