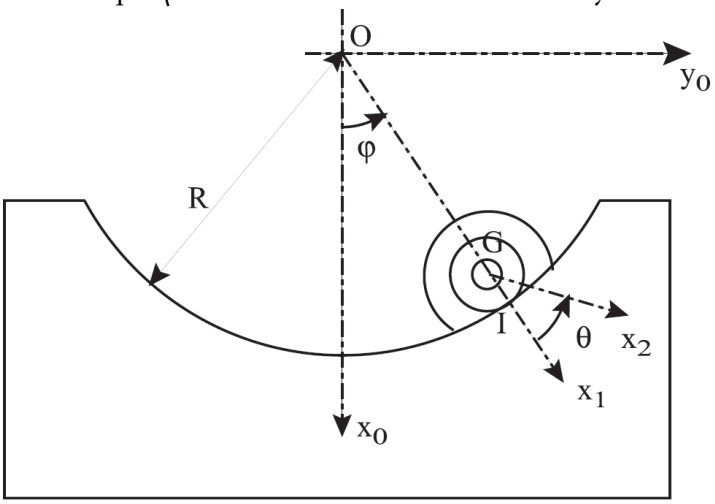
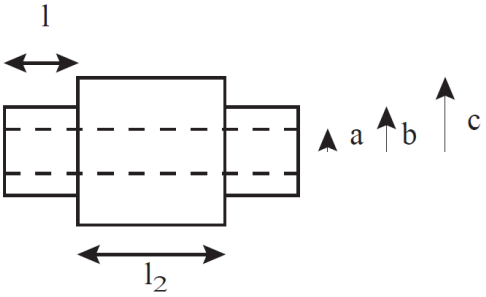
Td CI-2 : Prévoir et vérifier les performances dynamiques et énergétiques des systèmes.

Exercice 1 : Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

Un solide (S_2) de révolution d'axe $(G, \vec{z}_0)$ roule sans glisser sur un solide (S_0) possédant deux pistes de roulements cylindriques de rayon (R). Le solide (S_2) est constitué de trois cylindres de révolution coaxiaux homogènes et de masse volumique ρ. Les dimensions des différents cylindres sont indiquées sur le dessin ci-dessus.





Q - 1 : *En supposant qu'il y a roulement sans glissement en (I) entre* (S_0) *et* (S_2)*, déterminer une relation liant* $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, *r, et* R.

Q - 2 : *Donner la forme la plus simple de l'opérateur d'inertie en* G, *du solide 2* $\mathbb{I}(G, 2)$.

Q - 3 : *Appliquer le PFD au solide 2 dans le repère galiléen lié à 0.*

Q - 4 : *Donner l'équation de mouvement (équation qui permet de connaître la loi d'évolution de* (φ) *en fonction du temps).*

Q - 5 : *Donner la condition que doit vérifier la valeur du coefficient de frottement* (f) *pour qu'il n'y ait pas de glissement entre les deux solides.*

Q - 6 : *Retrouver l'équation de mouvement via le théorème de l'énergie cinétique.*

Exercice 2 : Cabrage d'une moto

2.1 Présentation

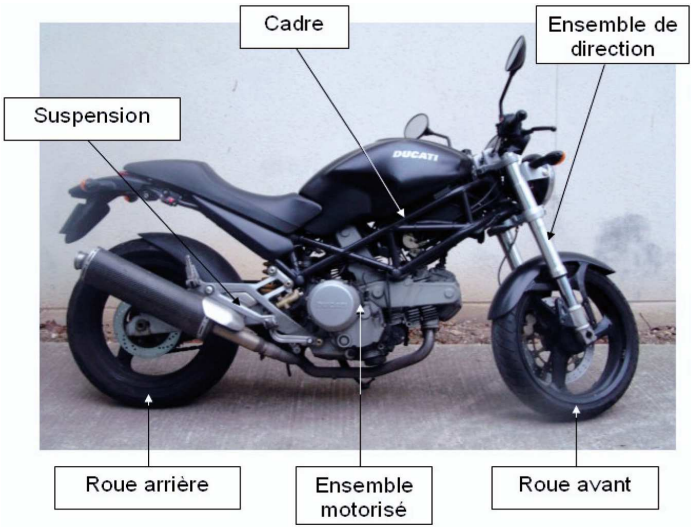
On étudie le comportement dynamique en phase d'accélération. On adopte une modélisation simplifiée, dans laquelle la moto est constituée de trois solides :

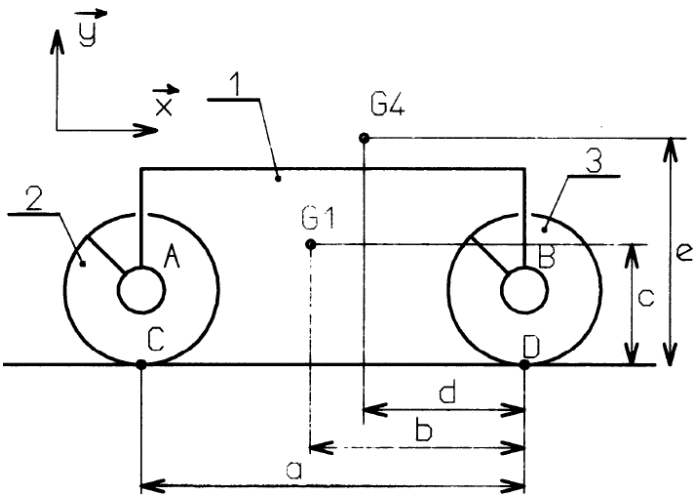
- cadre de la moto
- roue avant
- roue arrière

On note M_1 la masse du cadre seul, G_1 son centre de masse. Le pilote, noté 4, est considéré comme un solide de masse M_4, solidaire du cadre. On pourra noter 14 le solide constitué du cadre et du pilote. On note m la masse d'une roue, et I le moment d'inertie d'une roue par rapport à l'axe de la liaison pivot roue/châssis. On note A et D les centres d'inertie des roues. On note R le rayon d'une roue.

Les deux roues sont supposées identiques. On note R = AC = BD le rayon des roues. Le mouvement est plan. Les hypothèses de calcul sont les suivantes:

- chaque roue est en contact ponctuel avec la route, considérée comme galiléenne
- on note 0 le référentiel de la route. Dans les conditions normales de conduite, les roues restent en contact avec le sol, sans glissement au niveau des points de contact. Bien entendu, il y a adhérence entre chaque roue et le sol. On note μ_0 le coefficient d'adhérence, identique pour les deux points de contact. On le suppose égal au coefficient de frottement.
- on note $\vec{y}_g$ la verticale ascendante et g l'accélération de la pesanteur.
- la moto se déplace en ligne droite





On note $\vec{v} = V\vec{x}$ le vecteur vitesse $\vec{V}_{(G,1/0)}$, où 0 représente la route, supposée galiléenne.

2.2 Questions

Chacune des deux roues est munie d'un frein à disque. On note C_{av} et C_{ar} la valeur algébrique des couples de freinage exercés par le châssis sur roues avant et arrière respectivement.

Q - 1 : *On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre les pneus et la route. Déterminer* $\dot{V}$ *en fonction de* C_{av} *et* C_{ar}*, et des autres paramètres utiles. Pour chaque application du PFD, on précisera le système isolé, et on fera un bilan des actions extérieures.*

Q - 2 : *Déterminer le torseur des actions mécaniques exercées par le châssis sur chaque roue par l'intermédiaire des liaisons pivot, en fonction de* C_{av} *et* C_{ar}*, des paramètres de masse et de la géométrie.*

Pour toute la suite, on néglige l'inertie des roues ($m = 0$ et $I = 0$).

Q - 3 : *Déterminer la valeur de* C_{av} *et* C_{ar} *à partir de laquelle il y a perte d'adhérence pour une roue au moins. On pose* $\frac{C_{ar}}{C_{av}} = k$

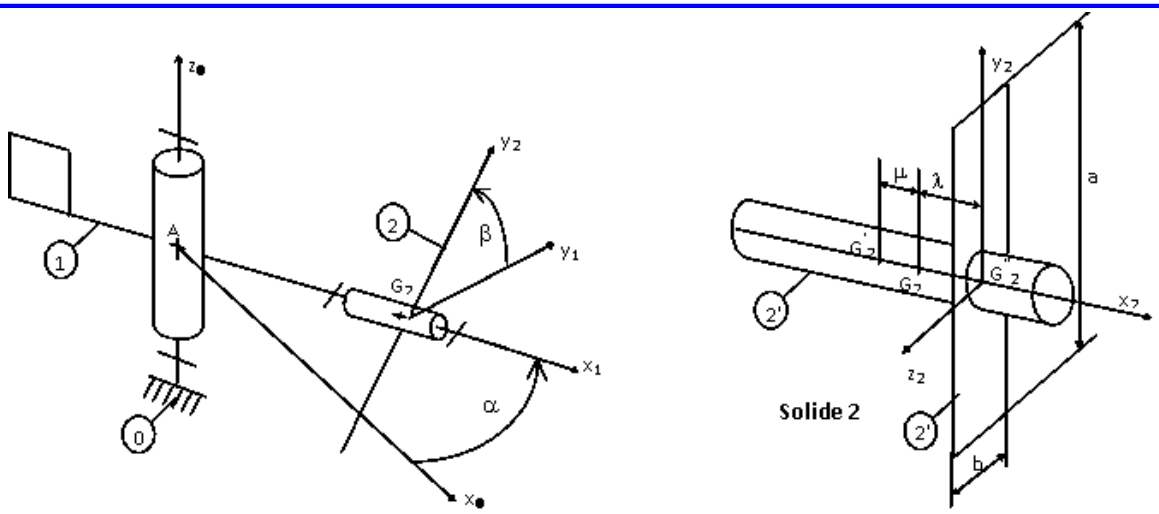
Q - 4 : *Déterminer l'expression de* $|\dot{V}|$ *en fonction de* C_{av} *et* C_{ar} *et des caractéristiques de la moto, pour* C_{av} *variant de 0 à l'infini. Tracer l'allure de la courbe* $|\dot{V}|$ *en fonction de* C_{av}*. On précisera les points remarquables.*

Q - 5 : *Déterminer la distance minimale de freinage, à partir d'un vitesse initiale V0.*

Application Numérique :

M	=	200 kg	μ_0	=	0,8 par temps sec	V_0	=	90 km/h
g	=	9,81 m.s^{-2}	μ_0	=	0,6 par temps de pluie	puis V_0	=	130 km.h-1

Exercice 3 : Eolienne (d'après Ecole de l'air 1997)



Une schématisation simplifiée d'une éolienne peut être donnée par l'ensemble constitué:

- d'un bâti **0**
- d'un solide **1** (bloc oscillant) en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le bâti **0** : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha(t)$
- d'un solide **2** (hélice et rotor de génératrice) en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec le solide **1** : $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta(t)$

Le solide **1**, de masse m_1, de centre d'inertie A, admet le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ comme plan de symétrie. Le solide **2**, de masse $m_2 = m_2' + m_2''$, de centre d'inertie G_2 (avec $\overrightarrow{AG_2} = L\vec{x}_2$) est constitué:

- d'un cylindre plein **2'** d'axe $(A, \vec{x}_2)$ de masse m'_2, de centre d'inertie G'_2, de hauteur H et de rayon R avec $\overrightarrow{G'_2G_2} = \mu.\vec{x}_2$ $(\mu > 0)$
- d'une plaque rectangulaire **2"** de masse m'_2, de centre d'inertie G'_2, de côtés **a** (suivant $\vec{y}_2$) et **b** (suivant $\vec{z}_2$) , d'épaisseur négligeable avec $\overrightarrow{G_2G''_2} = \lambda.\vec{x}_2$ $(\lambda > 0)$ 0).

Q - 1 : *Donner l'allure de la matrice d'inertie* $\mathbb{I}(A, 1)$ *du solide **1** en* A *sur le repère* $\mathcal{R}_1$ $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$*: on notera* A_1, B_1... *les termes de cette matrice d'inertie.*

Q - 2 : *Déterminer:*

2.1 la relation entre λ, μ, m'_2 *et* m''_2.

2.2 la matrice d'inertie $\mathbb{I}(G'_2, 2')$ *du solide **2'** en* G'_2 *dans le repère* $\mathcal{R}_2$ *en fonction de* H, R *et* m'_2

2.3 la matrice d'inertie $\mathbb{I}(G''_2, 2")$ *du solide 2" en* G''_2 *dans le repère* $\mathcal{R}_2$ *en fonction de a, b et* m''_2.

2.4 la matrice d'inertie $\mathbb{I}(G''_2, 2)$ *du solide **2** en* G_2 *dans le repère* $\mathcal{R}_2$.

On notera A_2, B_2... les termes de la matrice d'inertie $\mathbb{I}(G_2, 2)$ dans la suite du problème.

Q - 3 : *Déterminer le moment cinétique* $\vec{\sigma}_{(A,1/0)}$ *et la projection du moment dynamique* $\vec{\delta}_{(A,1/0)}.\vec{z}_1$.

Q - 4 : *Déterminer le moment cinétique* $\vec{\sigma}_{(G2,2/0)}$ *et la projection du moment dynamique* $\vec{\delta}_{(G2,2/0)}.\vec{x}_1$.

Q - 5 : *Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble **1+2** par rapport à **0**.*

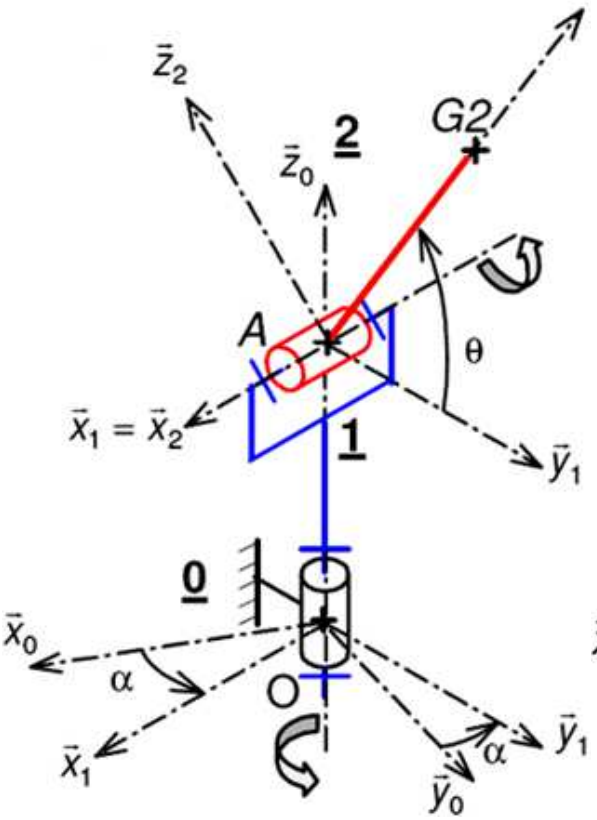
Exercice 4 : Robot ABB

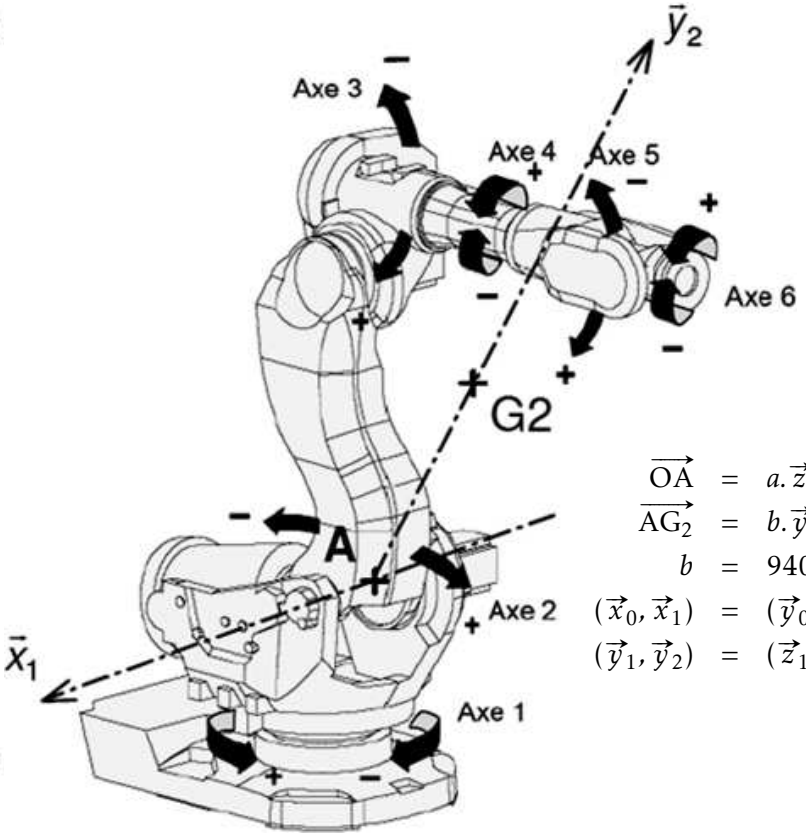
Le robot ABB IRB 7600 est un robot 6 axes utilisé dans l'industrie pour réaliser différentes opérations (palettisation, montage, ...) sur des chaînes de production.

On souhaite déterminer les couples moteur à exercer sur l'axe 1 et 2 ainsi que les efforts encaissés par les articulations pour une configuration particulière où les axes 3, 4, 5 et 6 sont verrouillés (bloqués). Configuration pour laquelle on suppose donc que le robot peut se réduire cinématiquement à deux solides dont on suppose connus les centres de gravité et les opérateurs d'inertie respectifs.

Objectif : Déterminer les couples moteur à exercer sur l'axe 1 et 2

Données et hypothèses :





$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= a.\vec{z}_0 \\
\overrightarrow{AG_2} &= b.\vec{y}_2 \\
b &= 940 \text{ mm} \\
(\vec{x}_0, \vec{x}_1) &= (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha \\
(\vec{y}_1, \vec{y}_2) &= (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta
\end{aligned}$$

- Masse du solide S_2 de centre de gravité G_2 : $M_2 = 1064$ kg
- Masse du solide S_1 de centre de gravité O : M_1
- Matrice d'inertie du solide 2 en A exprimée dans la base 2 :

$$\mathbb{I}(A, S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_2 &= 105 \text{ kg.m}^2 & B_2 &= 37 \text{ kg.m}^2 \\ C_2 &= 81 \text{ kg.m}^2 & D_2 &= 28 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

- Matrice d'inertie du solide 1 en O exprimée dans la base 1 :

$$\mathbb{I}(O, S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_1 &= \text{kg.m}^2 & B_2 &= \text{kg.m}^2 \\ C_1 &= \text{kg.m}^2 \end{aligned}$$

- Caractéristiques cinématiques souhaitées :

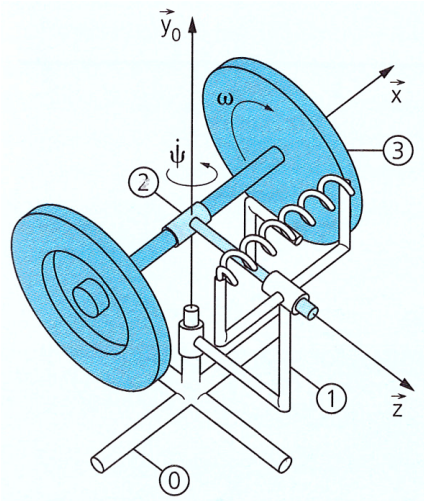
$$\dot{\alpha}_{maxi} = 75\ °/s \quad ; \quad \dot{\theta}_{maxi} = 60\ °/s \quad ; \quad \ddot{\alpha}_{maxi} = 10\ °/s^2 \quad ; \quad \ddot{\theta}_{maxi} = 10\ °/s^2$$

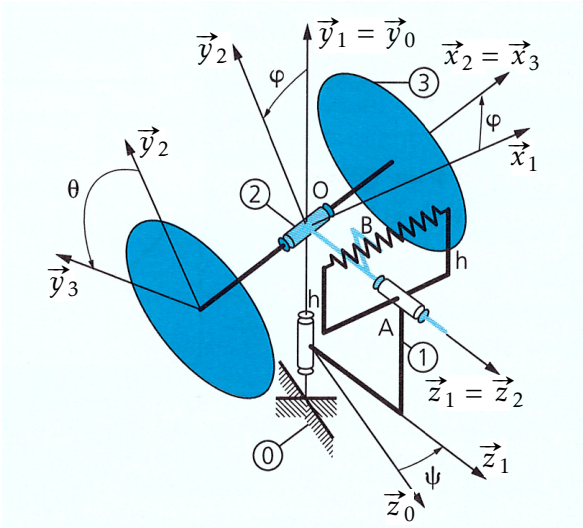
Q - 1 : *Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide S_2 de manière à déterminer le couple moteur à exercer sur l'axe 2 $(A, \vec{x}_1)$ et les actions dans la liaison entre S_1 et S_2. Calculer C_{21} pour $\theta = 10°$ et pour les caractéristiques cinématiques maximales.*

Q - 2 : *Proposer une démarche pour calculer le couple moteur à exercer sur l'axe 1 $(O, \vec{z}_0)$.*

Exercice 5 : Étude dynamique d'un gyromètre

Les figures suivantes représentent un capteur de vitesse angulaire, également appelé gyromètre, capable de mesurer la vitesse angulaire autour d'un axe, ici, l'axe $(O, \vec{y}_0)$.



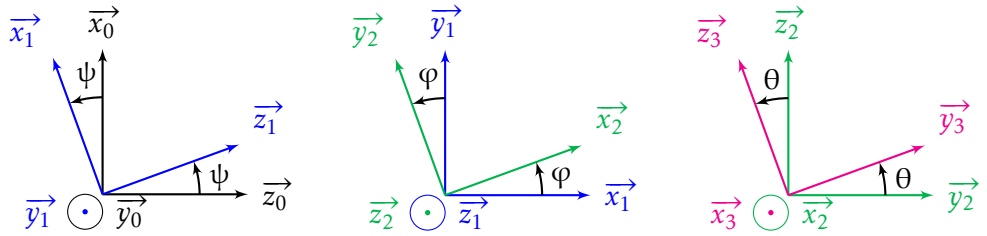


Ce capteur est constitué d'une toupie (3), animée d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire élevée (environ 100 tr/s) autour de l'axe $(O, \vec{x}_2)$.

La pièce intermédiaire (2) qui supporte le stator du moteur, est rappelée dans sa position d'équilibre par 2 ressorts identiques de raideur k : $F_r = 2.k.\varphi.h\vec{x}_1$ en supposant φ petit.

Lorsque le gyromètre (toupie en rotation) est animé d'un mouvement de roration autour de son axe d'entrée, ici l'axe $(O, \vec{y}_0)$, la toupie et la pièce intermédiaire (2) s'inclinent autour d'un axe perpendiculaire à l'axe d'entrée, ici l'axe $(O, \vec{z}_1)$. Ce phénomène, qui se nomme effet gyroscopique, peut être facilement visualisé lorsque le moteur de la toupie est alimenté.

C'est la mesure de l'angle d'inclinaison de la pièce (2) autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$ qui constitue la sortie du capteur.



La rotation propre de la toupie $\dot{\theta}$ est supposée constante, connue, imposée par le moteur dont le stator est 2 et le rotor3. On impose un mouvement d'entrée $\dot{\psi}$ constant.

Q - 1 : *Établir la relation entre $\dot{\psi}$ et φ.*