CI-3 Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes.

CI-3-3 Déterminer les trajectoires, vitesses et accélérations d'un point de l'espace ou appartenant à un solide.

Objectifs **MODELISER REPRESENTER**

A la fin de la séquence, l'élève devra être capable de :

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Simplifier un modèle de mécanisme.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

Table des matières

1 Dérivation vectorielle et vecteur instantané de rotation

Nous cherchons à établir la formule ci-contre où $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est appelé vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ ($\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0$). On le note aussi simplement $\overrightarrow{\Omega}_{(1/0)}$:

$$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u}}$$

1.1 Existence d'un vecteur instantané de rotation

Soit la BOND $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associée au repère $\mathcal{R}_1$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \|\vec{x_1}\| = \|\vec{y_1}\| = \|\vec{z_1}\| = 1 \\ \vec{x}_1.\vec{x}_1 = \vec{y}_1.\vec{y}_1 = \vec{z}_1.\vec{z}_1 = 1 \\ \vec{x}_1.\vec{y}_1 = \vec{y}_1.\vec{z}_1 = \vec{z}_1.\vec{x}_1 = 0 \end{array}}$$

Dérivons la deuxième ligne dans $\mathcal{R}_0$ ou plus précisément, dans la base $\mathcal{B}_0$ associée à $\mathcal{R}_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{x}_1.\vec{x}_1 = 1 \\ \vec{y}_1.\vec{y}_1 = 1 \\ \vec{z}_1.\vec{z}_1 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{x}_1 = 0 \\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{y}_1 = 0 \\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{z}_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \exists (x_y, x_z, y_x, y_z, z_x, z_y) \in \mathbb{R}^6 / \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = x_y.\vec{y}_1 + x_z.\vec{z}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = y_z.\vec{z}_1 + y_x.\vec{x}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = z_x.\vec{x}_1 + z_y.\vec{y}_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0 \\ \vec{y}_1.\vec{z}_1 = 0 \\ \vec{z}_1.\vec{x}_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{y}_1 + \vec{x}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = 0 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{z}_1 + \vec{y}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = 0 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{x}_1 + \vec{z}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_y + y_x = 0 \\ y_z + z_y = 0 \\ z_x + x_z = 0 \end{array}\right.$$

Ce qui nous conduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = x_y.\vec{y}_1 - z_x.\vec{z}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = y_z.\vec{z}_1 - x_y.\vec{x}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = z_x.\vec{x}_1 - y_z.\vec{y}_1 \end{array}\right.$$

En posant $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = y_z.\vec{x}_1 + z_x.\vec{y}_1 + x_y.\vec{z}_1$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1 \\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{z}_1 \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est appelé vecteur rotation instantanée de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$.

1.2 Changement de base de dérivation

Soit le vecteur $\vec{u}(t) = u_x(t).\vec{x}_1 + u_y(t).\vec{y}_1 + u_z(t).\vec{z}_1$.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{dt}}.\vec{x}_1+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{dt}}.\vec{y}_1+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{dt}}.\vec{z}_1+u_x(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}+u_y(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}+u_z(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}\\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+u_x(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{x}_1+u_y(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{y}_1+u_z(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{z}_1\\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\left[u_x(t).\vec{x}_1+u_y(t).\vec{y}_1+u_z(t).\vec{z}_1\right]=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{u}(t)
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{u}}$

1.3 Propriétés du vecteur rotation

1.3.1 Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_2}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}\wedge\vec{u}\quad\text{et}\quad\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_2}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}\wedge\vec{u}$$

La somme de ces deux équations se met sous la forme : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}\right]\wedge\vec{u}=\vec{0}$

Cette relation étant vraie $\forall\vec{u}$, il apparaît alors que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}=-\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}$. Ainsi $\boxed{\forall\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j,\ \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}=-\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}}$

1.3.2 Composition des vecteurs instantanés de rotation

Soient les référentiels $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{u}\qquad(1)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_2}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}\wedge\vec{u}\qquad(2)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_2}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)}\wedge\vec{u}\qquad(3)$$

En effectuant (1)+(2)-(3), il vient :

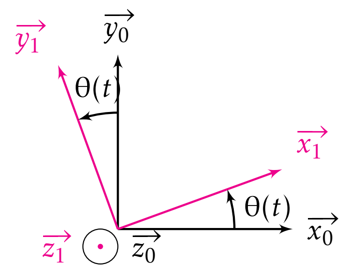
$$\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)}-\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)}\right]\wedge\vec{u}=\vec{0}$$

Cette relation étant vraie $\forall\vec{u}$, la composition des vitesses se traduit par :

$$\boxed{\forall\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_k\qquad\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_k)}=\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_j)}+\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_j/\mathcal{B}_k)}}$$

1.4 Formulation

Soient deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ayant un vecteur commun. Prenons par exemple $\vec{z}_1=\vec{z}_0$. La base $\mathcal{B}_1$ peut alors être repéré dans la base $\mathcal{B}_0$ par l'angle $\theta(t)$:



$$\begin{aligned}(\vec{x}_0,\vec{x}_1)&=\theta(t)\\(\vec{y}_0,\vec{y}_1)&=\theta(t)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\vec{x}_1&=\cos\theta(t).\vec{x}_0+\sin\theta(t).\vec{y}_0\\\vec{y}_1&=-\sin\theta(t).\vec{x}_0+\cos\theta(t).\vec{y}_0\\\vec{z}_1&=\vec{z}_0\end{aligned}$$

Sous forme matricielle, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ $M_{\mathcal{B}_1\mapsto\mathcal{B}_0}$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_1\mapsto\mathcal{B}_0}=\begin{bmatrix}\cos\theta(t)&\sin\theta(t)&0\\-\sin\theta(t)&\cos\theta(t)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad M^{-1}_{\mathcal{B}_1\mapsto\mathcal{B}_0}=M_{\mathcal{B}_0\mapsto\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}\cos\theta(t)&-\sin\theta(t)&0\\\sin\theta(t)&\cos\theta(t)&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

Or, les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ valent : $\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1$

En reprenant les expressions de $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ dans $\mathcal{B}_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}(\cos\theta(t))}{\mathrm{d}t}.\vec{x}_0 + \frac{\mathrm{d}(\sin\theta(t))}{\mathrm{d}t}.\vec{y}_0 \\ &= -\dot{\theta}.\sin\theta(t).\vec{x}_0 + \dot{\theta}.\cos\theta(t).\vec{y}_0 \\ &= \dot{\theta}.[-\sin\theta(t).\vec{x}_0 + \cos\theta(t).\vec{y}_0] = \dot{\theta}.\vec{y}_1\end{aligned}$$

Ainsi $\dot{\theta}.\vec{y}_1 = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1$, ce qui implique que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\vec{y}_1$.

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}(-\sin\theta(t))}{\mathrm{d}t}.\vec{x}_0 + \frac{\mathrm{d}(\cos\theta(t))}{\mathrm{d}t}.\vec{y}_0 \\ &= -\dot{\theta}.\cos\theta(t).\vec{x}_0 - \dot{\theta}.\sin\theta(t).\vec{y}_0 \\ &= -\dot{\theta}.[\cos\theta(t).\vec{x}_0 + \sin\theta(t).\vec{y}_0] = -\dot{\theta}.\vec{x}_1\end{aligned}$$

Ainsi $-\dot{\theta}.\vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1$, ce qui implique que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\vec{x}_1$.

Il en résulte que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\vec{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}.\vec{y}_1 &= \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1 = \lambda.\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \lambda.\vec{y}_1 \\ -\dot{\theta}.\vec{x}_1 &= \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1 = \lambda.\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\lambda.\vec{x}_1\end{aligned} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \dot{\theta}(t).\vec{z}_1}$$

En conclusion, lorsque deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ont un vecteur commun, le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est porté par ce vecteur et sa composante est la dérivée de l'angle (positive dans le sens direct) qui repère la position de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$).

En mécanique, on compose très souvent ce type de repérage (mouvement de rotation autour d'un axe). Il suffira alors pour formuler le vecteur rotation d'utiliser la propriété précédente et la composition des vecteurs rotation.

2 Cinématique du point

2.1 Vecteur vitesse d'un point

Définition : Vecteur vitesse

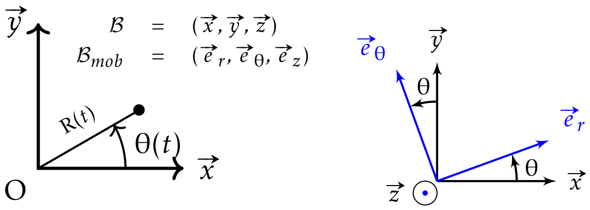
On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(\mathrm{O}, \mathcal{B})$

$$\vec{V}_{(\mathrm{M}/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Remarques :

- L'origine O du repère $\mathcal{R}$ est importante.
- La vitesse s'exprime en "m/s".
- $$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z})\right]_{\mathcal{B}} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.\vec{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\vec{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.\vec{z}\end{aligned}$$

Exemple :



$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{R}.\vec{e}_r = \mathrm{R}.\cos(\theta).\vec{x} + \mathrm{R}.\sin(\theta).\vec{y}$ et $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} = \dot{\theta}.\vec{e}_z$

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{(\mathrm{M}/\mathcal{R})} &= -\mathrm{R}.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + \mathrm{R}.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = \mathrm{R}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{R}.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{R}.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \mathrm{R}.\vec{e}_r \\ &= \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge \mathrm{R}.\vec{e}_r = \mathrm{R}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{(\mathrm{M}/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{R}(t).\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \mathrm{R}(t).\vec{e}_r \\ &= \dot{\mathrm{R}}.\vec{e}_r + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge \mathrm{R}.\vec{e}_r \\ &= \dot{\mathrm{R}}.\vec{e}_r + \mathrm{R}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ : Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire : $\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \lim\limits_{dt \mapsto 0} \dfrac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \lim\limits_{dt \mapsto 0} \dfrac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}$

2.2 Vecteur accélération d'un point

DÉFINITION : Accélération

> *On appelle accélération de* M *par rapport à* $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$
>
> $$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{M/\mathcal{R}}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{B}}$$

REMARQUE :

- L'origine du repère O est importante.
- L'accélération s'exprime de m/s^2.

EXEMPLE : cf partie 2.1.

- Si R est constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{d}{dt}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right) = R.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right) \\
&= \frac{d\dot{R}(t)}{dt}.\vec{e}_r + \frac{d(R(t).\dot{\theta})}{dt}.\vec{e}_\theta + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right) \\
&= \ddot{R}(t).\vec{e}_r + \left[\dot{R}(t).\dot{\theta} + R(t).\ddot{\theta}\right].\vec{e}_\theta + \dot{\theta}.\left(\dot{R}(t).\vec{e}_\theta - R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_r\right) \\
&\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\ddot{R} - R.\dot{\theta}^2\right).\vec{e}_r + \left(R.\ddot{\theta} + 2.\dot{R}.\dot{\theta}\right).\vec{e}_\theta}
\end{aligned}$$

3 Cinématique du solide indéformable

3.1 Définition

DÉFINITION : Solide indéformable

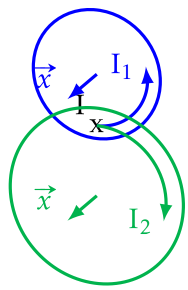
> *Un solide indéformable est un ensemble de points animés d'un mouvement de corps rigide.*

RAPPEL A tout solide indéformable on peut associer un repère et donc un référentiel.

Dans la suite, nous désignerons par solide, un solide indéformable, l'étude des déformations étant hors programme en MP2I - PCSI & MPSI et MP & PSI.

3.2 Point lié à un solide

Soit un solide S de repère associé $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Soit A un point tel que $\overrightarrow{OA} = x_A.\vec{x} + y_A.\vec{y} + z_A.\vec{z}$. On dit que A est lié à S si et seulement si x_A, y_A et z_A sont des constantes. On note A ∈ S (A appartenant à S).



REMARQUE : Il faut faire attention à cette notion de point attaché à un solide.

Les deux solides S_1 et S_2 sont en contact en I. $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$. S_1 et S_2 tournent tous les deux autour de l'axe x. A $t = 0$, I, I_1 et I_2 sont confondus. A $t > 0$, I ne bouge pas, I_1 et I_2 bougent.

Avec cette définition, un point peut matérialiser l'espace. C'est le " point matériel ".

3.3 Équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Propriété : Soient A et B deux points liés à un solide S de repère associé $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. On a alors

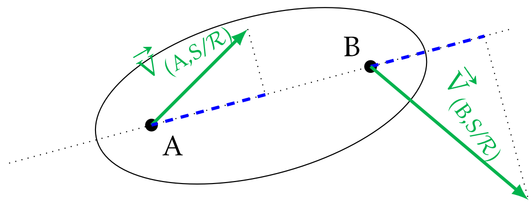
$$\boxed{\overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB}}$$

Le champ de vitesses des points d'un solide est équiprojectif.

Démonstration : Le solide S étant indéformable, $\forall$ A, B $\in$ S, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = cte \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} &= cte^2 \\
\Rightarrow \quad 2\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{B}}.\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{B}} + \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{B}}\right).\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(-\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B/\mathcal{R})}\right).\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(-\overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}\right).\overrightarrow{AB} &= 0
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique :



3.4 Torseur cinématique

Propriété :
Comme le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, c'est également un champ de moments. Ainsi, il existe un vecteur qui dépend de S et de $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$, tel que :

$$\boxed{\forall (A,B) \in S^2 \qquad \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}$$

Ce vecteur est appelé vecteur instantané de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}$. Comme le champ des vitesses d'un solide est un champ de moments, il est représentable par un torseur.

Définition : Torseur cinématique

> *Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$ est représentable, au point A, par le torseur cinématique de S/$\mathcal{R}$:*
>
> $$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Remarques :

- Le torseur cinématique est défini à tout instant
- $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$ est appelé la résultante du torseur
- $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$ est appelé le moment du torseur en M

Les liaisons cinématiques normalisées autorisent différents degrés de libertés. Pour deux solides 1 et 0 liés par une liaison normalisée, en exprimant le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport à un solide 0 en un point idéalement choisi, la forme de ce torseur devient caractéristique de la liaisons (cf partie 7).

3.5 Champ de vecteur accélération d'un solide

Propriété :
Soient A et B deux points d'un solide S.

$$\boxed{\overrightarrow{A}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

Conséquence : Le champ d'accélération d'un solide n'est pas un champ de torseur.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{(B,S/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}\\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{BA}\right)\right]_{\mathcal{R}}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA}\wedge\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}\\
&= \vec{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \left(\cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{BA}\right)\right]_{S}} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA}\wedge\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

4 Composition de mouvement

4.1 Composition des vitesses pour le point

Propriété : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point. Alors $\boxed{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0O_1}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0}\\
&= \vec{V}_{(O_1/\mathcal{R}_0)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}\wedge\overrightarrow{O_1A}\\
&= \underbrace{\vec{V}_{(O_1,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}\wedge\overrightarrow{O_1A}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Définition : Composition des vitesses

- $\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)}$ *est appelée vitesse absolue.*
- $\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}$ *est appelée vitesse relative.*
- $\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ *est appelée vitesse d'entraînement. Le point A est attaché à $\mathcal{R}_1$ de manière instantanée. C'est un point coïncidant.*

4.2 Composition des vitesses pour le solide

Propriété :

Soient $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point. Alors $\boxed{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Démonstration :

$$\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)} = \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}}$$

Comme nous avions déjà : $\boxed{\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$, il vient : $\boxed{\mathscr{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \mathscr{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \mathscr{V}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}$

4.3 Fermeture cinématique

Dans une chaine cinématique fermée, pour obtenir des relations entre les différents paramètres cinématiques, on établit une fermeture de chaîne cinématique. En reprenant l'exemple du micro-moteur du cours précédent, on obtient : $\mathscr{V}_{3/2} + \mathscr{V}_{2/1} + \mathscr{V}_{1/0} = \mathscr{V}_{3/0}$

avec : $\mathscr{V}_{1/0} = {}_{A}\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_{10}(t).\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$; $\mathscr{V}_{2/1} = {}_{B}\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_{21}(t).\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$; $\mathscr{V}_{3/2} = {}_{C}\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_{32}(t).\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$; $\mathscr{V}_{3/0} = {}_{\forall M}\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \dot{\lambda}(t).\vec{x}_0\end{matrix}\right\}$

On pose $\omega_{ij}(t) = \dot{\theta}_{ij}(t)$. Plaçons les torseurs au point C pour ne pas faire intervenir ω_{32}.

Rappel $\overrightarrow{AB} = e.\vec{x}_1$, $\overrightarrow{BC} = L.\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t).\vec{x}_0$.

$$\begin{array}{rcl} \vec{V}_{(C,1/0)} & = & \cancel{\vec{V}_{(A,1/0)}} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} = -\lambda(t).\vec{x}_0 \wedge \omega_{10}(t).\vec{z}_0 = \lambda(t).\omega_{10}(t).\vec{y}_0 \\ \text{et} \quad \vec{V}_{(C,2/1)} & = & \cancel{\vec{V}_{(B,2/1)}} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/1)} = -L.\vec{x}_2 \wedge \omega_{21}(t).\vec{z}_0 = L.\omega_{21}(t).\vec{y}_2 \end{array}$$

$$\mathcal{V}_{3/2} + \mathcal{V}_{2/1} + \mathcal{V}_{1/0} = \mathcal{V}_{3/0} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\Omega}_{(3/2)} + \vec{\Omega}_{(2/1)} + \vec{\Omega}_{(1/0)} & = & \vec{\Omega}_{(3/0)} \\ \vec{V}_{(C,3/2)} + \vec{V}_{(C,2/1)} + \vec{V}_{(C,1/0)} & = & \vec{V}_{(C,3/0)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \omega_{32}(t) + \omega_{21}(t) + \omega_{10}(t) & = & 0 \text{ en projetant sur } \vec{z}_0 \\ \vec{0} + L.\omega_{21}(t).\vec{y}_2 + \lambda(t).\omega_{10}(t).\vec{y}_0 & = & \dot{\lambda}(t).\vec{x}_0 \end{array} \right.$$

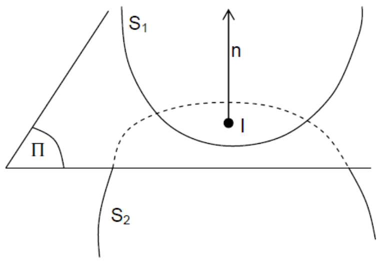
Une projection sur $\vec{x}_2$ de la dernière équation permet d'éliminer $\omega_{21}(t)$ et on obtient ainsi une relation entre $\dot{\lambda}(t)$ et $\omega_{10}(t)$:

$$\lambda(t).\omega_{10}(t).\sin(\theta_{20}) = \dot{\lambda}(t).\cos(\theta_{20}(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \lambda(t).\tan(\theta_{20}(t)).\omega_{10}(t)$$

Remarque : En partant de la fermeture géométrique et en dérivant dans le repère $\mathcal{R}_0$, on obtient la même équation.

> Les équations obtenues dans une fermeture de chaîne cinématique sont dérivées des équations obtenues dans les fermetures géométriques.

4.4 Vitesse de glissement



Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en I. A t donné, il existe alors $I_1 \in S_1$ tel que $I = I_1$ et il existe alors $I_2 \in S_2$ tel que $I = I_2$. I est le point de contact. $I \notin S_1$ et $I \notin S_2$. On se limite aux surfaces régulières qui admettent un plan tangent Π et une normale $\vec{n}$.

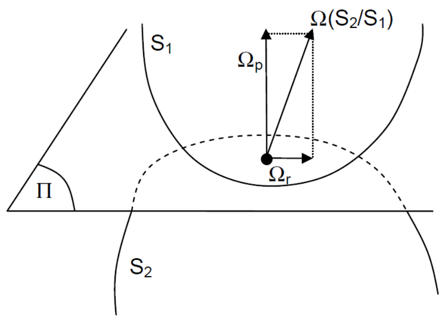
Rappel

Le mouvement relatif entre S_1 et S_2 est caractérisé par le torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1.

$$\mathcal{V}_{S_2/S_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} \\ \vec{V}_{(I,S_2/S_1)} \end{array} \right\}_I$$

Définition : Vecteurs roulement et pivotement

- $\vec{\Omega}_p = \left(\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)}.\vec{n}\right)\vec{n}$ *est le vecteur pivotement.*
- $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \vec{\Omega}_p$ *est le vecteur roulement.*



Définition : Vecteur glissement

On appelle vecteur glissement de S_2 sur S_1 en I $\vec{V}_{(I,S_2/S_1)}$

Propriété :

Le vecteur glissement appartient au plan tangent Π. Au niveau du contact, il n'y a donc ni décollement, ni pénétration entre les solides.

Démonstration :

$\vec{V}_{(I,S_2/S_1)} = \vec{V}_{(I/S_1)} - \vec{V}_{(I/S_2)}$. Chacun des deux termes de droite de cette équation correspond à la vitesse du point I sur S_1 ou S_2. Comme I est défini comme étant sur le bord de la structure, et comme la vitesse est tangente à la trajectoire, chacune des vitesses se trouve dans le plan tangent, et donc la différence des deux vitesses aussi.

Définition : Roulement sans glissement

> *On dit que* S_2 *roule sans glisser sur* S_1 *si et seulement si* $\vec{V}_{(I,S_2/S_1)} = \vec{0}$

4.5 Définition d'un repère par rapport à un autre repère

Pour définir un repère $\mathcal{R}_1$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, il faut :

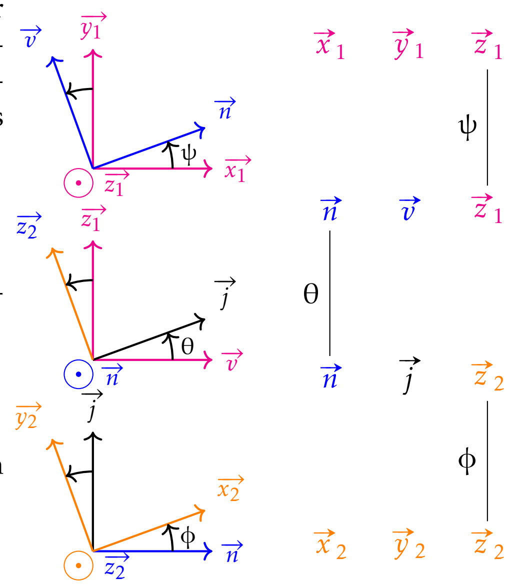
- paramétrer la position de l'origine O_1 de $\mathcal{R}_1$ dans $\mathcal{R}_0$. Ceci se fait en donnant les coordonnées de O_1 dans $\mathcal{R}_0$. Dans $\mathbb{R}^3$, il faut 3 coordonnées.
- paramétrer l'orientation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, i.e l'orientation de $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$. Étant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, il faut donner 3 angles.

4.5.1 Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent une possibilité (à connaître) pour définir l'orientation d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 paramètres angulaires. Les 3 rotations s'effectuent autour de 3 vecteurs indépendants. Le choix des vecteurs de rotation effectué dans Euler est le suivant :

- La première rotation s'effectue autour de $\vec{z}_1$
- la dernière rotation s'effectue autour de $\vec{z}_2$.
- La rotation intermédiaire s'effectue autour d'un vecteur perpendiculaire à $\vec{z}_1$ et à $\vec{z}_2$.

$$\vec{n} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2\|}$$



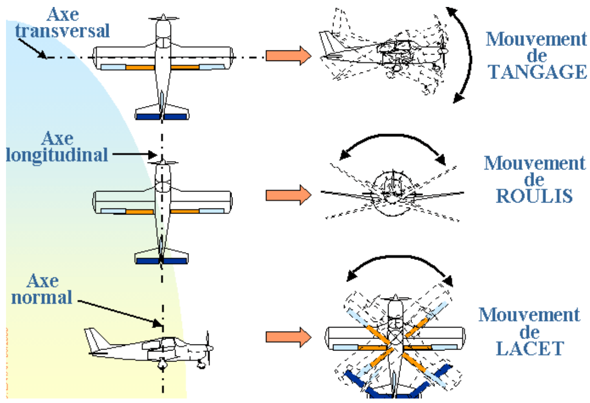
ψ angle de précession ; θ angle de nutation ; ϕ angle de rotation propre.

Vecteur taux de rotation de $\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1$: $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{n} + \dot{\phi}.\vec{z}_2$

4.5.2 Roulis, tangage, lacet

D'autres angles sont utilisés pour quantifier les mouvements dans un repère propre au solide.

Ainsi dans la marine ou en aéronautique, les termes de tangage (avant, arrière), de roulis (gauche, droite) et de lacet (virage à gauhe, virage à droite) sont utilisés pour décrire les mouvements.

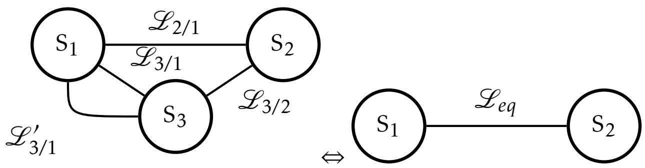


4.6 Liaison cinématique équivalente

4.6.1 Définition d'une liaison équivalente

Supposons qu'il existe entre deux pièces S_1 et S_2 plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires.

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre la pièce S_1 et la pièce S_2 est la liaison théorique de référence $\mathscr{L}_{eq}$ qui a le même comportement que cette association de liaisons, et qui autorise le même mouvement.



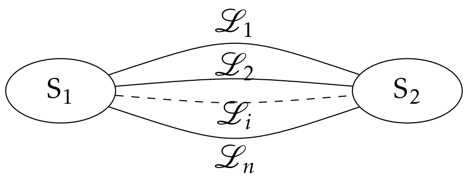
La liaison équivalente doit appartenir aux liaisons normalisées.

4.6.2 Liaisons en parallèle

Définition : Liaisons en parallèle

> *n liaisons $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$,...,$\mathscr{L}_n$ sont disposées en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 si chaque liaison relie directement ces deux solides.*

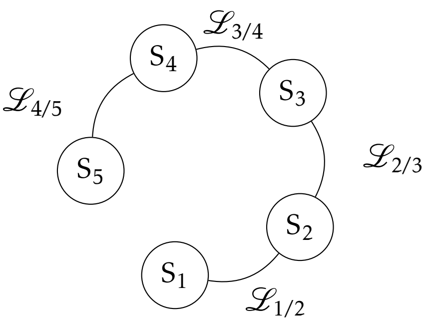
Pour que la liaison équivalente $\mathscr{L}_{eq}$ entre S_1 et S_2 soit compatible avec les autres liaisons simples parallèles, il faut que son torseur cinématique soit égal au torseur cinématique associé à chaque liaison parallèle :



$$\boxed{\mathscr{V}^{\mathscr{L}_{eq}}_{S_2/S_1} = \mathscr{V}^{\mathscr{L}_1}_{S_2/S_1} = \ldots = \mathscr{V}^{\mathscr{L}_n}_{S_2/S_1}}$$

Remarque : Les torseurs doivent être écrits au même point pour réaliser toute opération.

4.6.3 Liaisons en série ou chaîne ouverte.



Définition : Liaisons en série

> *n liaisons $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$,...,$\mathscr{L}_n$ sont disposées en série entre des solides S_0 et S_n si elles sont à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de $(n-1)$ solides.*

Par composition des vecteurs vitesses :

$$\boxed{\mathscr{V}^{\mathscr{L}_{eq}}_{S_n/S_1} = \mathscr{V}^{\mathscr{L}_{n-1}}_{S_n/S_{n-1}} + \ldots + \mathscr{V}^{\mathscr{L}_1}_{S_2/S_1}}$$

5 Mouvements particuliers

5.1 Translation

5.1.1 Définition

Définition : Mouvement de translation

> *Un solide S est animé d'un mouvement de translation dans un repère $\mathcal{R}_0$ si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ distincts et non colinéaires appartenant à S restent respectivement équipollents (supports parallèles, même sens, même normes) à deux vecteurs $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{A_0C_0}$ appartenant au repère $\mathcal{R}_0$.*

5.1.2 Trajectoires

Les trajectoires sont des courbes qui se déduisent les unes des autres par translation, car $\forall A \in S$, $\forall B \in S$ alors $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}$ restant équipollent à lui même pendant le mouvement.

- On parle de translation rectiligne quand les trajectoires sont des droites.
  EXEMPLE : un tiroir dans son meuble
- On parle de translation circulaire quand les trajectoires sont des cercles.
  EXEMPLE : le balais de l'essuie-glace d'un autobus
- On parle de translation curviligne dans les autres cas.
  EXEMPLE : une lampe d'architecte.

5.1.3 Vitesses

Puisque $\forall A, B \in S$, $\overrightarrow{AB}$ reste équipollent à lui même, alors

$$\vec{0} = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{R}} = -\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} - \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}}$$

Tous les points du solide en translation ont la même vitesse $\overrightarrow{V}$. Le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$ est nul : $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} = \vec{0}$.

5.1.4 Accélérations

Tous les points du solide en translation ont la même accélération $\vec{a}$.

5.1.5 Torseur cinématique

Le torseur cinématique associé à un solide S en translation dans un repère $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\forall M \in S \qquad \mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_{M}\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V} \end{array}\right\}}$$

Ce type de torseur est appelé torseur-couple (par analogie avec le torseur des actions mécaniques transmissibles).

REMARQUE : l'écriture de ce torseur est la même quel que soit le point considéré : il est indépendant de son point de réduction.

5.2 Rotation autour d'un axe fixe

5.2.1 Définition

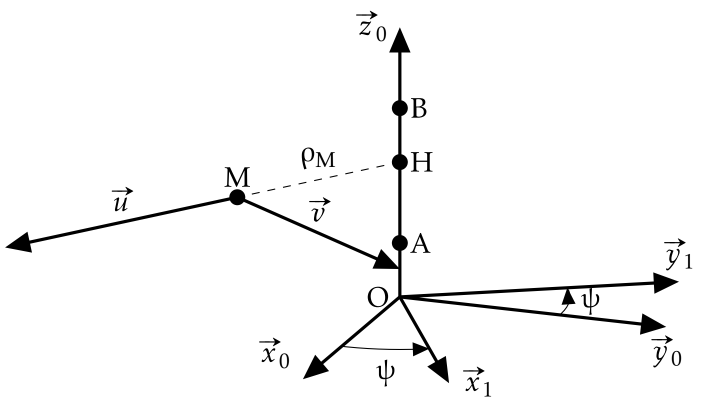
DÉFINITION : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

> *Un solide S lié à $\mathcal{R}_1$ est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Δ du repère $\mathcal{R}_0$ si deux points A et B distincts appartenant à S coïncident en permanence avec les deux points fixes A_0 et B_0 appartenant à Δ.*

5.2.2 Conséquences

L'appartenance de A et B au même solide S se traduit par $\overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)}$. Si la vitesse des points A et B est nulle dans $\mathcal{R}_0$, alors $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} // \overrightarrow{AB}$, et tout point de la droite (BA) a une vitesse nulle.

En posant $\vec{z}_0$ le vecteur directeur de $\overrightarrow{AB}$, on a alors $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \dot{\psi}(t).\vec{z}_0$, avec $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ le paramètre de position angulaire de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_0$.



5.2.3 Trajectoires

Soient M un point de S et H est le projeté orthogonal de S sur (AB). H est fixe. S étant indéformable, la trajectoire de M est un cercle d'axe $(H, \vec{z}_0)$ et de rayon ρ_M.

5.2.4 Vitesses

Tous les points de l'axe de rotation ont un vecteur vitesse nul. Avec ρ_M, la distance du point M à l'axe $(H, \vec{z}_0)$:

$$\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(H,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{MH} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \vec{0} - \rho_M.\vec{u} \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_0 = \rho_M.\dot{\psi}.\vec{v} \text{ avec } \vec{v} \text{ définit tel que } \vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$$

5.2.5 Accélérations

Par dérivation vectorielle, l'accélération vérifie $\vec{A}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = -\rho_M.\dot{\psi}^2.\vec{u} + \rho_M.\ddot{\psi}.\vec{v}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_M.\dot{\psi}.\vec{v}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} \\ &= \rho_M.\dot{\psi}.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} + \rho_M.\frac{\mathrm{d}\dot{\psi}}{\mathrm{d}t}.\vec{v} = \rho_M.\dot{\psi}.\left(\dot{\psi}.\vec{z}_0 \wedge \vec{v}\right) + \rho_M.\ddot{\psi}.\vec{v}\end{aligned}$$

5.2.6 Torseur cinématique

Le torseur cinématique associé à un solide en rotation autour d'un axe fixe est :

$$\boxed{\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}_0} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} \\ \vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{HM}\end{array}\right\}}$$

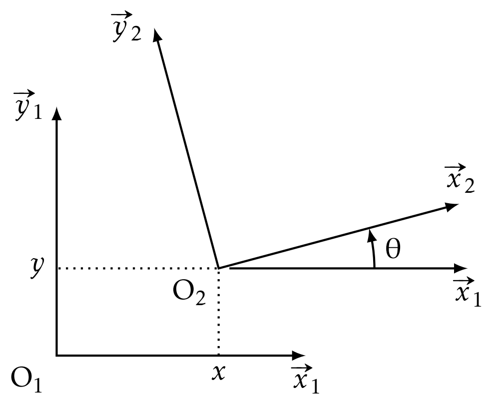
Remarque : $\forall$ A $\in \Delta$, l'axe de rotation, $\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}_0} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} \\ \vec{0}\end{array}\right\}$. Ce type de torseur est appelé glisseur.

6 Mouvement plan sur plan

6.1 Définition

Définition : Mouvement plan

> *Le mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est dit plan s'il existe un plan (Π_2) lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan (Π_1) lié à S_1.*



Il en résulte que le paramétrage de S_2 par rapport à S_1 ne nécessite que 3 paramètres : un angle et deux longueurs ou deux angles et une longueur.

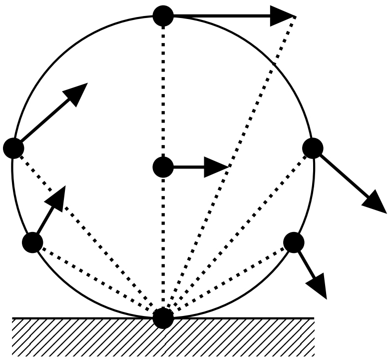
$$\boxed{\mathscr{V}_{S_2/S_1} = {}_{O_2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}.\vec{x}_1 + \dot{y}.\vec{y}_1\end{array}\right\}}$$

6.2 Le centre instantané de rotation (CIR)

Définition : Centre instantané de rotation

> *A un temps donné, le CIR est le point où la vitesse du torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1 est nulle.*

Propriété : Le CIR (noté I) est le centre de rotation, à un temps donné.



Démonstration : $\forall A \neq I \quad \vec{V}_{(A,S_2/S_1)} = \cancel{\vec{V}_{(I,S_2/S_1)}} + \overrightarrow{AI} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = \overrightarrow{AI} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$

Ce qui donne bien un champ de vitesse de type rotation autour de I.

Remarque :

- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Si S_2 est immobile par rapport à S_1 alors tout point du plan est CIR.

Exemple :
Pour la roue de voiture, comme il y a non glissement entre la roue et la route, la vitesse du point appartenant à la roue par rapport à la route est nulle. C'est le CIR entre la roue et la route. Le champ de vitesse de la roue est une rotation autour de I. Le centre de la roue va à la vitesse de la voiture. Le point supérieur de la roue va deux fois plus vite.

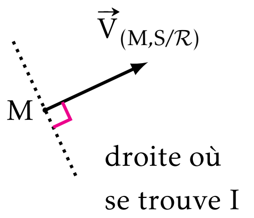
6.3 Représentation graphique du CIR

Problématique : Si on connaît I et $\dot{\theta}$, on a le champ des vitesses du solide. La connaissance du point I est précieuse, dans le cas de mouvement plan.

6.3.1 Lieux des CIR

On connaît $\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$.

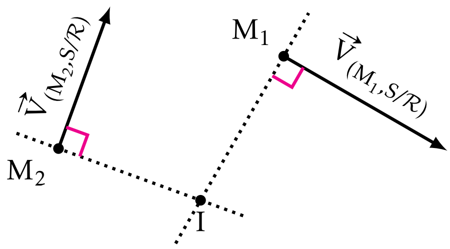
Or $\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{MI} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$. Donc I est sur la droite passant par M et perpendiculaire à $\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$.

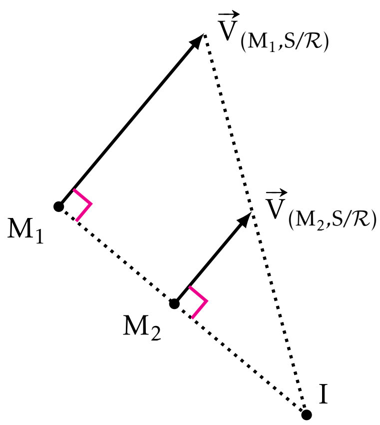


6.3.2 Lieu du CIR

On connaît $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$.

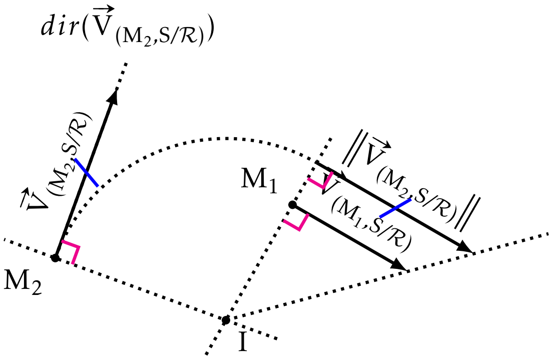
Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.

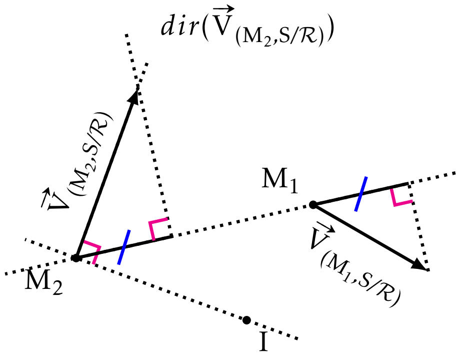




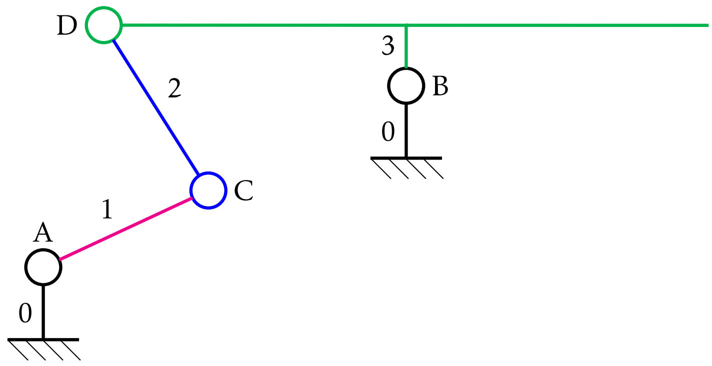
6.3.3 Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.





Exemple :



Trouver les centres instantanés de rotation des différentes pièces par rapport au bâti.

6.4 Base et roulante

Définition : Base

> *La base est la trajectoire du centre instantané de rotation* I *dans le repère fixe* $\mathcal{R}_0$.

Définition : Roulante

> *La roulante est la trajectoire du centre instantané de rotation* I *dans le repère mobile* $\mathcal{R}_1$.

Remarque : La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

6.5 Théorème des 3 plans glissants

Propriété :
Soient 3 solides : S_1, S_2 et S_3 en mouvement plan (plan commun aux trois). Le mouvement de S_i par rapport à S_j est caractérisé par un CIR I_{ij}.

Les CIR I_{21}, I_{32} et I_{13} sont alignés.

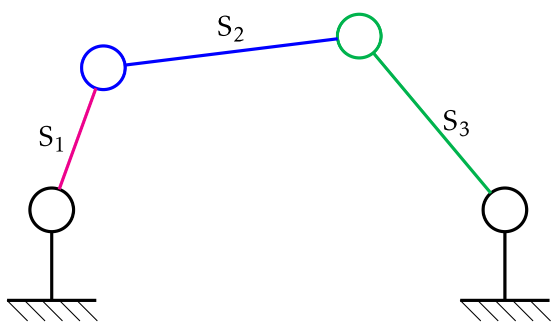
Démonstration :

Chaque mouvement S_i/S_j est caractérisé par une vitesse de rotation ω_{ij}.

$$
\begin{aligned}
\vec{V}_{(I_{21},S_2/S_1)} &= \vec{V}_{(I_{21},S_2/S_3)} + \vec{V}_{(I_{21},S_3/S_1)} \\
&= \cancel{\vec{V}_{(I_{23},S_2/S_3)}} + \overrightarrow{I_{21}I_{23}} \wedge \omega_{23}\,\vec{z} + \cancel{\vec{V}_{(I_{31},S_2/S_3)}} + \overrightarrow{I_{21}I_{31}} \wedge \omega_{31}\,\vec{z} \\
&= \overrightarrow{I_{21}I_{23}} \wedge \omega_{23}\,\vec{z} + \overrightarrow{I_{21}I_{31}} \wedge \omega_{31}\,\vec{z}.
\end{aligned}
$$

or $\vec{V}_{(I_{21},S_2/S_1)} = \vec{0}$, donc $\left[\omega_{23}\overrightarrow{I_{21}I_{23}} + \omega_{31}\overrightarrow{I_{21}I_{31}}\right] \wedge \vec{z}$. D'où l'alignement des trois points.

Application :

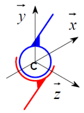
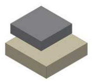
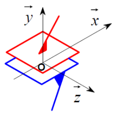
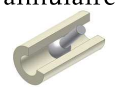
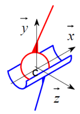
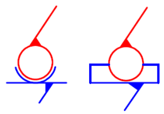
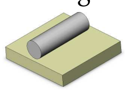
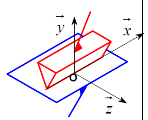
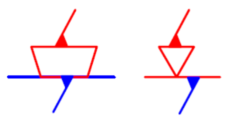
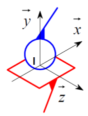
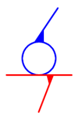


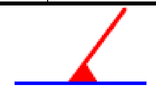
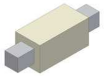
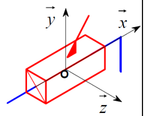
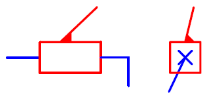
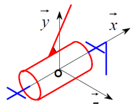
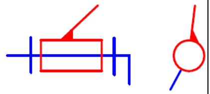
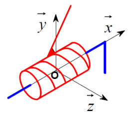
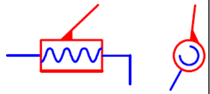
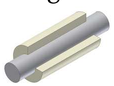
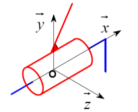
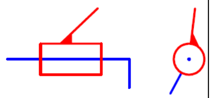
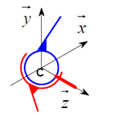
Les solides S_1 et S_3 sont en liaison pivot avec le bâti S_0. La bielle S_2 est en liaison pivot avec S_1 et S_3.

Les CIR I_{10}, I_{30}, I_{21}, I_{32} sont donc facilement repérable. Ils correspondant aux différents centres des liaisons pivot. Le CIR I_{20} est aligné avec I_{10} et I_{21} d'une part, et I_{30} et I_{32} d'autre part.

Une construction géométrique simple permet donc de trouver le CIR de S_2 par rapport à S_0

7 Tableau des liaisons normalisées

ddl	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_{X}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(X,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$		Torseur des actions mécaniques transmissibles
3 ddl 0 tr 3 rt	Rotule 			1 point A, centre de liaison	${}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} X_{10} & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ Z_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$
3 ddl 2 tr 1 rt	Appui plan 			Normal au plan $\vec{y}$, $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_{M}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(M,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{V}_{(M,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_{M}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_{M}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10} \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & N_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$
4 ddl 1 tr 3 rt	Linéaire annulaire 			1 axe $(A, \vec{x})$, centre de sphère A	${}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ V \vec{x} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ Z_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$
4 ddl 2 tr 2 rt	Linéaire rectiligne 			Normal au plan $\vec{y}$, Droite de contact $(A, \vec{x})$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \omega_x . \vec{x} + \omega_y . \vec{y} \\ \vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & N_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$
5 ddl 2 tr 3 rt	Ponctuelle 			Normal au plan $\vec{y}$, point de contact A	${}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque et $\vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & w_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

ddl	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_X\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\\ \vec{V}_{(X,S_1/S_0)}\end{matrix}\right\}$		Torseur des actions mécaniques transmissibles
0 ddl 0 tr 0 rt	Encastrement			$\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$
1 ddl 1 tr 0 rt	Glissière 			1 direction $\vec{x}$ $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & u_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$
1 ddl 0 tr 1 rt	Pivot 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & 0\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$
1 ddl 1 tr 1 rt	Hélicoïdale 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$ avec $V = \frac{p}{2.\pi}.\omega$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & \frac{p}{2.\pi}.p_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & -\frac{p}{2.\pi}.X_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$
2 ddl 1 tr 1 rt	Pivot glissant 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & u_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$
2 ddl 0 tr 2 rt	Rotule à doigt 			1 point A, centre de liaison	${}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}.\vec{x} = 0$	${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ q_{10} & 0\\ r_{10} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$	${}_A\left\{\begin{matrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & 0\\ Z_{10} & 0\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_0}$