

# CI-3 PRÉVOIR ET VÉRIFIER LES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES.

## CI-3-4 DÉTERMINER LES LOIS ENTRÉES/SORTIES DE TRANSMETTEURS DE PUISSANCE

### Objectifs

### MODELISER CALCULER RESOUDRE

A la fin de la séquence, l'élève devra être capable de :

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Simplifier un modèle de mécanisme.
- **C1** Proposer une démarche de résolution
  - Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

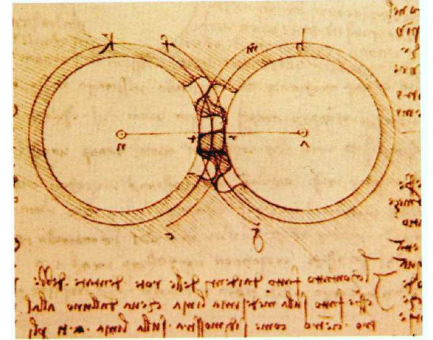
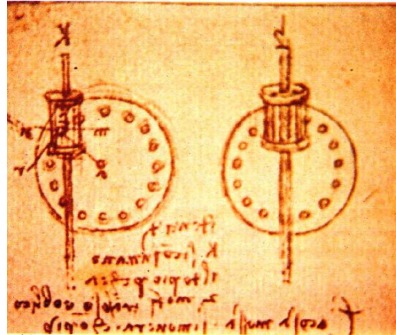
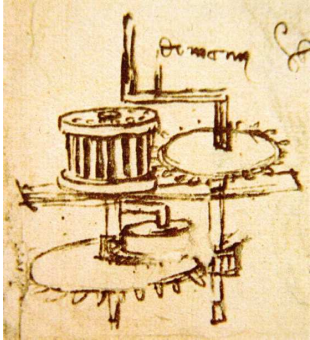
### Table des matières

<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
1.1 Historique	2
1.2 Roues de friction	2
1.3 Définitions	2
1.4 Principe de l'engrènement	2
<b>2 Engrenages cylindriques</b>	<b>3</b>
2.1 Transformation de mouvement	3
2.2 Engrenages cylindriques à denture droite	4
2.3 Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale	4
<b>3 Engrenages coniques</b>	<b>6</b>
3.1 Principe de fonctionnement	6
3.2 Dimensions normalisées	7
3.3 Efforts sur la denture	7
<b>4 Engrenages à roue et vis sans fin</b>	<b>7</b>
4.1 Principe de fonctionnement	7
4.2 Avantages - Inconvénients	7
4.3 Efforts	8
4.4 Irréversibilité du système roue et vis	8
<b>5 Schématisation des engrenages</b>	<b>8</b>
<b>6 Les trains d'engrenages</b>	<b>9</b>
6.1 Les trains simples	9
6.2 Les trains épicycloïdaux	9
<b>7 Système poulie/courroie</b>	<b>12</b>
7.1 Principe de fonctionnement	12
7.2 Avantages/inconvénients	12

# 1 Introduction

## 1.1 Historique

L'entraînement positif entre deux axes a été l'objet de nombreuses évolutions au cours des âges, comme en témoignent des dessins de Léonard de Vinci (fin du XV<sup>ème</sup>).

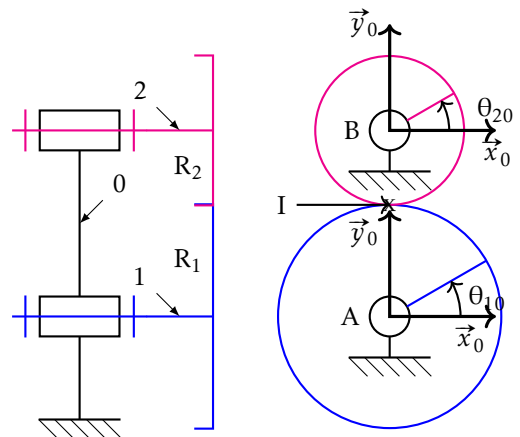


## 1.2 Roues de friction

On appelle transmission par roues de friction un mécanisme constitué de deux roues roulant sans glisser l'une sur l'autre. Pour réaliser, la condition de roulement sans glissement, il faut appliquer une importante force de contact entre les deux pièces. Pour palier ce problème, on utilise un entraînement par obstacle.

La condition de non glissement (d'adhérence) en I entre les solides 1 et 2, se traduit par  $\vec{V}_{(1,2/1)} = \vec{0}$ , ce qui conduit à :

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2}$$



## 1.3 Définitions

### DÉFINITION : Engrenage

Ensemble de deux roues munies de dents assurant un entraînement dit positif (sans glissement possible) entre deux axes peu éloignés l'un de l'autre.

### DÉFINITION : Pignon

Plus petite des roues dentées d'un engrenage

### DÉFINITION : engrenage non gauche

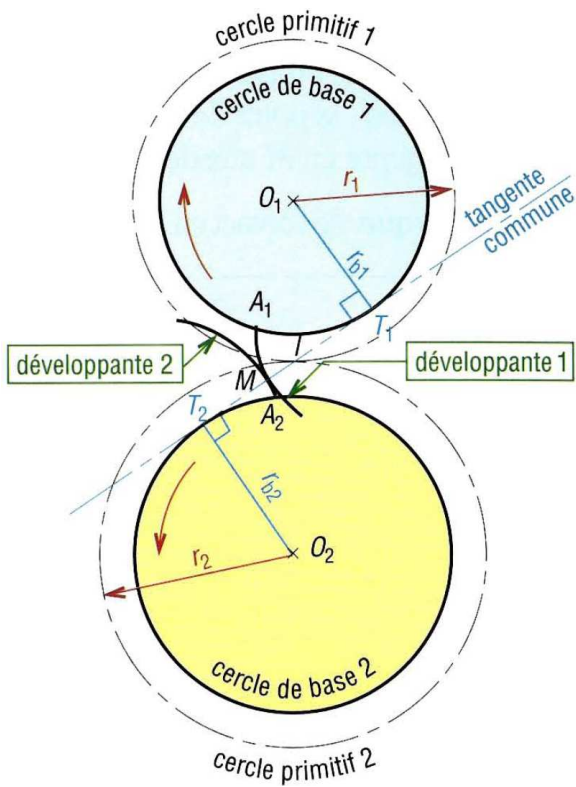
Mécanisme constitué de 2 roues dentées cinématiquement équivalent à deux roues de friction.

### DÉFINITION : engrenage gauche

Tout mécanisme constitué de deux roues dentées engrenant l'une avec l'autre sans qu'il y ait d'équivalent cinématique dans les roues de friction.

## 1.4 Principe de l'engrènement

Soient deux cercles de base,  $C_1$  et  $C_2$ . Si une droite  $\Delta$  roule sans glisser en  $T_1$  avec  $C_1$  et en  $T_2$  avec  $C_2$  alors les vitesses de rotations des deux cercles de bases par rapport au repère fixe sont **proportionnelles**.



Le point I de la droite  $\Delta$  appartenant à la droite passant par les centres de rotation des cercles de base ( $O_1$  et  $O_2$ ) est le point pour lequel la vitesse de glissement est nulle :  $\vec{V}_{(I,C_2/C_1)}$ . L'étude revient alors à celle de deux roues de frictions de rayon  $O_1I$  et  $O_2I$  qu'on appelle alors **rayons primitifs**.

Par ailleurs, les trajectoires des points de la droite  $\Delta$  dans un repère lié à un cercle de base forment des **développantes de cercle**. Ainsi, les engrenages construits à partir des développantes des cercles de bases assurent un entraînement homocinétique par obstacle se ramenant à l'étude de roues de friction dont les rayons sont les rayons primitifs.

On appelle **angle de pression** l'angle  $\alpha$  entre la ligne d'action  $\Delta$  et la tangente commune aux cercles primitifs.

On peut montrer que si  $r_0$  est le rayon primitif et  $r_b$  le rayon de base alors :  $r_b = r_0 \cdot \cos \alpha$   
L'angle de pression  $\alpha$  vaut  $20^\circ$  dans le cas général. Il peut cependant varier ( $15^\circ$  à  $30^\circ$ ), ce qui permet de définir des dentures spécifiques pour certaines applications.

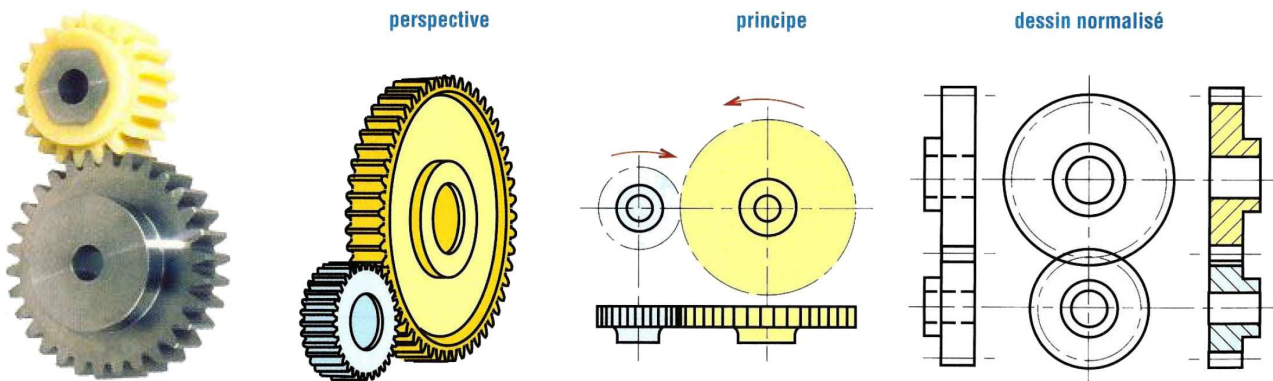
## 2 Engrenages cylindriques

### 2.1 Transformation de mouvement

A partir de l'étude cinématique des roues de friction:

Engrenage à contact extérieur	Engrenage à contact intérieur	Système pignon crémaillère
$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2}$	$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2}$	$ V  = R \cdot  \omega $

## 2.2 Engrenages cylindriques à denture droite



### 2.2.1 Module d'un engrenage

Le pas primitif  $p$  est la distance, sur le cercle primitif, entre deux dents. On a donc :  $p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{Z}$  avec  $Z$  le nombre de dents.

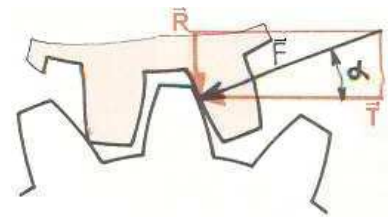
Deux roues engrenant doivent avoir le même pas primitif  $p$ . Cela implique que  $p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{Z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{Z_2}$ .

On appelle alors  $m$  le module d'un engrenage, tel que  $m = \frac{2 \cdot R}{Z}$ . **ATTENTION !** Deux roues dentées doivent donc avoir même le module  $m$  pour pouvoir engrener ensemble !

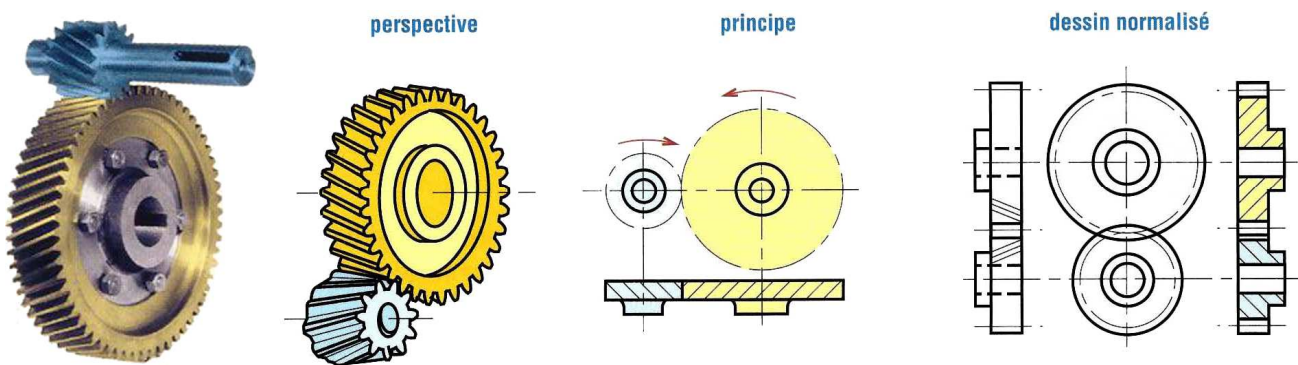
### 2.2.2 Efforts sur les dentures - Couple transmis

L'effort  $\vec{F}$  normal à la dent étant incliné de l'angle de pression  $\alpha$  ( $20^\circ$  en général), on considère les deux projections de  $\vec{F}$  suivante :

- la tangente commune aux diamètres primitifs :  $\vec{T}$
- la normale commune aux cercles primitifs :  $\vec{R}$



## 2.3 Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale



Les deux roues à dentures hélicoïdales doivent avoir leurs angles d'hélice de sens opposés mais de mêmes valeurs pour engrener ensemble.

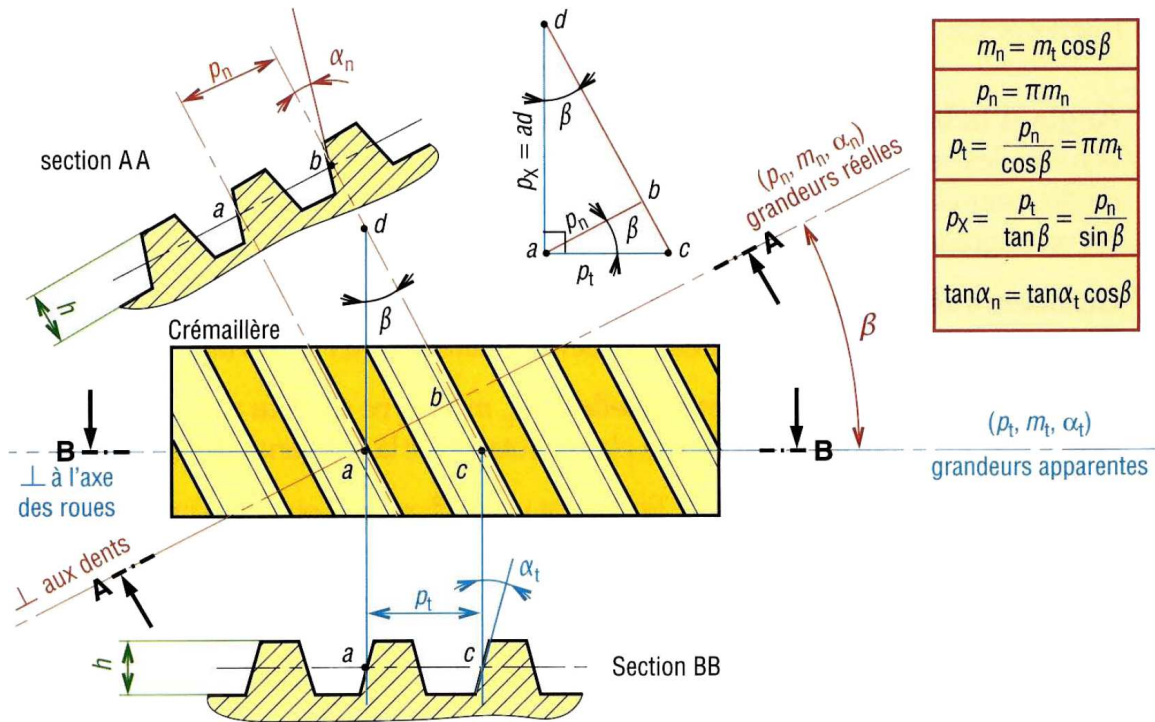


2.3.1 Avantage - Inconvénient

Les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale ont un rapport de conduite (nombre de dents en prises) plus important. L'engrènement est plus progressif que pour les engrenages à denture droite, et de ce fait réduisent notablement les bruits et vibrations engendrés durant l'engrènement.

En revanche, ils sont plus chers et l'inclinaison de l'effort entre les dents du fait de l'hélice engendre un effort axial durant l'engrènement.

2.3.2 Dimensions



Les dimensions d'une roue à denture hélicoïdale sont déterminées à partir:

- du module normalisé, appelé ici module normal (ou réel) et désigné par  $m_n$ ,
- du nombre de dents  $Z$
- de l'angle d'inclinaison de l'hélice  $\beta$

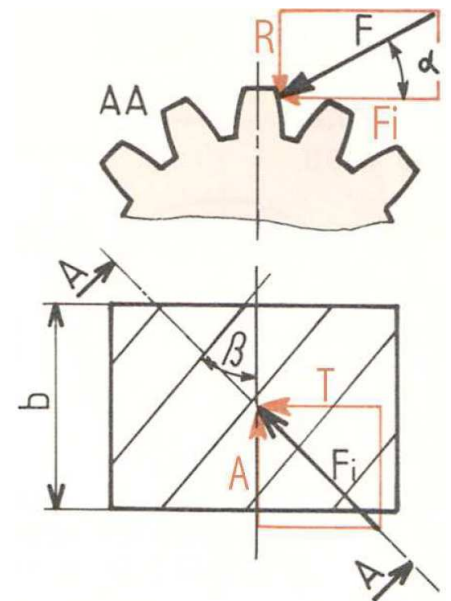
La relation entre pas normal  $P_n$  et pas tangentiel  $P_t$  permet de définir un module tangentiel (ou apparent)  $m_t$ .

Les dimensions de la roue dépendent alors de ce module tangentiel.

$$P_n = P_t \cdot \cos(\beta) \quad m_n = m_t \cdot \cos(\beta) \quad d = m_t \cdot Z$$

2.3.3 Efforts

L'effort sur la denture peut se décomposer ici en trois forces :  $\vec{F} = A \cdot \vec{x} - R \cdot \vec{y} - T \cdot \vec{z}$ .



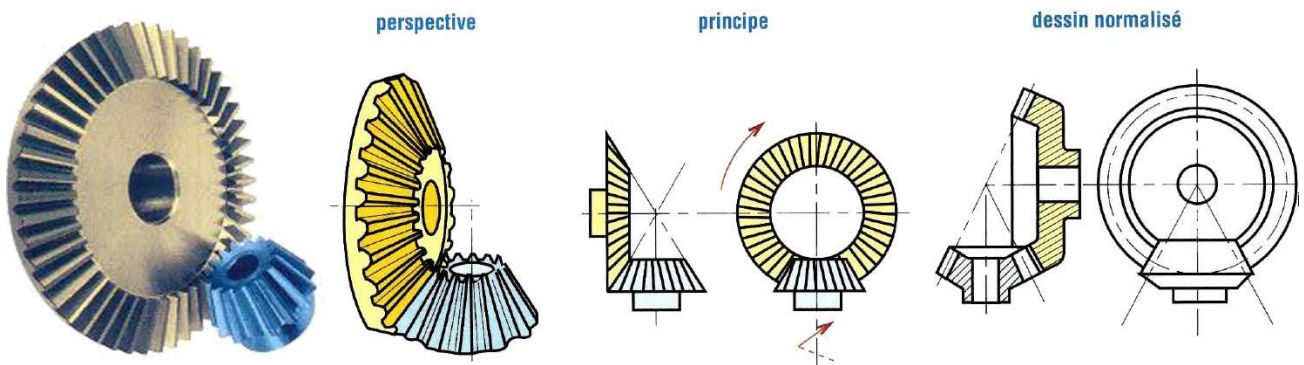
Si l'axe de rotation de la roue dentée est  $(O, \vec{x})$  et I, le point d'application de l'effort  $\vec{F}$  tel que  $\vec{OI} = \frac{d}{2} \cdot \vec{y}$  alors le couple  $C$ .  $\vec{x}$  généré sur cet axe de rotation est:

$$C = (\vec{OI} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{x} = \frac{d}{2} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{F} = \frac{d}{2} \cdot \vec{z} \cdot \vec{F}$$

- Effort tangentiel  $\vec{T}$ , souvent déterminé à partir du couple  $C$  :  $T = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)| = \frac{2}{d} \cdot C$
- Effort radial  $\vec{R}$ , déterminé par la relation :  $R = T \cdot \left| \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\beta)} \right|$
- Effort axial  $\vec{A}$ , déterminé par la relation :  $A = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)| \cdot |\sin(\beta)| = T \cdot |\tan(\beta)|$

### 3 Engrenages coniques

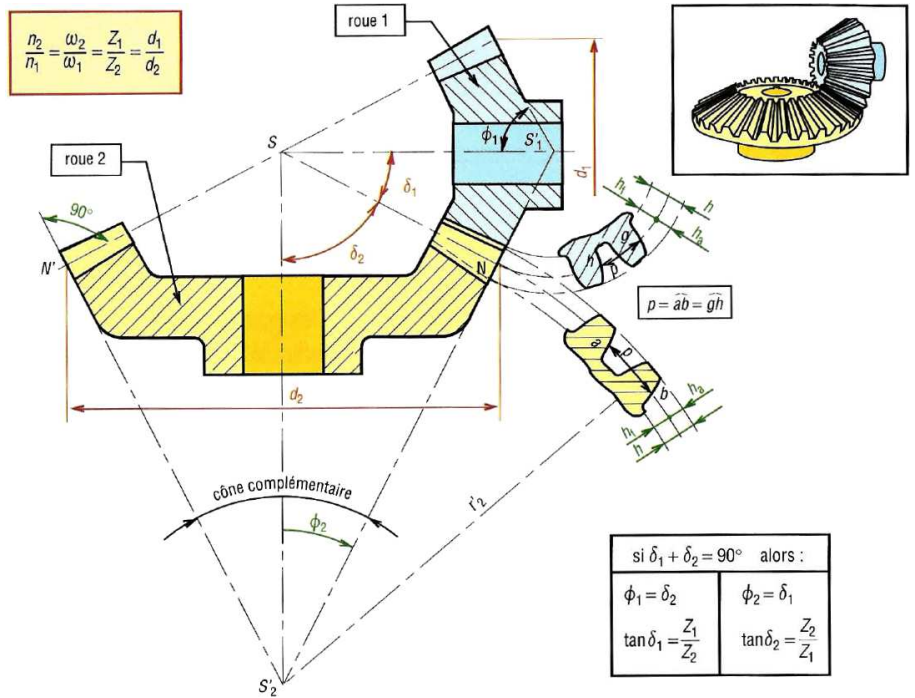
L'étude qui suit porte plus particulièrement sur les dentures droites.



#### 3.1 Principe de fonctionnement

Soient:

- $\omega_{10}$  et  $\omega_{20}$  les vitesses respectives des roues coniques 1 et 2.
- $\delta_1$  et  $\delta_2$  les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- $R_1$  et  $R_2$  les rayons des cônes primitifs au point M.



$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Or  $\begin{cases} R_1 = SM \cdot \sin(\delta_1) \\ R_2 = SM \cdot \sin(\delta_2) \end{cases}$

On obtient la relation :

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\delta_1)}$$

Le rapport des vitesses détermine donc les demi-angles au sommet.

### 3.2 Dimensions normalisées

Les dimensions normalisées doivent être mesurées sur la partie de la denture la plus éloignée du sommet des cônes.

### 3.3 Efforts sur la denture

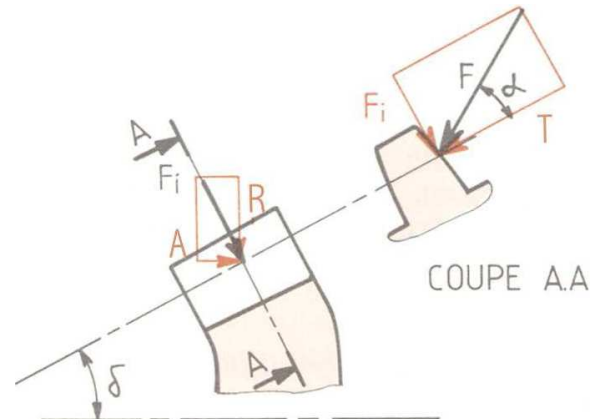
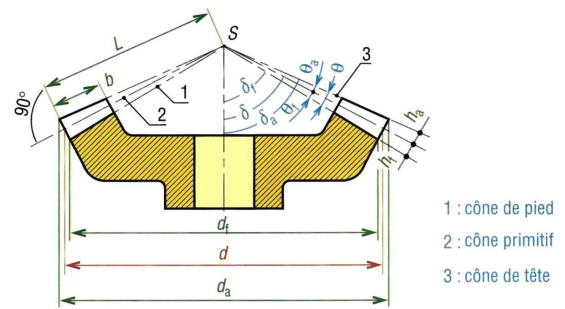
L'effort normal à la denture  $\vec{F}$  donne ici trois efforts en projection sur les trois directions principales de la roue dentée (tangentielle, axiale et radiale).

Si  $T$  est l'effort tangentiel déterminé à partir du couple, les relations s'écrivent:

$$T = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)|$$

$$A = T \cdot |\tan(\alpha)| \cdot |\sin(\delta)|$$

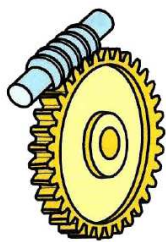
$$R = T \cdot |\tan(\alpha)| \cdot |\cos(\delta)|$$



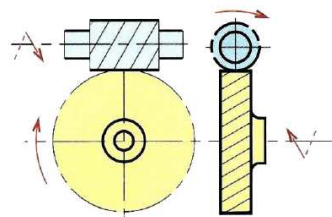
## 4 Engrenages à roue et vis sans fin



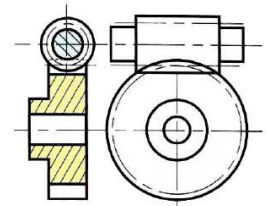
perspective



principe



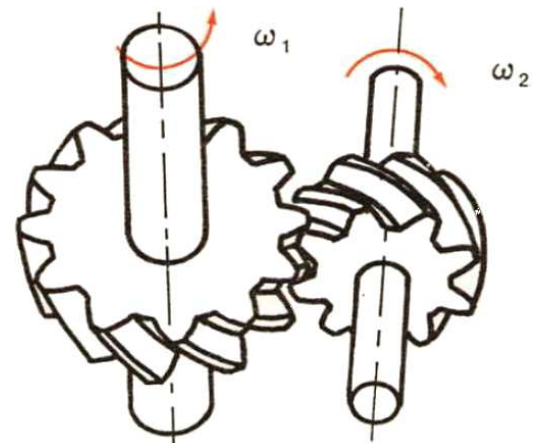
dessin normalisé



### 4.1 Principe de fonctionnement

Cas particulier des engrenages gauches hélicoïdaux, un système roue-vis sans fin est tel que l'une des roues a un très petit nombre de dents (1 à 8). Elle est alors appelée vis.

Pour engrener ensemble, la roue et la vis doivent avoir leurs hélices de même sens.



### 4.2 Avantages - Inconvénients

- Ce mécanisme permet d'obtenir un grand rapport de réduction avec seulement deux roues dentées (1/200).
- Les systèmes roue-vis sans fin sont presque toujours irréversibles. On peut donc les utiliser pour maintenir une orientation.
- L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dentures, donc usure et rendement faible (60%)
- La vis supporte un effort axial important.

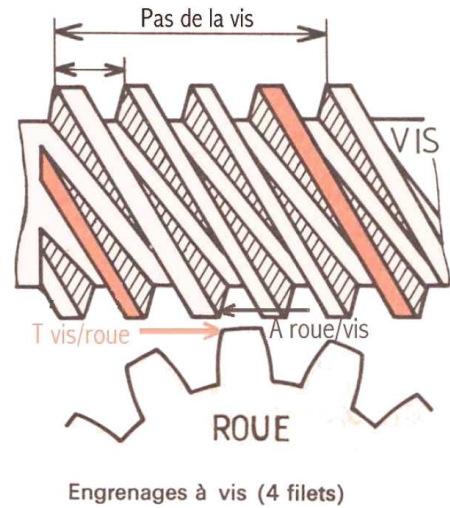


**4.3 Efforts**

On constate en examinant la figure ci-contre représentant un système à roue et vis sans fin (vis à 4 filets), que l'effort tangentiel sur la roue est transmis comme effort axial sur la vis.

**4.4 Irréversibilité du système roue et vis**

Si la vis peut toujours entraîner la roue, en revanche, l'inverse n'est pas toujours possible. Lorsque l'angle d'inclinaison de l'hélice  $\beta_R$  est suffisamment petit (moins de 6 à 10°) le système devient irréversible et la roue ne peut pas entraîner la vis, il y a blocage en position. Cette propriété est intéressante pour des dispositifs exigeant un non retour.



Ce phénomène est comparable à l'irréversibilité du système vis écrou. Les engrenages roue et vis sont les seuls à posséder cette propriété.

**5 Schématisation des engrenages**

		Types de dentures*			
		Droite	Hélicoïdale	Chevron	Spirale
Roue à denture extérieure					
Roue à denture intérieure		* Indication facultative.			
Roue cônica		Exemples d'applications			
Secteur denté					
Vis sans fin					
Crémaillère					



## 6 Les trains d'engrenages

### DÉFINITION : Trains simples

Trains d'engrenages possédant tous ses axes fixes, dans un même repère, au cours du temps.

### DÉFINITION : Epicycloïde

Courbe décrite par un point fixe d'un cercle qui roule extérieurement sans glisser sur un autre cercle.

### DÉFINITION : Hypocycloïde

Courbe décrite par un point fixe d'un cercle qui roule intérieurement sans glisser sur un autre cercle.

### DÉFINITION : Train épicycloïdal

Train d'engrenages à axes de position relative variable mettant en mouvement des points dont les trajectoires sont des épicycloïdes.

### 6.1 Les trains simples

- Roue 1 :  $D_1, Z_1, \omega_1$
- Roue 2 :  $\begin{cases} D_{2a}, Z_{2a}, \omega_2 \\ D_{2b}, Z_{2b}, \omega_2 \end{cases}$
- Roue 3 :  $D_3, Z_3, \omega_3$
- Roue 4 :  $D_4, Z_4, \omega_4$

D'après l'étude cinématique des roues de frictions, on remarquera qu'un contact extérieur inverse le sens de rotation, alors qu'avec un contact intérieur, le sens est conservé.

Par conséquent, la raison d'un train d'engrenage sera donnée par la formule :

$$\frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}}$$

avec  $n$  nombre de contacts extérieurs

**EXEMPLE :** Dans le cas du schéma cinématique précédent :  $\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_{2b}} \cdot \frac{Z_{2a}}{Z_3} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{Z_1 \cdot Z_{2a}}{Z_{2b} \cdot Z_4}$

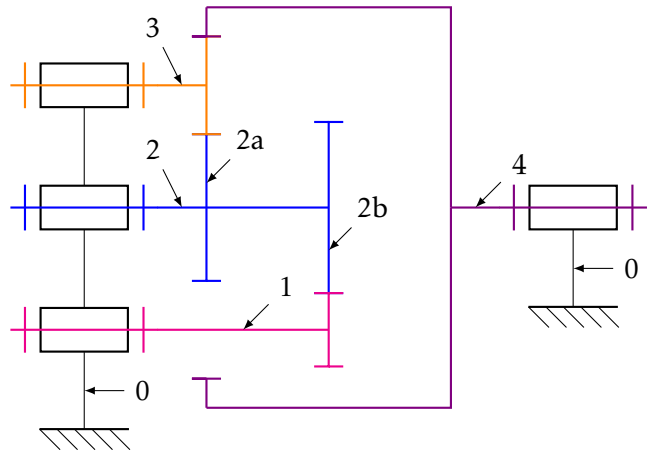
Si le train d'engrenages n'est pas uniquement composé de trains d'engrenages parallèles alors il faut d'abord calculer la valeur absolue du rapport de réduction globale avec la relation établie ci-dessus puis déterminer le signe en observant la rotation de chaque roue.

Le train d'engrenages à axes de position relative invariable dans le même repère permet d'obtenir un grand rapport de réduction mais l'encombrement est important. La solution pour remédier à ces inconvénients est le train épicycloïdal.

### 6.2 Les trains épicycloïdaux

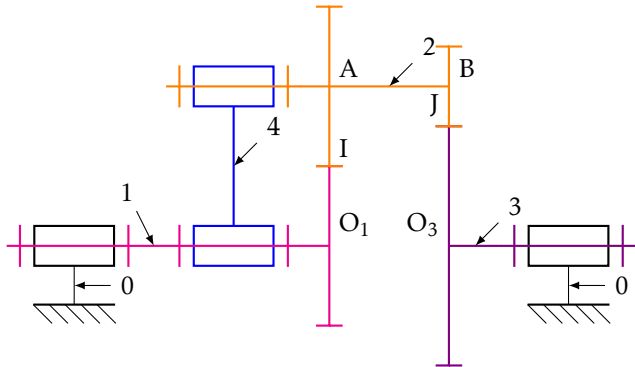
#### 6.2.1 Caractéristiques d'un train épicycloïdal

Un **pignon** qui tourne **autour d'un axe en mouvement** dans le repère lié au bâti est appelé **satellite**. Le satellite est le premier élément qu'il faut repérer quand on étudie un train épicycloïdal. Lorsqu'on a déterminé le satellite,



on peut rechercher les trois "entrées" du train :

- le **porte satellite** est en liaison pivot avec le(s) satellite(s). Il porte le(s) satellite(s).
- les **deux planétaires** sont en **contact avec les dentsures du satellite**. Les planétaires tournent autour d'axes fixes dans le repère de l'observateur et engrenent avec le satellite. Les planétaires peuvent être des pignons ou des couronnes dentées intérieures.



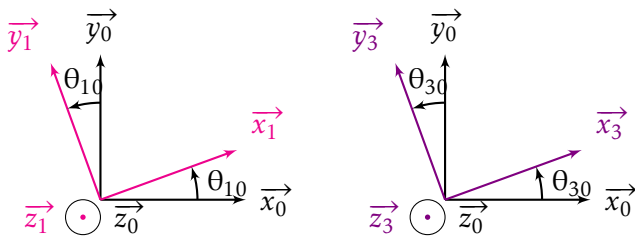
Pour ce train épicycloïdal:

- satellite: pièce 2
- porte satellite: pièce 4
- planétaires: pièces 1 et 3. Il s'agit ici de deux pignons.

Les roulements sans glissement de ce trains épicycloïdal se traduisent par:

$$\vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{(J,2/3)} = \vec{0}$$

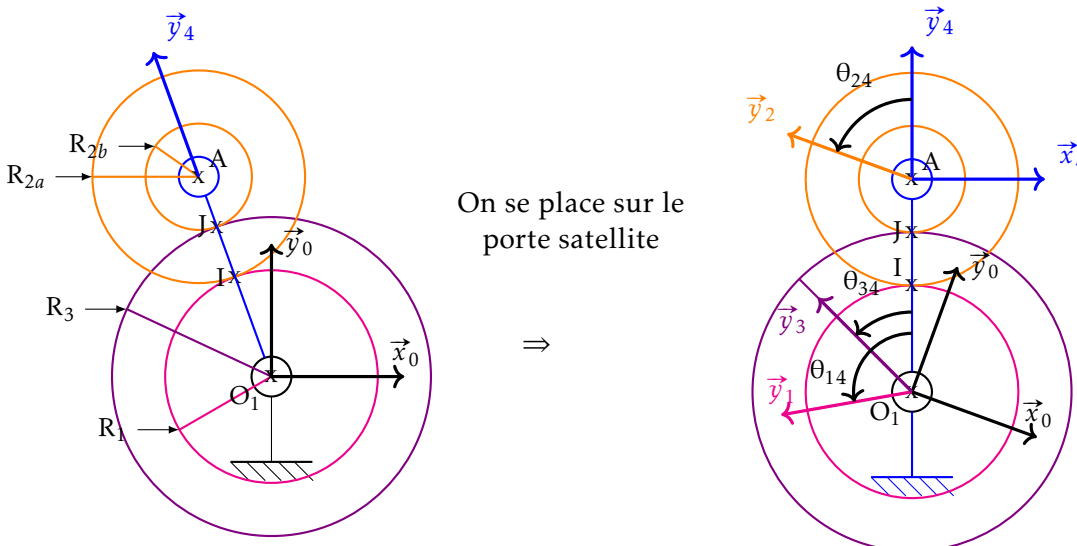
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt} \\ \omega_{30} = \frac{d\theta_{30}}{dt} \\ \omega_{40} = \frac{d\theta_{40}}{dt} \end{array} \right. \quad \text{et}$$



**6.2.2 Relation de Willis**

Un train épicycloïdal est un système à deux degrés de libertés. Il convient de fixer deux paramètres pour déterminer toutes les inconnues cinématiques du problème. La formule de Willis permet de relier les vitesses de rotation du porte satellite et des deux planétaires.

La technique la plus simple consiste à se ramener à l'étude d'un train à axes de position relative invariable dans le même repère (trains simples).



Pour un observateur lié au porte-satellite 4, le train est un train simple, dans lequel la roue 1 entraîne la roue 2<sub>a</sub>.

La roue 2<sub>b</sub> entraîne, quant à elle, la roue 3. Dans ce train simple:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = (-1)^2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_{2b}}{R_{2a} \cdot R_3} = \lambda$$

On utilise alors la composition des vitesses  $\omega_{i/k} = \omega_{i/j} + \omega_{j/k}$  pour introduire les vecteurs vitesses de rotation par rapport au bâti:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = \lambda \quad \text{d'où la loi entrée-sortie (relation de Willis) :}$$

$$\lambda = \frac{\omega_{PL_2} - \omega_{PS}}{\omega_{PL_1} - \omega_{PS}} = (-1)^n \cdot \frac{Z_{PL_1}}{Z_{SAT_1}} \cdot \frac{Z_{SAT_2}}{Z_{PL_2}} \quad \text{ou} \quad \omega_{PL_2} - \lambda \cdot \omega_{PL_1} + (\lambda - 1) \cdot \omega_{PS} = 0$$

$\lambda$  est la raison du train épicycloïdal

On peut retrouver ce résultat à partir des roulements sans glissements et en raisonnant par rapport au **porte satellite**.

### 6.2.3 Fonctionnement d'un train épicycloïdal

Pour faire fonctionner un train épicycloïdal, il faut imposer la vitesse de rotation de deux des trois "entrées". La manière la plus courante consiste à fixer l'une des entrées par rapport au repère d'observation (bâti), d'imposer le mouvement d'une des deux autres et de récupérer la sortie sur la troisième.

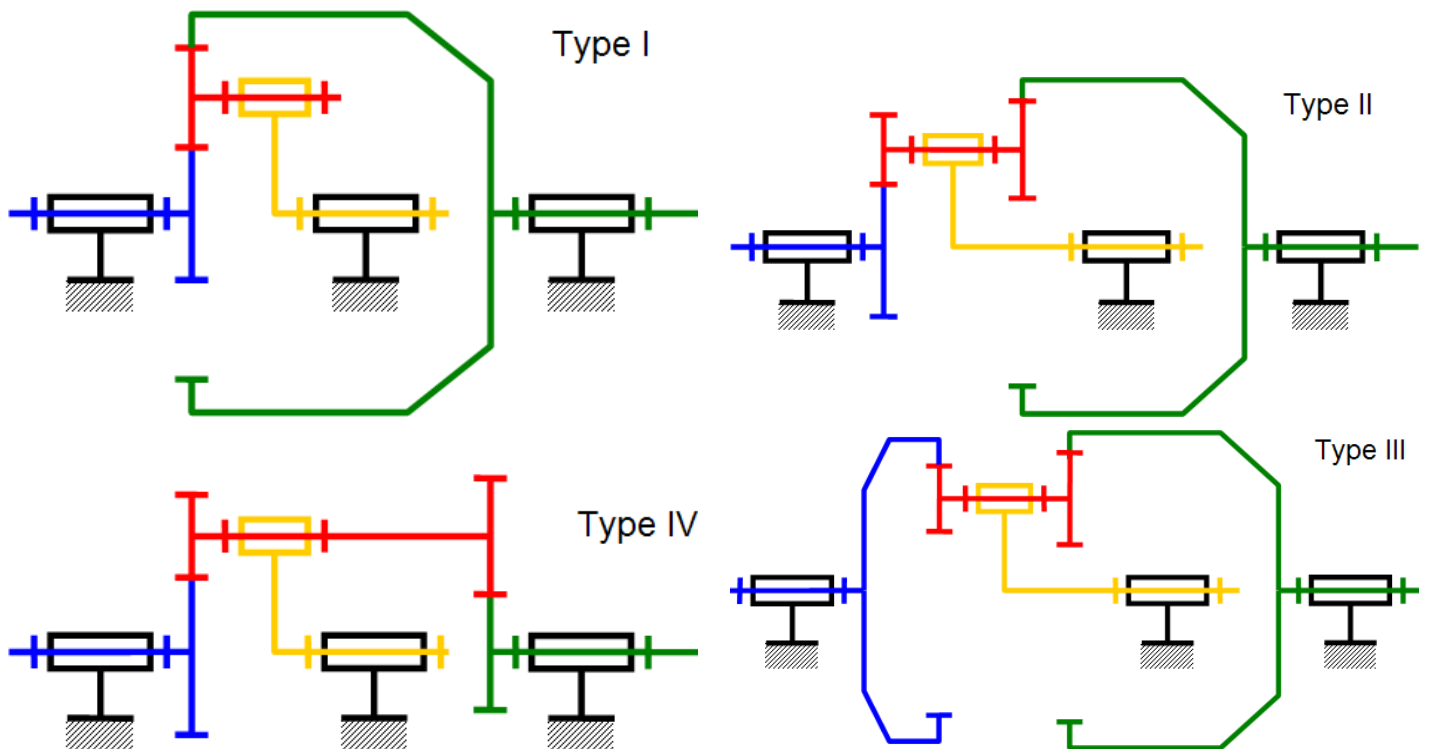
Planétaire 1 bloqué:  $\omega_{10} = 0$   $\frac{\omega_{30}}{\omega_{40}} = 1 - \lambda$

Planétaire 3 bloqué:  $\omega_{30} = 0$   $\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$

Il est alors possible à partir d'embrayages ou de roues à cliquets d'obtenir deux vitesses de déplacement (treuil sur pont roulant, poulie Winch).

### 6.2.4 Trains épicycloïdaux élémentaires

On distingue 4 types de trains épicycloïdaux suivant la nature des planétaires: pignon ou couronne.



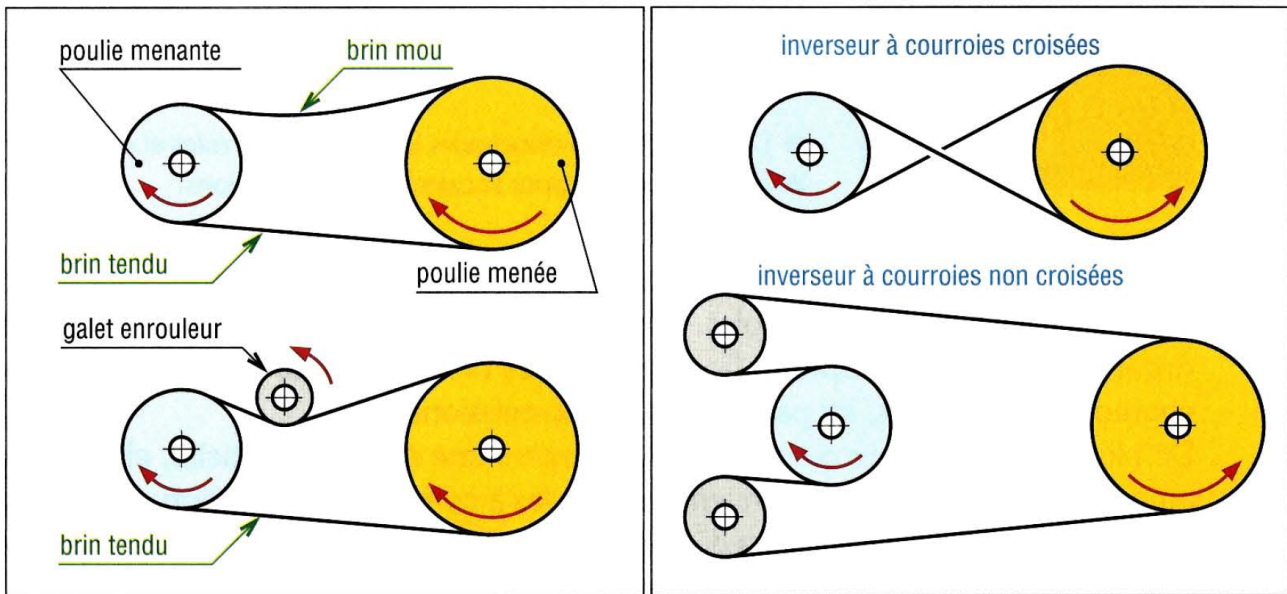
### 6.2.5 Association de trains épicycloïdaux

Méthode de mise en équation :

- Rechercher les trains épicycloïdaux élémentaires. Pour cela on envisage chaque satellite séparément, et chaque couple de planétaires en contact avec ce satellite.

- Écrire les relations de Willis pour chacun de ces trains élémentaires, indépendamment de leur mode de fonctionnement dans l'ensemble.
- Traduire les liens entre ces trains élémentaires.
- Traduire les conditions de fonctionnement.

## 7 Système poulie/courroie



### 7.1 Principe de fonctionnement

Tout comme dans la partie 1.4, l'étude des systèmes poulie/courroie peut être ramenée au roulement sans glissement entre une droite (brin de courroie tendu) et deux roues.

Dans le cas de l'inverseur à courroies croisées, le schéma est identique à celui de présentant le principe de l'engrènement. Le théorème de Thalès permet de lier les rapports des rayons des poulies et les rapports des « pseudos cercles primitifs ». On en déduit que le rapport des vitesses de rotation est l'inverse des rapports des rayons.

Par ailleurs, concernant le signe, il faut tenir compte du trajet de la courroie entre les poulies ; les sens de rotation peuvent alors être inversés.

### 7.2 Avantages/inconvénients

La mise en place de systèmes poulie courroie est beaucoup plus souples que pour les systèmes à engrenages. Pas de problème d'entraxe à calculer et au moyen de galets pour le renvoi d'angle, il est possible de relier plusieurs poulies avec une seule courroie. De plus, les courroies étant souples, elles génèrent moins de vibrations et de chocs que les engrenages.

Cependant, leur souplesse est aussi un inconvénient car elles subissent du glissement sur les poulies (sauf pour courroies crantées), ce qui génère de l'usure. Les efforts transmissibles sont bien plus faibles que pour des engrenages de taille comparable.