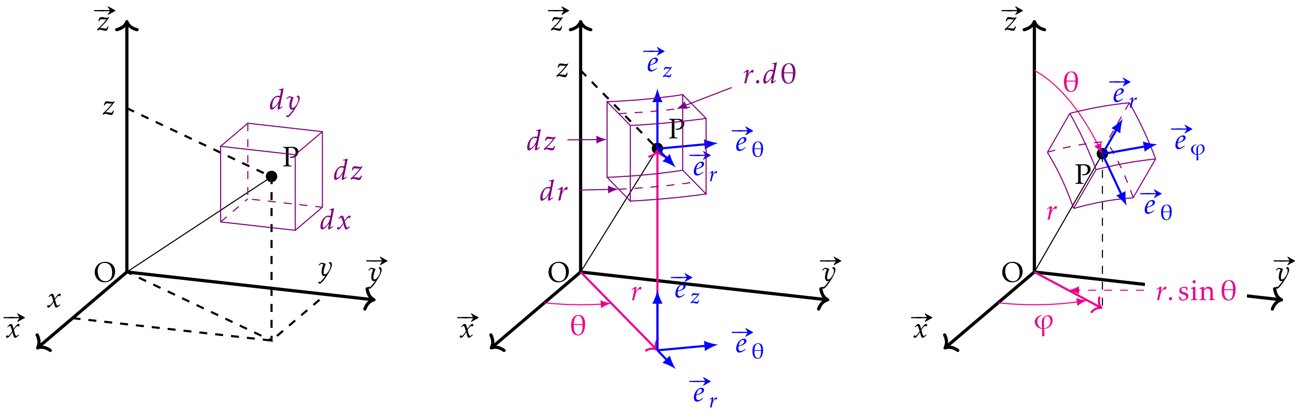
CI-3 Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes

CI-3-1 Maîtriser les outils d'algèbre linéaire et ceux liés aux torseurs.



Objectifs **MODELISER REPRESENTER CALCULER**

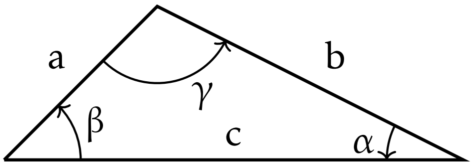
A l'issue de la séquence, l'élève doit être capable :

- de donner les expressions des vecteurs dans différents systèmes de coordonnées.
- déterminer les produits scalaire et vectoriel de deux vecteurs.
- associer à un champ de vecteurs équiprojectif son torseur.
- donner les éléments de réduction d'un torseur, ainsi que le lieu géométrique de son axe central.

Table des matières

1 Rappels de géométrie

1.1 Relations dans un triangle



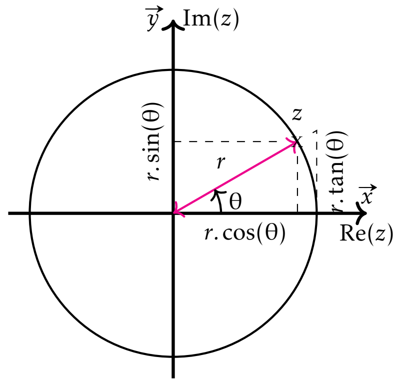
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$
$$a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos(\alpha)$$
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

1.2 Trigonométrie et nombres complexes

Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}$ tels que $z=x+j.y$ avec $j^2=-1$.

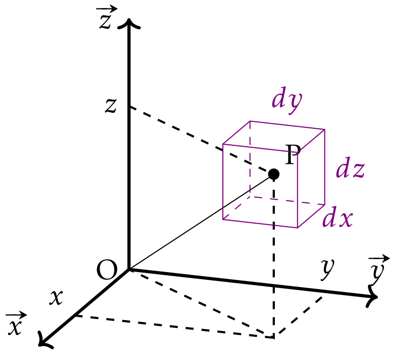
Le module de z est noté $r=|z|$ et l'argument θ. Ainsi $z=r.e^{j.\theta}$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Nous avons alors $x=r.\cos\theta$ et $y=r.\sin\theta$. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

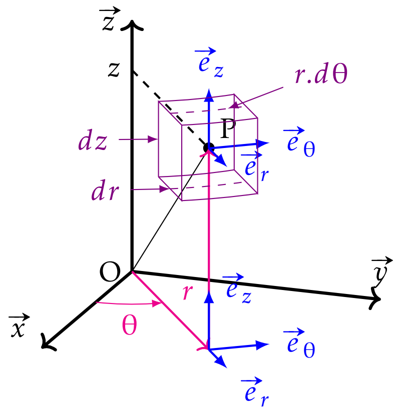


2 Systèmes de coordonnées

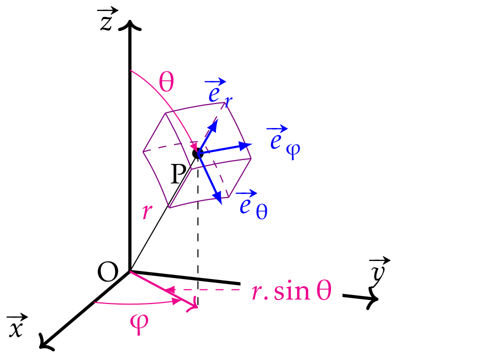
2.1 Coordonnées cartésiennes



2.2 Coordonnées cylindriques



2.3 Coordonnées sphériques



Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Vecteur position	$\overrightarrow{OP}=x.\vec{x}+y.\vec{y}+z.\vec{z}$	$\overrightarrow{OP}=r.\vec{e}_r+z.\vec{z}$	$\overrightarrow{OP}=r.\vec{e}_r$
Surface élémentaire	$dS_x = dy.dz$ $dS_y = dx.dz$ $dS_z = dx.dy$	$dS_r = r.d\theta.dz$ $dS_\theta = dr.dz$ $dS_z = r.dr.d\theta$	$dS_r = r^2.d\theta.\sin\theta.d\varphi$ $dS_\theta = r.dr.\sin\theta.d\varphi$ $dS_\varphi = r.dr.d\theta$
Volume élémentaire	$dV=dx.dy.dz$	$dV=r.dr.d\theta.dz$	$dV=r^2.dr.d\theta.\sin\theta.d\varphi$
Projection		$x = r.\cos\theta$ $y = r.\sin\theta$	$x = r.\sin\theta.\cos\varphi$ $y = r.\sin\theta.\sin\varphi$ $z = r.\cos\theta$

3 Opérations sur le vecteurs

3.1 Espaces euclidiens

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force,...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 noté (E). Ces espaces sont munis :

- d'une forme bilinéaire symétrique : le produit scalaire

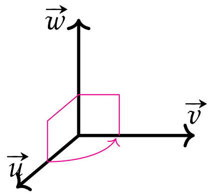
$$\begin{array}{rcl} (E)\times(E) & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \to & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$$

Remarque : on définit alors la norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$: $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

- d'une forme bilinéaire antisymétrique : le produit vectoriel

$$\begin{array}{rcl} (E)\times(E) & \to & (E) \\ (\vec{u},\vec{v}) & \to & \vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v} \end{array}$$

Remarque : $\vec{w}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont directes



L'association de trois vecteurs indépendant forme une base $\mathcal{B}$ de (E). On utilisera en SI, généralement des bases orthonormées directes telles que :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \vec{x}.\vec{y}=\vec{y}.\vec{z}=\vec{z}.\vec{x}=0 & \text{vecteurs orthogonaux} \\ \left\|\vec{x}\right\|=\left\|\vec{y}\right\|=\left\|\vec{z}\right\|=1 & \text{vecteurs normés} \\ \vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{z} & \text{orientation directe} \end{array}}$$

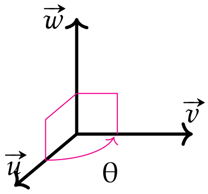
Tout vecteur $\vec{V}$ de (E) est alors une combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\vec{V} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} + V_z.\vec{z} = \left|\begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array}\right._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

V_x, V_y et V_z sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Pour une base orthonormée :

$$V_x=\vec{V}.\vec{x} \qquad V_y=\vec{V}.\vec{y} \qquad V_z=\vec{V}.\vec{z}$$

On peut définir pour tout vecteur $(\vec{u},\vec{v})\in(E)^2$ un angle $\theta=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ orienté par un vecteur $\vec{z}$ normal au plan $(\vec{u},\vec{v})$. L'orientation directe conduit à un angle θ positif dans le sens trigonométrique.



3.2 Produit scalaire

Dans une base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le produit scalaire est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=u_x.v_x+u_y.v_y+u_z.v_z}$$

Remarques :

- Le produit scalaire est nul si $\left\{\begin{array}{ll} & \vec{u}=\vec{0} \\ \text{ou} & \vec{v}=\vec{0} \\ \text{ou} & \vec{u}\perp\vec{v} \end{array}\right.$
- Le produit scalaire permet de trouver la valeur de l'angle $\theta=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ par la relation :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos\left(\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\right)}$$

- Si $\vec{u}//\vec{v}$ alors on a $\vec{u}.\vec{v}=\epsilon.\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|$ avec $\epsilon=\pm1$ suivant l'orientation de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

3.3 Produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le produit vectoriel est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left|\begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array}\right._{\mathcal{B}} \wedge \left|\begin{array}{l} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array}\right._{\mathcal{B}} = \left|\begin{array}{l} u_y.v_z - u_z.v_y \\ u_z.v_x - u_x.v_z \\ u_x.v_y - u_y.v_x \end{array}\right._{\mathcal{B}}$$

Pour éviter de poser les calculs en colonne, on utilisera régulièrement les propriétés :

$$\begin{array}{lllllllll} \vec{x} \wedge \vec{x} & = & \vec{0} & \vec{x} \wedge \vec{y} & = & \vec{z} & \vec{x} \wedge \vec{z} & = & -\vec{y} \\ \vec{y} \wedge \vec{y} & = & \vec{0} & \vec{y} \wedge \vec{z} & = & \vec{x} & \vec{y} \wedge \vec{x} & = & -\vec{z} \\ \vec{z} \wedge \vec{z} & = & \vec{0} & \vec{z} \wedge \vec{x} & = & \vec{y} & \vec{z} \wedge \vec{y} & = & -\vec{x} \end{array}$$

Ces propriétés se retrouvent vite en observant le sens direct : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}, \vec{y}$

Remarques :

- Le produit vectoriel est antisymétrique : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Le produit vectoriel permet de définir l'orientation directe de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ autour d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la relation :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right).\vec{n}$$

- Le produit vectoriel est nul si $\left\{\begin{array}{ll} & \vec{u} = \vec{0} \\ \text{ou} & \vec{v} = \vec{0} \\ \text{ou} & \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \end{array}\right.$
- d'un point de vu matriciel :

$$\left|\begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array}\right._{\mathcal{B}} \wedge \left|\begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array}\right. = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3.4 Produit mixte

Le produit mixte est une forme trilinéaire. Il définit un nombre réel que l'on note $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{array}{rcl} (E) \times (E) \times (E) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & \rightarrow & \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{array}$$

Dans une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ peut s'obtenir par le calcul du déterminant suivant :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

Remarques :

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire des vecteurs :

  $\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \vec{w}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{v}.(\vec{w}\wedge\vec{u})$

  Le produit mixte est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires

3.5 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ définit un vecteur $\vec{d}$ et se calcule par la formule suivante (à retenir comme on peut) :

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}}$$

4 Champ de vecteurs

4.1 Définitions

Définition : Champ de vecteurs

> *Application de* (ε) *dans* (E) *qui à tout point* M *de l'espace affine associe un vecteur unique dans l'espace euclidien noté* $\vec{V}_{(M)}$

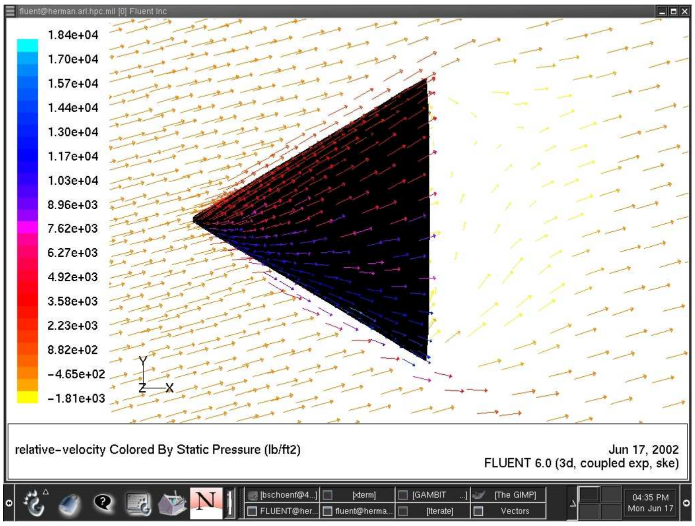
Définition : Champ uniforme

> *Champ de vecteurs tels que* $\forall M,\ \forall N \in (\varepsilon)^2$, $\vec{V}_{(M)} = \vec{V}_{(N)}$

Définition : Champ central

> *Champ de vecteurs tels que* $\exists C \in (\varepsilon)$ *tel que* $\forall M \in (\varepsilon), \exists \lambda_M \in \mathbb{R}/$ *tels que* $\vec{V}_{(M)} = \lambda_M.\overrightarrow{MC}$.

Tous les vecteurs sont dirigés vers un même point C de l'espace affine.



Définition : Champ équiprojectif

> *Un champ de vecteurs est équiprojectif ssi* $\forall (M,N) \in (\varepsilon)^2$, *la relation suivante est vérifiée :* $\vec{V}_{(M)}.\overrightarrow{MN} = \vec{V}_{(N)}.\overrightarrow{MN}$

Définition : Champ de moments

> *Un champ de moments est un champ de vecteurs tel qu'il existe un vecteur* $\vec{U} \in (E)$ *tel que* $\forall M,N \in (\varepsilon)$ $\vec{V}_{(M)} = \vec{V}_{(N)} + \vec{U}\wedge\overrightarrow{NM} = \vec{V}_{(N)} + \overrightarrow{MN}\wedge\vec{U}$

Remarque : Théorème de Delassus :

Il est possible de démontrer que : $\boxed{\text{Champ équiprojectif} \Leftrightarrow \text{Champ de moments}}$

Démonstration :

- Champ de moments $\Rightarrow$ Champ équiprojectif

  Le champ étant un champ de moments $\forall (M,N) \in (\varepsilon)^2$, $\exists \vec{U} \in (E)/$

$$\begin{array}{rrcll}
 & \vec{V}_{(M)} & = & \vec{V}_{(N)} + \vec{U}\wedge\overrightarrow{NM} & \\
\Rightarrow & \vec{V}_{(M)}.\overrightarrow{NM} & = & \left(\vec{V}_{(N)} + \vec{U}\wedge\overrightarrow{NM}\right).\overrightarrow{NM} & \\
\Rightarrow & \vec{V}_{(M)}.\overrightarrow{NM} & = & \vec{V}_{(N)}.\overrightarrow{NM} + \cancel{\overrightarrow{NM}.\left(\vec{U}\wedge\overrightarrow{NM}\right)} & \text{produit mixte à deux termes colinéaires} \\
\Rightarrow & \vec{V}_{(M)}.\overrightarrow{NM} & = & \vec{V}_{(N)}.\overrightarrow{NM} & \Rightarrow \quad \text{donc un champ équiprojectif}
\end{array}$$

- Champ équiprojectif $\Rightarrow$ Champ de moments : vous n'avez pas les outils matriciels pour le faire.

4.2 Torseurs

4.2.1 Définition d'un torseur

Un torseur $\mathscr{T}$ est l'association de :

- Un vecteur résultant $\vec{R}$ (identique en tout point de l'espace)
- Un champ de moments $\vec{M}$ (dépendant du point où on le calcule)

Il vérifie $\forall(A,B)\in(\varepsilon)^2$ l'équation $\underbrace{\vec{M}_{(B)}}_{B} = \underbrace{\vec{M}_{(A)}}_{A} + \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{BA} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{R}$ (équation BABAR pour ne pas se tromper...)

$\vec{R}$ est appelé la résultante et $\overrightarrow{M_{(A)}}$ le moment en A. Ces deux vecteurs sont alors appelés les éléments de réduction du torseur en A. on note le torseur $\left\{\mathscr{T}\right\}$ comme suit :

$$\mathscr{T} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{M}_{(A)}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}R_x.\vec{x}+R_y.\vec{y}+R_z.\vec{z}\\ M_{Ax}.\vec{x}+M_{Ay}.\vec{y}+M_{Az}.\vec{z}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc}R_x & M_{Ax}\\ R_y & M_{Ay}\\ R_z & M_{Az}\end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les coordonnées de $\vec{R}$ et $\vec{M}_{(A)}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont appelées les coordonnées pluckériennes du torseur $\mathscr{T}$.

4.2.2 Opération sur les torseurs

4.2.2.1 Addition

Soient deux torseurs $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ tels que : $\mathscr{T}_1 = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_1\\ \vec{M}_{(A)1}\end{array}\right\}$ et $\mathscr{T}_2 = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(A)2}\end{array}\right\}$.

Soit $\mathscr{T}_S$ la somme des deux torseurs. Alors la résultante $\vec{R}_S$ est égale à la somme des résultantes $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ et le moment $\vec{M}_{(A)S}$ exprimé en A est égal à la somme des moments $\vec{M}_{(A)1}$ et $\vec{M}_{(A)2}$ exprimés en A.

$$\mathscr{T}_S = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2 = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_1\\ \vec{M}_{(A)1}\end{array}\right\} + {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(A)2}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_1+\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(A)1}+\vec{M}_{(A)2}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{R}_s = \vec{R}_1+\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(A)S} = \vec{M}_{(A)1}+\vec{M}_{(A)2}\end{array}\right.$$

Attention ! Ajouter deux torseurs dont les éléments de réduction sont exprimés en des points différents n'a aucun sens.

4.2.2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $\mathscr{T}_1$ un torseur et λ un réel, alors : $\lambda.\mathscr{T}_1 = {}_A\left\{\begin{array}{c}\lambda.\vec{R}_1\\ \lambda.\vec{M}_{(A)}\end{array}\right\}$

4.2.2.3 Comoment de deux torseurs

On appelle comoment de deux torseurs $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$, la quantité scalaire : $\boxed{\mathscr{T}_1\otimes\mathscr{T}_2 = \vec{R}_1.\vec{M}_{(A)2}+\vec{R}_2.\vec{M}_{(A)1}}$
Comme pour la somme, les moments doivent être exprimés au même point.

Remarque : Le résultat ne dépend pas du point A choisi. C'est un invariant.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 &= {}_B\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_1\\ \vec{M}_{(B)1}\end{array}\right\} \otimes {}_B\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(B)2}\end{array}\right\} = \vec{R}_1.\vec{M}_{(B)2} + \vec{R}_2.\vec{M}_{(B)1}\\
&= \vec{R}_1.\left(\vec{M}_{(A)2} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2\right) + \vec{R}_2.\left(\vec{M}_{(A)1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1\right)\\
&= \vec{R}_1.\vec{M}_{(A)2} + \vec{R}_2.\vec{M}_{(A)1} + \cancel{\vec{R}_1.\left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2\right)} + \cancel{-\vec{R}_2.\left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1\right)}\\
&= \vec{R}_1.\vec{M}_{(A)2} + \vec{R}_2.\vec{M}_{(A)1} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_1\\ \vec{M}_{(A)1}\end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_2\\ \vec{M}_{(A)2}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

4.2.2.4 Automoment d'un torseur

On appelle automoment $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ du torseur $\mathcal{T}$ la moitié du comoment de ce torseur par lui-même.

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}.\mathcal{T} \otimes \mathcal{T} = \vec{R}.\vec{M}_A}$$

4.2.3 Axe central d'un torseur

On appelle axe central d'un torseur $\mathcal{T}$ l'ensemble des points I pour lesquels le champ $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$. Autrement dit, on cherche les points $I \in (\varepsilon)/\exists \lambda \in \mathbb{R}/\vec{M}_{(I)} = \lambda.\vec{R}$ (ou encore $\vec{M}_{(I)} \wedge \vec{R} = \vec{0}$, avec $\vec{R} \neq \vec{0}$)

I est alors appelé point central du torseur. Soit $\mathcal{T} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{M}_{(A)}\end{array}\right\}$, avec A un point quelconque de l'espace affine et H un point de l'axe central tel que $\vec{M}_{(H)} = \lambda.\vec{R}$.

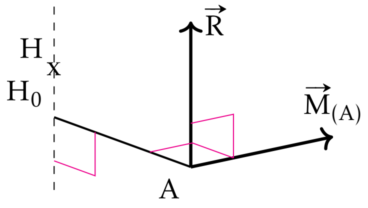
Alors :

$$\vec{M}_{(H)} = \vec{M}_{(A)} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{R} = \lambda.\vec{R}$$

En faisant le produit vectoriel par $\vec{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{R} \wedge \vec{M}_{(H)} = \vec{R} \wedge \vec{M}_{(A)} + \vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{HA} \wedge \vec{R}\right) &= \vec{0}\\
\vec{R} \wedge \vec{M}_{(A)} + \underbrace{\left(\vec{R}.\vec{R}\right)}_{\left\|\vec{R}\right\|^2}\overrightarrow{HA} - \underbrace{\left(\vec{R}.\overrightarrow{HA}\right)}_{\mu}\vec{R} &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{H_0A} = \frac{\vec{M}_{(A)} \wedge \vec{R}}{\left\|\vec{R}\right\|^2}}$$



Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{HA} = \frac{\vec{M}_{(A)} \wedge \vec{R} + \mu.\vec{R}}{\left\|\vec{R}\right\|^2} \qquad (1)}$$

L'axe central est toujours une droite parallèle à $\vec{R}$.

Le moment d'un torseur est minimum pour tous les points de l'axe central.

L'ensemble cherché est une droite de direction $\vec{R}$. Il suffit de trouver un point de cette droite pour déterminer l'axe central. Or parmi les points H vérifiant la relation (1), il existe une solution particulière H_0 telle que $\vec{R}.\overrightarrow{AH_0} = 0$. H_0 est le pied de la perpendiculaire à l'axe central passant par A. On obtient alors :

4.2.4 Torseurs particuliers

4.2.4.1 Torseur nul

Un torseur nul $\mathbb{O}$ est un torseur dont la résultante et le moment sont nuls en au moins un point M de l'espace. Le moment est alors nul en tout point de l'espace :

$$\boxed{\mathscr{T} = {}_{\forall M}\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \mathbb{O}}$$

4.2.4.2 Torseur couple

$$\boxed{\mathscr{C} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{(A)} \end{array} \right\}}$$

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle :

Remarque : Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace et il n'y a pas d'axe central pour ce torseur.

4.2.4.3 Torseur glisseur

Un torseur glisseur est un torseur dont le vecteur résultant est non nul ($\vec{R} \neq 0$) mais dont l'automoment est nul $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.

Remarque : Le moment est donc toujours perpendiculaire à la résultante et il est nul sur l'axe central.

4.2.4.4 Décomposition d'un torseur

Un torseur peut se décomposer en un torseur glisseur $\mathscr{G}$ et un torseur couple $\mathscr{C}$. Si H est un point de l'axe centrale alors :

$$\mathscr{T} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(A)} \end{array} \right\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(H)} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{R} \end{array} \right\} = \underbrace{{}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{AH} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}}_{\mathscr{G}} + \underbrace{{}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{M(H)} \end{array} \right\}}_{\mathscr{C}}$$