CI-3 Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes

CI-3-2 Modéliser et paramétrer un mécanisme - établir sa loi entrée/sortie

Objectifs **MODELISER REPRESENTER RESOUDRE**

A la fin de la séquence, l'élève devra être capable de :

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
- **C1** Proposer une démarche de résolution
  - Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
- **E1** Rechercher et traiter des informations
  - Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique.

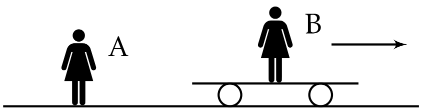
Table des matières

1 Définition

1.1 Système de référence

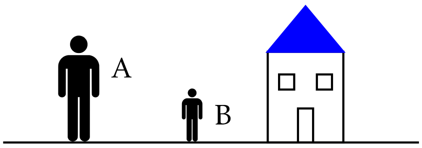
Pour lever toute ambiguïté dans l'étude des systèmes matériels, il convient d'exprimer les grandeurs par rapport à des références, d'où les nécessités suivantes :

1.1.1 Nécessité de définir une base de temps t



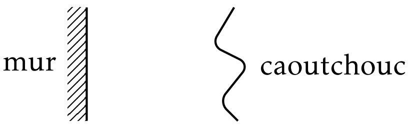
Pour A, la voiture bouge. Pour B la voiture est immobile. Il est donc nécessaire de définir celui qui observe. A est muni de t (une base de temps) pour quantifier le déplacement.

1.1.2 Nécessité de définir un repère $\mathcal{R}(\mathrm{O},\mathcal{B})$



A voit la maison petite et loin. B voit la maison grande et proche. Il est nécessaire de définir un repère, qui caractérise la taille et la position.

1.1.3 Nécessité de définir un référentiel noté E



Si la référence est le mur, le caoutchouc se déforme. Si la référence est le caoutchouc, le mur se déforme. Il est nécessaire de définir un référentiel qui ne se déforme pas, correspondant à un solide indéformable.

Un solide S est indéformable si et seulement si $\forall \mathrm{M},\mathrm{N} \in \mathrm{S}, \left\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right\| = cte$

Définition : Système de référence - référentiel

> *Système composé d'une base de temps et d'un repère dans l'espace* $\mathrm{E}(t,\mathcal{R})$

Hypothèse : t est le même quelque soit le référentiel E.

Changer de système de référence revient donc à changer de référentiel E. Comme E est repéré par $\mathcal{B}$, sa Base OrthoNormée Directe (BOND), l'étude du point M par rapport à E est identique à l'étude de M par rapport à $\mathcal{R}$.

1.2 Le point

Définition : Point

> *Entité géométrique de dimension nulle dans l'espace affine et représentable par ses coordonnées dans un repère* $\mathcal{R}(\mathrm{O},\mathcal{B})$

Soit M un point de l'espace et $\mathcal{B} = (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ une base de l'espace affine ε :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z} = \begin{array}{c|c} & x(t) \\ & y(t) \\ \mathcal{B} & z(t) \end{array}}$$

$(x(t),y(t),z(t))$ sont appelées coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Hypothèse Ces coordonnées sont souvent supposées deux fois continues et deux fois dérivables.

1.3 Trajectoire d'un point

1.3.1 Définitions

DÉFINITION : Position

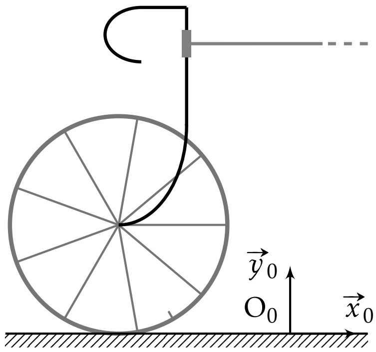
La fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ *est appelée position de* M.

DÉFINITION : Trajectoire

La trajectoire de M *entre les instant* t_1 *et* t_2 *est l'ensemble des positions occupées par* M *pendant ce temps.*

1.3.2 Exemple

La roue d'une bicyclette roule sans glisser sur le sol et reste toujours dans le plan $(\mathrm{O}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.



La trajectoire du point M qui suit la valve de la roue est :

- un point dans le système de référence associé à la roue
- un cercle dans le système de référence associé au cadre de la bicyclette
- une cycloïde dans le système de référence associé au sol

2 Liaisons entre les solides

2.1 Contact entre deux solides

2.1.1 Liaisons géométriques

Une liaison entre deux solides est une relation de contact entre ces deux solides. Ce contact est caractérisé par sa géométrie et les mouvements relatifs qu'il autorise entre les deux solides. L'analyse des liaisons se fait en considérant la nature des surfaces en contact.

REMARQUE : Les zones de contact réelles entre deux solides sont surfaciques. Par contre la modélisation par solide rigide des pièces réelles introduit la notion de zone de contact ponctuelle et linéique. Si on introduit une notion de déformation dans le comportement des solides, les zones de contact deviennent surfaciques.

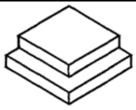
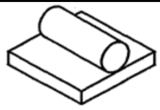
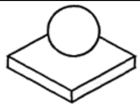
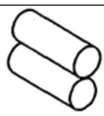
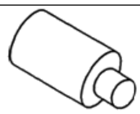
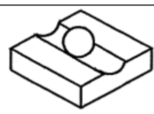
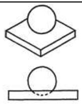
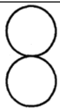
2.1.2 Géométrie des contacts

On considère les contacts entre trois types de surfaces : plan, cylindre ou sphère.

Les zones de contacts sont de diverses natures et dépendent de la notion de contact intérieur ou extérieur.

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	Plan	Droite	Point
Cylindre	-	Droite ou Cylindre	Cercle
Sphère	-	-	Sphère ou Point

2.2 Degrés de liberté

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan			
Cylindre	-	 ou 	
Sphère	-	-	 ou 

Pour les liaisons, on définit un repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts.
Un repère est ensuite associé à chaque solide.
On détermine ensuite les possibilités de mouvement entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre) autorisés, sans changer la nature du contact.

Définition : Nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides (ddl)

> *Nombre de mouvements relatifs indépendants que la liaison autorise entre ces deux solides.*

Tableau des déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \delta\theta_x & \delta x \\ \delta\theta_y & \delta y \\ \delta\theta_y & \delta z \end{array} \right\}$$

Le nombre de degrés de liberté est au plus égal à 6 : 3 translations et 3 rotations. Si il est égal à 0, la liaison est dite encastrement. S'il est égal à 6, la liaison est dite libre.

2.3 Les liaisons normalisées

Les degrés de liberté peuvent être exprimés en terme cinématique. Les liaisons les plus courantes rencontrées en construction mécanique sont normalisées par l'AFNOR (norme NF E 04-015 et norme NF en ISO 3952-1). A chaque liaison est associée un nom et une schématisation (cf dernières pages du cours Fig 1).

Les liaisons normalisées sont parfaites, c'est à dire qu'elles ont les caractéristiques suivantes :

- Les pièces mécaniques sont des solides indéformables.
- Les surfaces sont géométriquement parfaites.
- Les jeux sont nuls.
- Le contact est sans frottement ni adhérence.

3 Modélisation cinématique d'un mécanisme

Définition : Mécanisme

> *Ensemble de pièces mécaniques (solides) reliées entre elles par des liaisons.*

3.1 Classe d'équivalence cinématique

Définition : Classe d'équivalence cinématique

> *Ensemble de pièces qui n'ont aucun mouvement relatif entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (liaison encastrement) et ont donc le même mouvement.*

Remarques :

- Toutes les pièces qui se déforment sont à exclure des groupes cinématiques (ressorts,...).
- Les éléments roulants des roulements, constituant chacun un groupe cinématique, ne sont pas pris en compte.

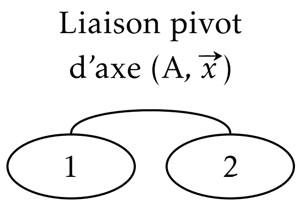
3.2 Graphe des liaisons

Le graphe des liaisons répertorie les classes d'équivalence cinématique et les liaisons entre elles. Chaque classe d'équivalence cinématique sera représentée par une ellipse et chaque liaison entre classe sera représentée par une ligne joignant les deux ellipse. Chaque ligne sera repérée afin de décrire la liaison.

Exemple : la classe d'équivalence **1** est en contact à la classe d'équivalence **2** par l'intermédiaire d'une liaison pivot.

Pour établir le graphe des liaisons, il faut :

1. Etablir les classes d'équivalence cinématique
2. Rechercher les classes en contact.
3. Pour chaque contact, définir les mouvements relatifs autorisés.
4. Déduire des mouvements relatifs, le type de liaison correspondant à l'aide du tableau des liaisons normalisées.
5. Nommer et définir les caractéristiques géométriques de la liaison.



Remarque : Si un élément roulant relie deux classes d'équivalences, il faut prendre en compte le modèle de liaison de l'élément roulant. On associe ainsi un modèle de liaison pour chaque roulement entre la bague intérieure liée à un solide et la bague extérieure liée à un autre solide.

3.3 Schéma cinématique

Définition : Schéma cinématique

> *Représentation graphique d'un graphe des liaisons usuelles au moyen des symboles normalisés.*

Méthode de construction d'un schéma cinématique :

1. Mise en place de la géométrie.
   - Choisir un mode de représentation adapté à l'agencement des différentes liaisons (vue plane, perspective isométrique) de manière à obtenir un schéma lisible et clair.
   - Mettre en place les points et les axes mis en évidence dans le graphe des liaisons (caractéristiques géométriques des liaisons).
2. Choix d'une couleur par classe d'équivalence (à reporter sur le graphe des liaisons).
3. Installation des symboles normalisés de chaque liaison en respectant leurs caractéristiques géométriques et les couleurs du graphe des liaisons (une liaison fait intervenir 2 couleurs différentes).
4. Jonction matière : A l'aide de simples traits réunir les « sorties » des symboles pour représenter les sous-ensembles de pièces sans mouvement relatif. Reporter les numéros des classes d'équivalence sur ces sous-ensembles.

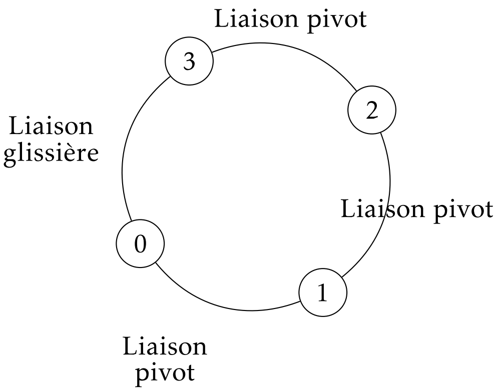
3.4 Cas de la modélisation plane

Dans un problème considéré comme plan, un solide possède au maximum trois degrés de liberté par rapport à un repère de référence : deux translations dans le plan, et une rotation selon un axe perpendiculaire au plan.

Quatre modèles de liaisons peuvent être retenues : la liaison encastrement, la liaison pivot, la liaison glissière et la liaison ponctuelle plane.

4 Étude géométrique des chaînes simples fermées de solides

4.1 Définition



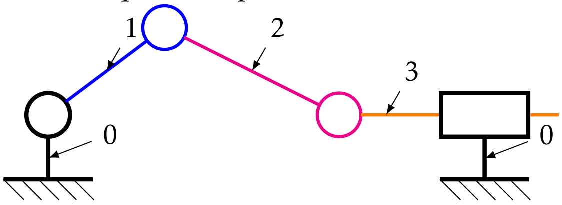
Nom	Bâti	Manivelle	Bielle	Piston
Numéro	0	1	2	3

Définition : Chaine simple fermée

> *Chaîne simple ouverte dont les deux solides extrêmes ont une liaison entre eux.*

Exemple : Micro moteur, en modélisation plane.

Le graphe des liaisons est donné à gauche et le schéma cinématique est représenté ci-dessous en modélisation plane.

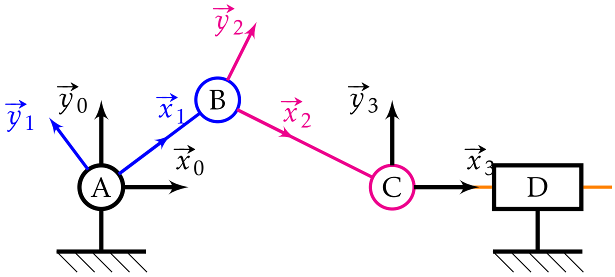


4.2 Paramétrage

4.2.1 Paramétrage des solides

A chaque solide, on associe un repère. Il est construit en prenant en compte les caractéristiques géométriques du solide et de ses liaisons.

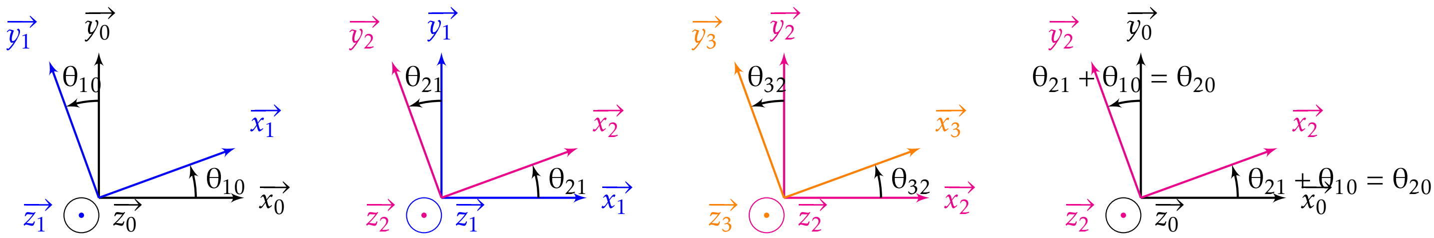
$\overrightarrow{AB} = e.\vec{x}_1 \qquad \overrightarrow{BC} = L.\vec{x}_2$



4.2.2 Paramétrage des liaisons

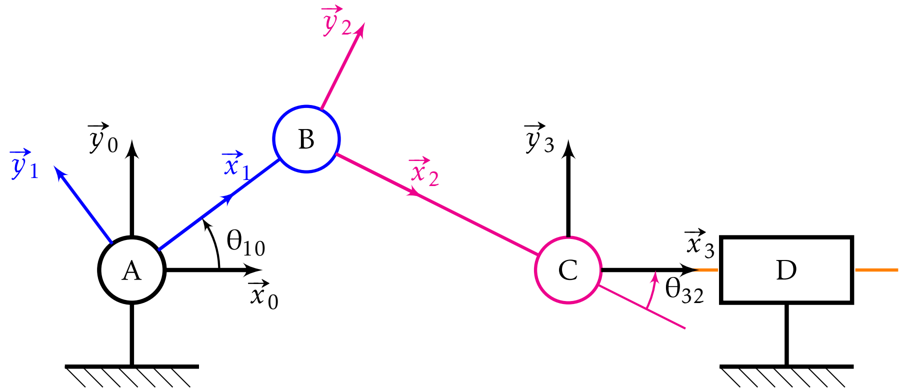
on associe à chaque liaison autant de paramètres que de degrés de liberté dans la liaison :

- Liaison bâti / manivelle : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{10}$.
- Liaison manivelle / bielle : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta_{21}$.
- Liaison bielle / piston : $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \theta_{32}$.
- Liaison piston / bâti : $\overrightarrow{AC} = \lambda(t).\vec{x}_0$, $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = 0°$.



Remarque :

Penser à faire les figures géométrales pour chaque angle :



4.3 Étude géométrique

Objectif : déterminer des relations entre les paramètres des solides et des liaisons.

4.3.1 Aspect angulaire

On établit une fermeture angulaire :
$$\begin{array}{rcl} (\vec{x}_0,\vec{x}_1)+(\vec{x}_1,\vec{x}_2)+(\vec{x}_2,\vec{x}_3)+(\vec{x}_3,\vec{x}_0) & = & 0 \\ \text{soit} \quad \theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32} & = & 0 \end{array}$$

4.3.2 Aspect linéaire

On établit une fermeture géométrique (relation de Chasles obtenue en passant par les différents solides d'une chaîne fermée) :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad e.\vec{x}_1+\mathrm{L}.\vec{x}_2-\lambda(t).\vec{x}_0=\vec{0}$$

On choisit ensuite une base de projection de manière à faire apparaître les paramètres. Ce choix doit être judicieux pour limiter les calculs (choix d'un repère intermédiaire entre les différents repères).

Ainsi, pour la fermeture géométrique, on obtient :

$$e.\vec{x}_1+\mathrm{L}.\vec{x}_2-\lambda(t).\vec{x}_0=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcll} e.\cos(\theta_{10}(t))+\mathrm{L}.\cos(\theta_{32}(t))-\lambda(t) & = & 0 & \text{(projection selon } \vec{x}_0) \\ -e.\sin(\theta_{10}(t))+\mathrm{L}.\sin(\theta_{32}(t)) & = & 0 & \text{(projection selon } \vec{y}_0) \\ \text{mécanisme plan donc} \quad 0 & = & 0 & \text{(projection selon } \vec{z}_0) \end{array}\right.$$

4.4 Loi entrée sortie

Définition : Loi d'entrée-sortie d'un mécanisme

> *Relation entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie du mécanisme.*

Dans l'exemple du système bielle manivelle, on peut supposer que la pièce d'entrée est la manivelle, et la pièce de sortie, le piston. On cherche donc à déterminer la relation entre $\theta_{10}(t)$ et $\lambda(t)$.

Très souvent, pour obtenir les relations recherchées, par exemple éliminer un angle, on utilise le théorème de Pythagore : $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$. Pour éliminer un paramètre de longueur a devant un cos ou devant un sin, on utilise la formule de la tangente : $\tan(\theta) = \dfrac{a.\sin(\theta)}{a.\cos(\theta)}$. Ainsi avec l'objectif donné :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e.\cos(\theta_{10}(t)) + \mathrm{L}.\cos(\theta_{32}(t)) - \lambda(t) & = & 0 \\ -e.\sin(\theta_{10}(t)) + \mathrm{L}.\sin(\theta_{32}(t)) & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{L}.\cos(\theta_{32}(t)) & = & \lambda(t) - e.\cos(\theta_{10}(t)) \\ \mathrm{L}.\sin(\theta_{32}(t)) & = & e.\sin(\theta_{10}(t)) \end{array}\right.$$

$$\mathrm{L}^2.\cos^2(\theta_{32}(t)) + \mathrm{L}^2.\sin^2(\theta_{32}(t)) = (\lambda(t) - e.\cos(\theta_{10}(t)))^2 + e^2.\sin^2(\theta_{10}(t)) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}^2 = \lambda(t)^2 - 2.\lambda(t).e.\cos(\theta_{10}(t)) + e^2$$

ce qui est un polynôme du second degré en $\lambda(t)$. Cependant, on aurait pu être plus efficace sans développer :

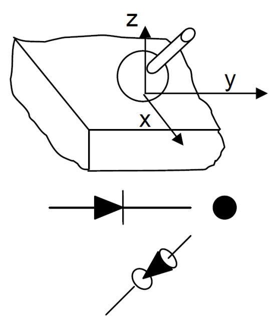
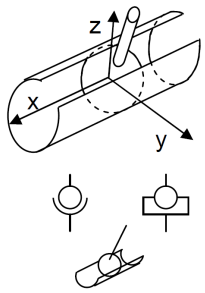
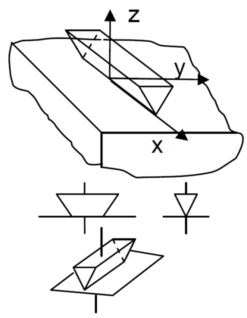
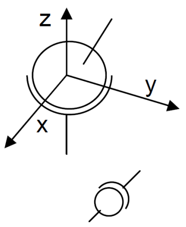
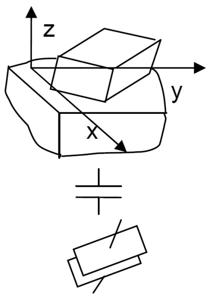
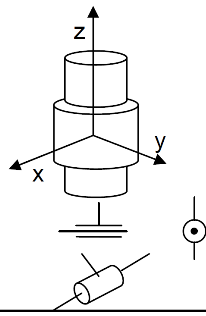
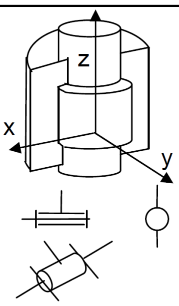
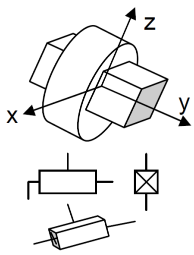
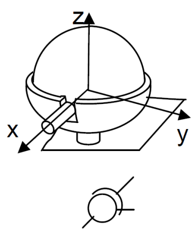
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{L}^2 = (\lambda(t) - e.\cos(\theta_{10}(t)))^2 + e^2.\sin^2(\theta_{10}(t)) & \Rightarrow & (\lambda(t) - e.\cos(\theta_{10}(t)))^2 = \mathrm{L}^2 - e^2.\sin^2(\theta_{10}(t)) \\ & \Rightarrow & \lambda(t) = e.\cos(\theta_{10}(t)) \pm \mathrm{L}.\sqrt{1 - \left(\frac{e}{\mathrm{L}}.\sin(\theta_{10}(t))\right)^2} \end{array}$$

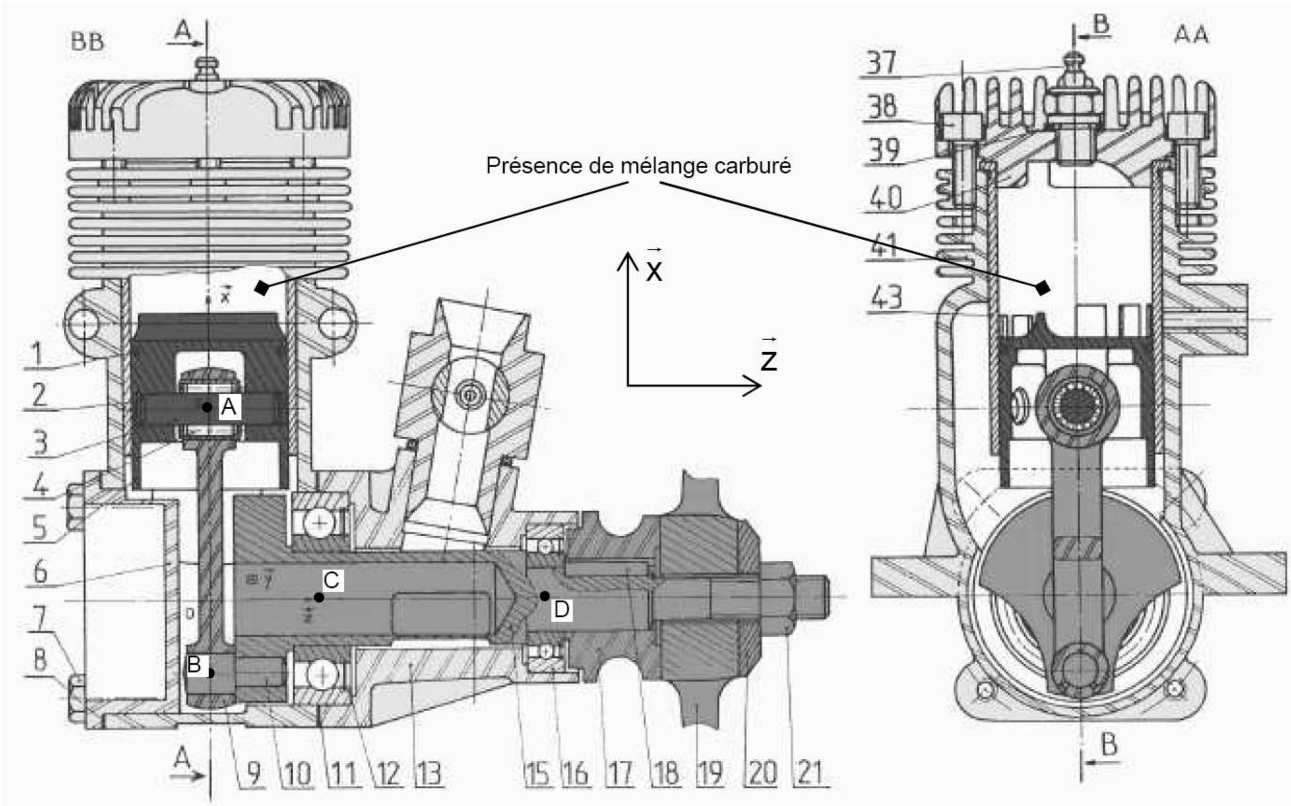
Remarque : ce mécanisme est prévu de fonctionner avec $e \leq \mathrm{L}$.

Pour ne pas faire apparaître θ_{32}, on peut utiliser le carré scalaire : $(\mathrm{L}.\vec{x}_2)^2 = (\lambda(t).\vec{x}_0 - e.\vec{x}_1)^2$. Ainsi :

$$\mathrm{L}^2 = \lambda(t)^2 - 2.\lambda(t).e.\vec{x}_0.\vec{x}_1 + e^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}^2 = \lambda(t)^2 - 2.\lambda(t).e.\cos(\theta_{10}(t)) + e^2$$

Documents annexes

 Degrés de liberté	 Degrés de liberté	 Degrés de liberté
 Degrés de liberté	 Degrés de liberté	 Degrés de liberté
 Degrés de liberté	 Degrés de liberté	 Degrés de liberté



ddl	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique
0 ddl 0 tr 0 rt	Encastrement			$\forall M \in (\varepsilon)$
1 ddl 1 tr 0 rt	Glissière			1 direction $\vec{x}$ $\forall M \in (\varepsilon)$
1 ddl 0 tr 1 rt	Pivot			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$
1 ddl 1 tr 1 rt	Hélicoïdale			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$
2 ddl 1 tr 1 rt	Pivot glissant			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$
2 ddl 0 tr 2 rt	Rotule à doigt			1 point A, centre de liaison

ddl	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique
3 ddl 0 tr 3 rt	Rotule			1 point A, centre de liaison
3 ddl 2 tr 1 rt	Appui plan			Normal au plan $\vec{y}$, $\forall M \in (\varepsilon)$
4 ddl 1 tr 3 rt	Linéaire annulaire			1 axe $(A, \vec{x})$, centre de sphère A
4 ddl 2 tr 2 rt	Linéaire rectiligne			Normal au plan $\vec{y}$, Droite de contact $(A, \vec{x})$
5 ddl 2 tr 3 rt	Ponctuelle			Normal au plan $\vec{y}$, point de contact A

Figure 1 – Liaisons normalisées