SYNTHÈSE : STATIQUE

Torseur d'action mécanique

Le champ des moments d'une force $\left\{\vec{M}_{(B,\vec{F}_P)}\right\}$ est représentable par un torseur avec comme vecteur résultante, la force appliquée $\vec{F}_P$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(B,\vec{F}_P)} &= \vec{BP}\wedge\vec{F}_P\\ &= \vec{BA}\wedge\vec{F}_P+\vec{AC}\wedge\vec{F}_P\\ &= \vec{M}_{(A,\vec{F}_P)}+\vec{BA}\wedge\vec{F}_P\end{aligned}$$

$$\boxed{\left\{\mathcal{F}_{\vec{F}_P\to\Sigma}\right\}=\underset{M}{\left\{\begin{array}{c}\vec{F}_P\\ \vec{M}_{(M,\vec{F}_P)}\end{array}\right\}}}$$

Dans le cas général d'un système S soumis à une force $\vec{F}$, le torseur $\left\{\mathcal{F}_{\vec{F}\to S}\right\}$ de l'action mécanique créée par cette force s'écrit :

$$\boxed{\left\{\mathcal{F}_{\vec{F}\to S}\right\}=\underset{M}{\left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}_{\vec{F}\to S}\\ \vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}\to S)}\end{array}\right\}}=\underset{M}{\left\{\begin{array}{cc}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{array}\right\}}_{\mathcal{B}}}$$

Lorsqu'il y a plusieurs actions mécaniques, on additionne les torseurs (attention au point où on les additionne)

$$\boxed{\left\{\mathcal{F}_{\Sigma_i[\vec{F}_i]\to\Sigma}\right\}=\sum_i\left[\underset{M}{\left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}_{\vec{F}_i\to\Sigma}\\ \vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}_i\to\Sigma)}\end{array}\right\}}\right]=\underset{M}{\left\{\begin{array}{c}\sum_i\left[\vec{\mathcal{R}}_{\vec{F}_i\to\Sigma}\right]\\ \sum_i\left[\vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}_i\to\Sigma)}\right]\end{array}\right\}}}$$

Torseur couple

Un torseur couple est de la forme

$$\left\{\mathcal{F}_{\vec{F}\to S}\right\}=\underset{M}{\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}\to S)}\end{array}\right\}}$$ avec $\vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}\to S)}\neq\vec{0}$.

Torseur glisseur

Un torseur glisseur est de la forme

$$\left\{\mathcal{F}_{\vec{F}\to S}\right\}=\underset{A}{\left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}_{\vec{F}\to S}\\ \vec{0}\end{array}\right\}}$$ avec $\forall M$, $\vec{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F}\to S)}.\vec{\mathcal{R}}_{\vec{F}\to S}=0$.

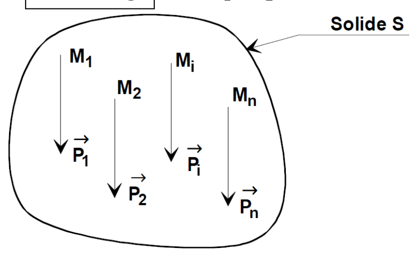
Moyen mnémotechnique de retrouver les torseurs des liaisons parfaites

$$\left\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\right\}\otimes\left\{\mathcal{F}_{S_2\to S_1}\right\}=0$$

On peut donc remplacer de façon duale les zéros du torseur cinématique pour obtenir le torseur des actions mécaniques et inversement. Attention toute fois à ne pas se tromper de colonne et dans le cas de la liaison hélicoïdale !

Action de la pesanteur

Au niveau de la surface de la terre, un point matériel de masse m est attiré, en son centre de gravité G, vers le sol par une force $\boxed{\vec{P}=m.\vec{g}}$. Chaque point matériel M_i d'un solide S est soumis à cette attraction terrestre :



Quand la masse est distribuée de manière continue, ce torseur prend la forme

$$\left\{\mathcal{F}_{\sum_i\vec{P}_i\to S}\right\}=\underset{A}{\left\{\begin{array}{c}\vec{R}=\displaystyle\int_{M\in S}\vec{g}.dm\\ \vec{\mathcal{M}}_{(A,\vec{P}_i\to S)}=\displaystyle\int_{M\in S}\vec{AM}\wedge\vec{g}.dm\end{array}\right\}}$$

où dm est l'élément de masse autour du point M.

Le centre de gravité G est le point définit par $\boxed{\displaystyle\int_{M\in S}\vec{GM}\wedge\vec{g}.dm=\vec{0}}$ soit encore $\boxed{\vec{AG}=\dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{M\in S}\vec{AM}.dm}$

REMARQUES :

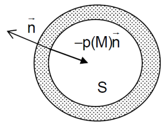
- si S possède un plan de symétrie, G y appartient
- si S possède un axe de symétrie, G y appartient
- si S possède un centre de symétrie, G est confondu avec ce centre.

$$\left\{\mathcal{F}_{gravitation\to S}\right\}=\underset{G}{\left\{\begin{array}{c}\vec{P}=m.\vec{g}\\ \vec{0}\end{array}\right\}}$$

Pression hydrostatique d'un fluide sur un solide

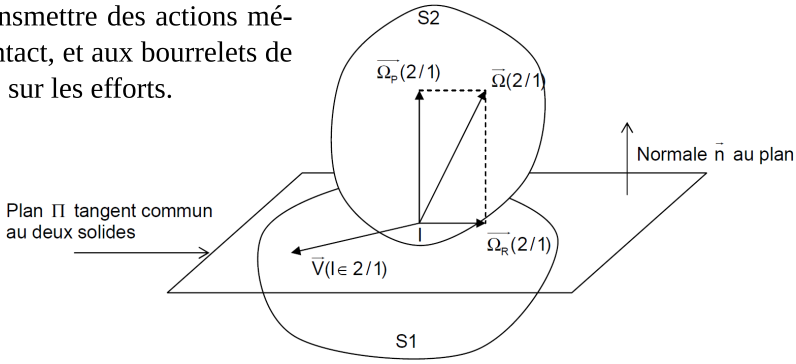
Soit $p(M)$ la pression en un point M d'un fluide. Le fluide est en contact sur la surface Σ avec le solide S, où $\vec{n}(M)$ est la normale en M dirigée vers l'extérieur du solide S. La pression exerce une densité de force localement normale à la paroi.

$$\left\{\mathcal{F}_{fluide\to S}\right\}=\underset{O}{\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\iint_{M\in\Sigma}p(M).\vec{n}(M)d\Sigma\\ \displaystyle\iint_{M\in\Sigma}\vec{OM}\wedge\left(p(M).\vec{n}(M)\right)d\Sigma\end{array}\right\}}$$



Lois de Coulomb (ou loi du frottement) pour un contact ponctuel

Entre deux solides S_1 et S_2 en contact peuvent se transmettre des actions mécaniques avec frottement (dues aux irrégularités de contact, et aux bourrelets de contact). Coulomb a déterminé empiriquement des lois sur les efforts.

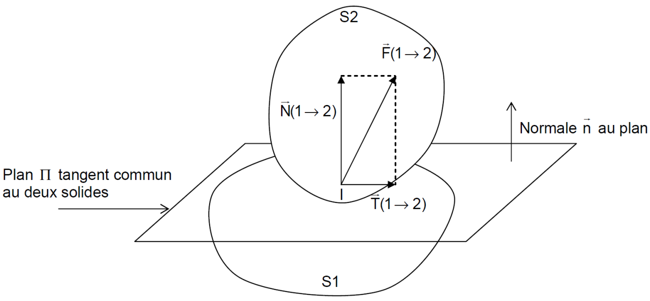


Soient

- I le point de contact
- Π le plane tangent commun aux deux solides
- $\vec{n}$ la normale à Π

Le mouvement de S_2 par rapport à S_1 est caractérisé par

- un vecteur vitesse de glissement $\vec{V}_{(I\in 2/1)}$
- un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{(2/1)}$
- un vecteur rotation de pivotement $\Omega_{p(2/1)} = (\vec{\Omega}_{(2/1)}.\vec{n}).\vec{n}$
- un vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}_{r(2/1)} = \vec{\Omega}_{(2/1)} - \vec{\Omega}_{p(2/1)}$



La force $\vec{F}_{(1\mapsto 2)}$ doit donc être située dans le cône de frottement de demi angle au sommet φ tel que $\boxed{f = \tan\varphi}$

- $\vec{F}_{(1\mapsto 2)}$ la force de S_1 sur S_2 au niveau du point I
- $\vec{N}_{(1\mapsto 2)}$ la force normale de S_1 sur S_2 au niveau du point I

  $\vec{N}_{(1\mapsto 2)} = \left(\vec{F}_{(1\mapsto 2)}.\vec{n}\right).\vec{n}$
- $\vec{T}_{(1\mapsto 2)}$ la force tangentielle de S_1 sur S_2 au niveau du point I

  $\vec{T}_{(1\mapsto 2)} = \vec{F}_{(1\mapsto 2)} - \vec{N}_{(1\mapsto 2)}$

Les lois de Coulomb spécifient que :

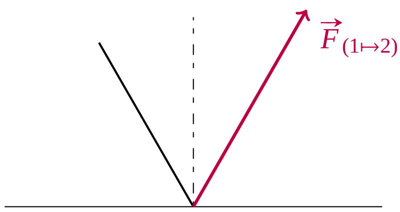
- s'il y a glissement au contact entre S_1 et S_2 :

$$\boxed{\vec{V}_{(I\in 2/1)} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \vec{T}_{(1\mapsto 2)} \wedge \vec{V}_{(I\in 2/1)} = \vec{0} \\ \vec{T}_{(1\mapsto 2)}.\vec{V}_{(I\in 2/1)} < 0 \\ \left\|\vec{T}_{(1\mapsto 2)}\right\| = f.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto 2)}\right\| \end{array}}$$

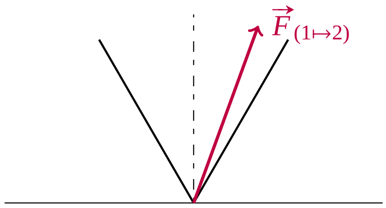
- s'il y a adhérence au contact entre S_1 et S_2 :

$$\boxed{\vec{V}_{(I\in 2/1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{T}_{(1\mapsto 2)}\right\| \leq f.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto 2)}\right\|}$$

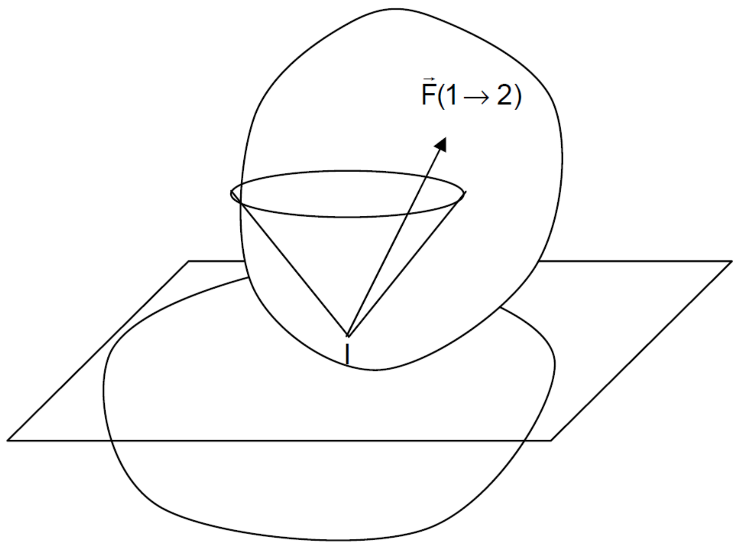
Si $\vec{F}_{(1\mapsto 2)}$ est sur le cône, il y a glissement. Si la force est dans le cône, il n'y a pas glissement. On parle alors d'adhérence où f est le coefficient de frottement entre S_1 et S_2.



Glissement

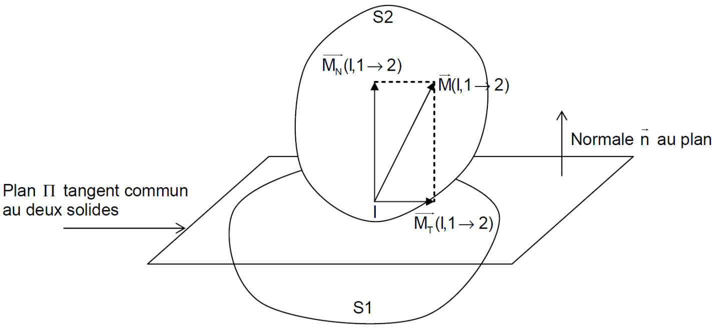


Adhérence



Lois de Coulomb concernant le roulement

Si le contact est rigoureusement ponctuel, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(I,1\to2)} = \vec{0}$. S'il ne l'est pas, des lois analogues à celles précédemment données existent pour les vecteurs rotations et moment.



Les lois de Coulomb pour le roulement s'écrivent :

- s'il y a glissement au contact entre S_1 et S_2 :

$$\vec{\Omega}_{R(2/1)} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{T(I,1\mapsto2)} \wedge \vec{\Omega}_{R(2/1)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{T(I,1\mapsto2)}.\vec{\Omega}_{R(2/1)} < 0 \\ \left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{T(I,1\mapsto2)}\right\| = f_R.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto2)}\right\| \end{array}$$

- s'il y a adhérence au contact entre S_1 et S_2 :

$$\vec{\Omega}_{R(2/1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{T(I,1\mapsto2)}\right\| \leq f_R.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto2)}\right\|$$

où f_R est le coefficient de résistance au roulement entre S_1 et S_2.

Lois de Coulomb concernant le pivotement

De la même manière, les lois de Coulomb pour le pivotement s'écrivent :

- s'il y a glissement au contact entre S_1 et S_2 :

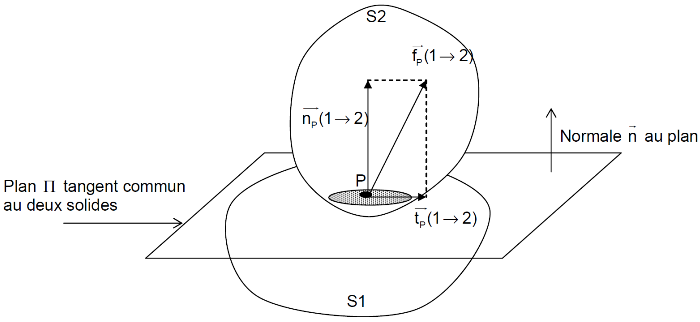
$$\vec{\Omega}_{P(2/1)} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{N(I,1\mapsto2)} \wedge \vec{\Omega}_{P(2/1)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{N(I,1\mapsto2)}.\vec{\Omega}_{P(2/1)} < 0 \\ \left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{N(I,1\mapsto2)}\right\| = f_P.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto2)}\right\| \end{array}$$

- s'il n'y a pas glissement au contact entre S_1 et S_2 :

$$\vec{\Omega}_{P(2/1)=\vec{0}} \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{N(I,1\mapsto2)}\right\| \leq f_P.\left\|\vec{N}_{(1\mapsto2)}\right\|$$

où f_P est le coefficient de résistance au pivotement entre S_1 et S_2.

Lois de Coulomb pour un contact non ponctuel



- $\vec{f}_{p(1\mapsto2)}$ la densité surfacique de force de S_1 sur S_2 au niveau du point P de la zone de contact
- $\vec{n}_{p(1\mapsto2)}$ la densité surfacique de force normale de S_1 sur S_2 au niveau du point Pde la zone de contact

  $$\vec{n}_{p(1\mapsto2)} = \left(\vec{f}_{p(1\mapsto2)}.\vec{n}\right)\vec{n}$$

- $\vec{t}_{p(1\mapsto2)}$ la densité surfacique de force tangentielle de S_1 sur S_2 au niveau du point P de la zone de contact

  $$\vec{t}_{p(1\mapsto2)} = \vec{f}_{p(1\mapsto2)} - \vec{n}_{p(1\mapsto2)}$$

$$\left\{\mathcal{F}_{1\to2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \iint \vec{f}_{p(1\mapsto2)}dS \\ \iint \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_{p(1\mapsto2)}dS \end{array}\right\}.$$

Les lois de Coulomb s'écrivent :

- s'il y a glissement au contact entre S_1 et S_2 :

$$\vec{V}_{(I\in2/1)} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{t}_{p(1\mapsto2)} \wedge \vec{V}_{(I\in2/1)} = \vec{0} \\ \vec{t}_{p(1\mapsto2)}.\vec{V}_{(I\in2/1)} < 0 \\ \left\|\vec{t}_{p(1\mapsto2)}\right\| = f.\left\|\vec{n}_{p(1\mapsto2)}\right\| \end{array}$$

- s'il y a adhérence au contact entre S_1 et S_2 :

$$\vec{V}_{(I\in2/1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{t}_{p(1\mapsto2)}\right\| \leq f.\left\|\vec{n}_{p(1\mapsto2)}\right\|$$

où f est le coefficient de frottement entre S_1 et S_2 au niveau du point P. Dans de nombreux cas, la répartition de f peut être considérée comme uniforme. Concernant celle de $\vec{n}_{p(1\mapsto2)}$, on essaye d'approcher la réalité, avec une loi mathématique permettant des calculs rapides.

Principe Fondamental de la Statique

Dans un repère galiléen $\mathcal{R}_g$, si un système matériel (Σ) est en équilibre, l'ensemble des actions mécanique extérieures est nul.

$$(\Sigma) \text{ en équilibre dans } \mathcal{R}_g \quad \Rightarrow \quad \left\{\mathcal{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}_{\Sigma\to\bar{\Sigma}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A,\Sigma\to\bar{\Sigma})} \end{array}\right\} = \left\{0\right\}$$

L'analyse de PFD montre qu'il est possible d'étendre le champ d'application du PFS à des systèmes mobiles dans les trois cas particuliers suivants :

- mouvement de translation uniforme ou mouvement de rotation uniforme d'un solide équilibré dynamiquement
- lorsque les effets des masses et des inerties peuvent être négligés devant les efforts extérieurs

Théorèmes des actions réciproques

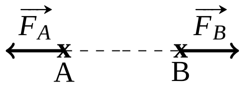
Soient deux systèmes distincts Σ_1 et Σ_2 ($\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$).

Alors le théorème des actions réciproques énonce que les actions mécaniques de Σ_1 sur Σ_2 sont opposées aux actions mécaniques de Σ_2 sur Σ_1 $\left\{\mathcal{F}_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\right\} = -\left\{\mathcal{F}_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\right\}$

Système soumis à l'action de 2 glisseurs (forces)

Lorsque système (S) est soumis à deux forces : $\vec{F}_A$ appliquée en A et $\vec{F}_B$ appliquée en B, alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B} \\ \exists\lambda / \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{F_B} \end{cases}$$



Ainsi, lorsqu'un système en équilibre est soumis à deux forces, ces deux forces sont colinéaires, égales et opposées.

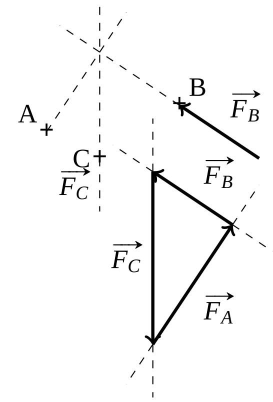
Méthode de résolution analytique

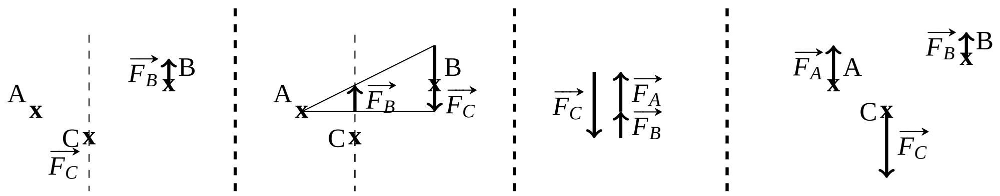
1. Identifier les actions mécaniques connues et inconnues par un graphe des liaisons.
2. Isoler le système en faisant apparaître les inconnues recherchées et en limitant le nombre d'inconnues
3. Réaliser le bilan des actions mécaniques (de contact et à distance)
4. Modéliser ces actions mécaniques en tenant compte des hypothèses.
5. Décompter toutes les inconnues I_s
   - Si $I_s \leq 6$, écrire le PFS en déplaçant tous les torseurs au même point.
   - Sinon, écrire le PFS et isoler d'autres ensembles en pensant à utiliser le théorème des actions réciproques.

REMARQUE : ON N'ISOLE JAMAIS LE BÂTI

Système soumis à l'action de 3 glisseurs (forces)

- Pour qu'un solide S soumis à trois forces non parallèles soit en équilibre, il faut que ces trois forces soient coplanaires, concourantes et de somme nulle.
- Lorsqu'un solide (S) en équilibre est soumis à trois forces dont deux d'entre elles sont parallèles, il faut que la troisième leur soit parallèle.

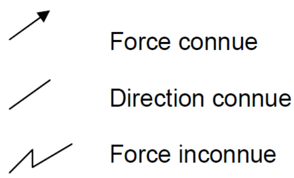




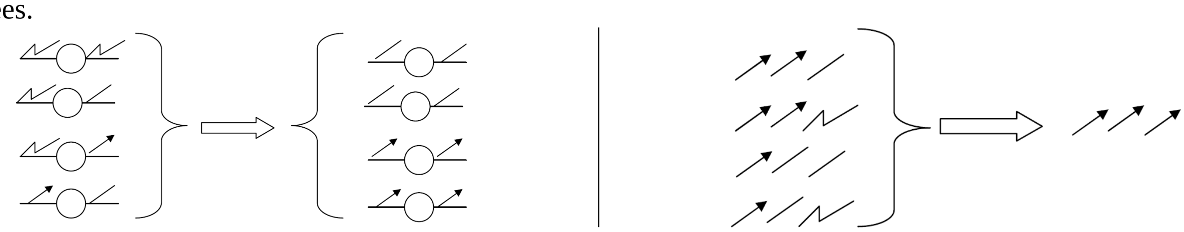
Résolution d'un problème de statique plan

Si le mécanisme est modélisé comme plan (de plan $(\vec{x}, \vec{y})$), les forces auxquelles on s'intéresse sont dans le plan (F_x et F_y), et les moments sont hors plan (M_z). Les torseurs des liaisons ne font apparaître que ces quantités.

Pour s'aider dans les isolements, on peut utiliser les symboles :



- Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, les deux résultantes sont égales et directement opposées.



- Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois glisseurs, les résultantes de ceux-ci sont, coplanaires, concourantes ou parallèles et de somme géométrique nulle.

Pour résoudre un problème de statique graphique, il faut isoler, sur le graphe des liaisons, les solides ou groupes de solides soumis à 2 ou 3 glisseurs, et leur appliquer le PFS pour obtenir des informations supplémentaires sur les forces.