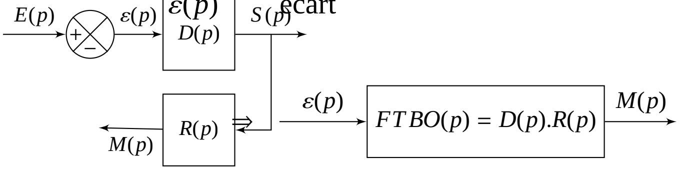
SYNTHÈSE : MODÉLISER ET SIMULER LES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS.

Fonction de transfert en boucle ouvert

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte ($FTBO$) est le rapport entre la mesure $M(p)$ et l'écart $\varepsilon(p)$:

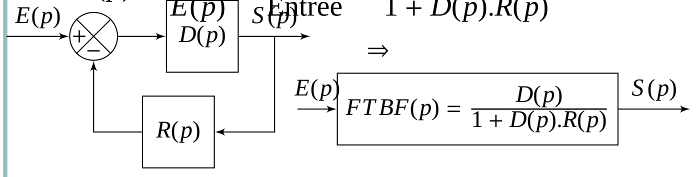
$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{\text{mesure}}{\text{écart}} = D(p).R(p)$$



Fonction de transfert en boucle fermée

La Fonction de Transfert en Boucle Fermée ($FTBF$) est le rapport entre la sortie $S(p)$ et l'entrée $E(p)$:

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}} = \frac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}$$



Dirac

Fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$ sauf en 0 et telle que : $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt$

La transformée de Laplace de cette fonction est:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}.\delta(t).dt = e^{-p.0} = 1 \Rightarrow \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

La réponse temporelle d'un système à un Dirac est appelée réponse impulsionnelle.

Echelon

Un échelon unitaire $u(t)$ (ou fonction d'Heavyside) est définie de la manière suivante :

- pour $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$
- pour $t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

Sa transformée de Laplace vaut : $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$

La réponse temporelle d'un système soumis à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle.

Sinusoïde

La réponse temporelle d'un système à une fonction sinusoïdale est appelée réponse harmonique.

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Rampe

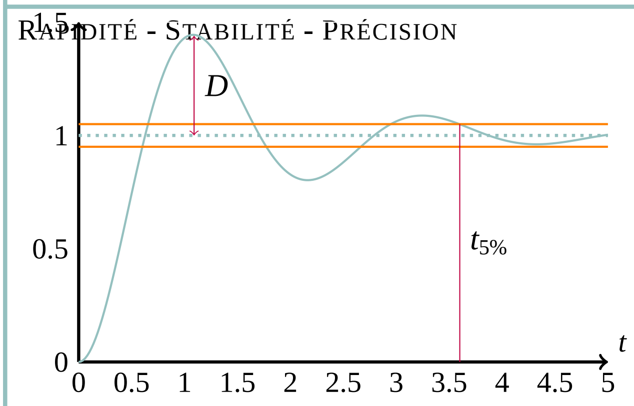
Une rampe unitaire est définie par : $r(t) = t.u(t)$

Sa transformée de Laplace vaut : $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p^2}$

La réponse temporelle d'un système à une rampe unitaire est appelée réponse en poursuite (ou en suivi).

Critères de performance

RAPIDITÉ - STABILITÉ - PRÉCISION



Transformées de Laplace

Définition: $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t).dt$

Propriétés:

- unicité
- linéarité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow$ $\mathcal{L}[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.\mathcal{L}[f(t)] + \beta.\mathcal{L}[g(t)]$
- dérivation $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1-i)}.f^{(i)}(0)$
- intégration $\mathcal{L}\left[\int_a^t f(\tau).d\tau\right] = \frac{1}{p}.\mathcal{L}[f] + \frac{1}{p}.\int_a^0 f(\tau)d\tau$
- convolution $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f].\mathcal{L}[g]$

Condition d'Heaviside : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]-\infty, 0[\,,\ f^{(n)}(t) = 0$

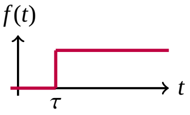
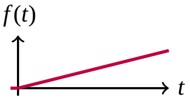
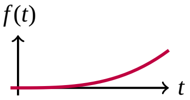
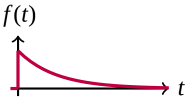
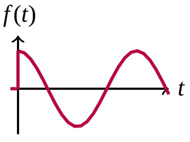
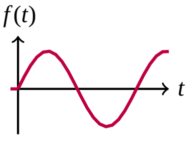
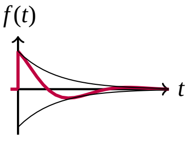
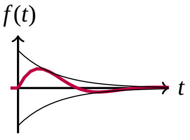
Laplace $\longrightarrow$ Temporel : Décomposition en éléments simples

Transformée inverse de Laplace : $\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p.t}.F(p).dp$. La décomposition en éléments simples permet de ramener une fonction rationnelle à une combinaison linéaire d'éléments dont les transformées inverses de Laplace sont connues

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = A_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(p+\alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q_k} \frac{B_{kl}.p + C_{kl}}{\left((p+\beta_k)^2 + \omega_k^2\right)^l}$$

n :	nb pôles réels
p :	nb de dipôles conjugués $(z, \overline{z})$
m_i, q_k :	multiplicité des pôles

Tableau des transformées de Laplace

Nom	Allure	$f(t)$	$F(p)$	Pôles de $F(p)$
Dirac		$\delta(t)$	1	aucun
Échelon		$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$	0
Retard		$g(t-\tau)$	$e^{-\tau.p}.G(p)$	0
Rampe		$t.u(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$	0 (d'ordre 2)
Fonction puissance		$t^n.u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	0 (d'ordre $n+1$)
Exponentielle		$e^{-at}.u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$	-a
Générale, la plus importante		$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	-a (ordre $n+1$)
Cosinus		$\cos(\omega.t).u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Sinus		$\sin(\omega.t).u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Cosinus amorti		$e^{-at}\cos(\omega.t).u(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$
Sinus amorti		$e^{-at}\sin(\omega.t).u(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$

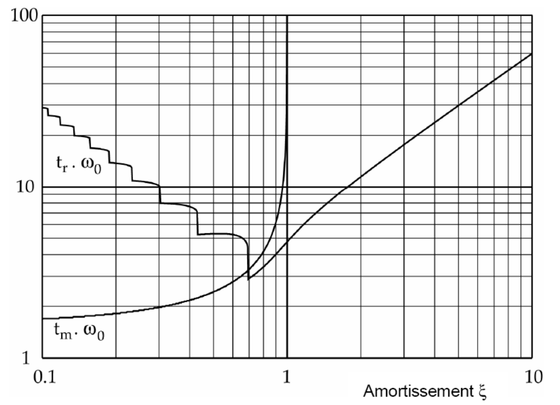
Forme canonique

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^{\alpha}}\,\frac{1 + b'_1.p + \ldots + b'_m.p^m}{1 + a'_1.p + \ldots + a'_n.p^n}.$$

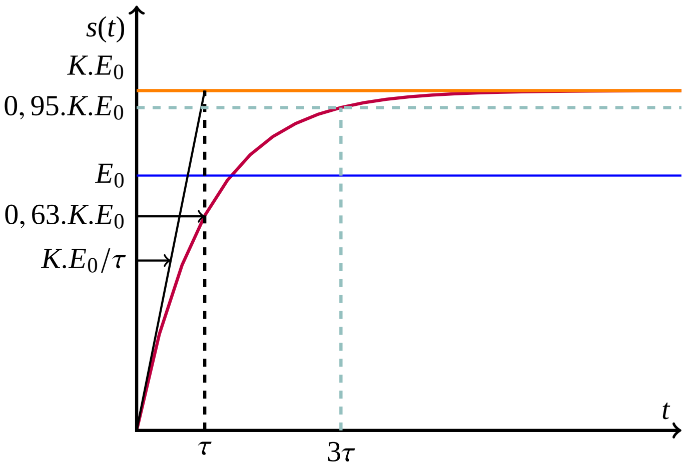
On définit :

- **les pôles :** les racines du dénominateur
- **les zéros :** les racines du numérateur
- **le gain:** K
- **la classe du système :** si $\alpha > 0$ alors $p = 0$ est un pôle du dénominateur. Le système comporte α intégrateurs.
- **Ordre du système:** $\max(m, \alpha + n)$

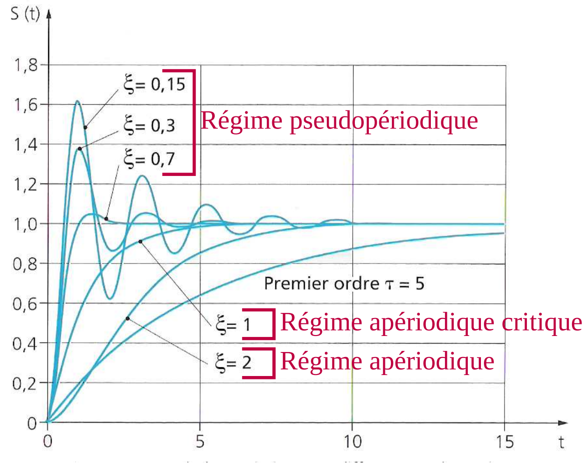
Temps de réponse à 5% et temps de monté



Réponse indiciel - système du premier ordre



Réponse indiciel - système du second ordre



Module de la fonction de transfert

Le module de la fonction de transfert en décibels est égal à la somme des modules de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
G_B(\omega) &= 20.\log|H(j.\omega)| \\
&= 20.\log\left|\frac{K}{(j.\omega)^{\alpha}}\,\frac{\prod_i(1+\tau_i.j.\omega).\prod_m\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k(1+\tau_k.j.\omega).\prod_n\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)}\right|
\end{aligned}$$

$$= 20.\log\left|\frac{K}{(j.\omega)^{\alpha}}\right| + \sum_i 20.\log|(1+\tau_i.j.\omega)| + \sum_m 20.\log\left|\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)\right|$$

$$\ldots - \sum_k 20.\log\left|(1+\tau_k.j.\omega)\right| - \sum_n 20.\log\left|\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)\right|$$

Argument de la fonction de transfert

L'argument de la fonction de transfert est égal à la somme des arguments de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
\phi_\omega(\omega) &= \arg\left(H(j.\omega)\right) \\
&= \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^{\alpha}}\,\frac{\prod_i(1+\tau_i.j.\omega)\prod_m\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k(1+\tau_k.j.\omega)\prod_n\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^{\alpha}}\right) + \sum_i \arg\left((1+\tau_i.j.\omega)\right) + \sum_m \arg\left(\left(1+\frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)\right)$$

$$\ldots - \sum_k \arg\left((1+\tau_k.j.\omega)\right) - \sum_n \arg\left(\left(1+\frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.j.\omega+\frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)\right)$$

Diagrammes de Bode

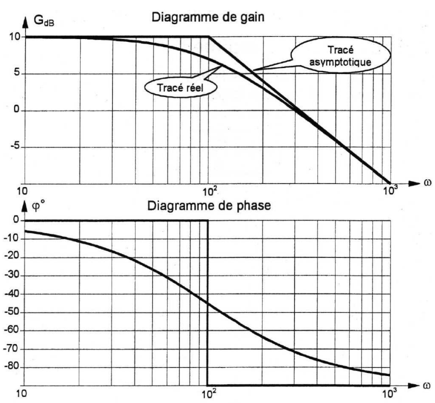


Diagramme de Nyquist

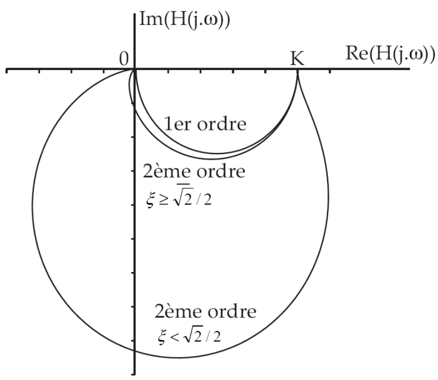
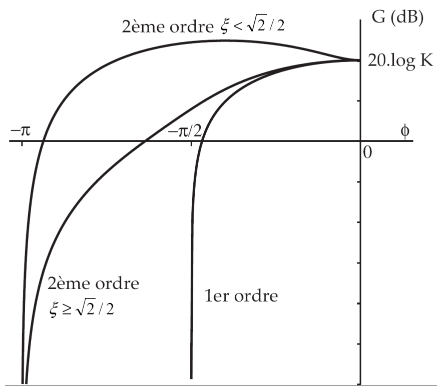


Diagramme de Black



Modules et phases d'un premier et second ordre

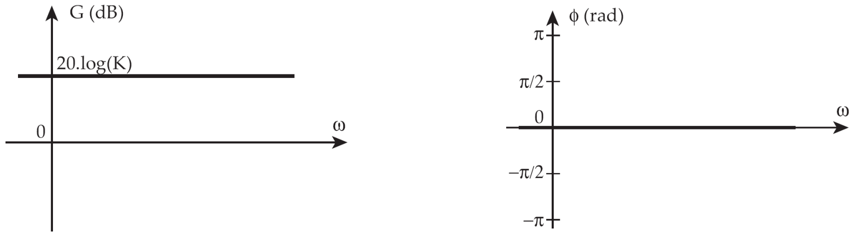
$$G(p) = \frac{K}{1+\tau.p} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} |G(j\omega)| & = & \dfrac{|K|}{|1+\tau.j.\omega|} = \dfrac{K}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) & = & \arg\left(G(j.\omega)\right) = \arg(K) - \arg(1+\tau.j.\omega) \\ & = & -\arctan(\tau.\omega) \\ & & \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ puisque } \tau.\omega > 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} H(p) & = & \dfrac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2} \\ H(j.\omega) & = & \dfrac{K.\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega} \end{array}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j.\omega)| = \dfrac{\left|K.\omega_0^2\right|}{\left|(\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega\right|} = \dfrac{K.\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4.\xi^2.\omega_0^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) = \arg(K.\omega_0^2) - \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega\right) = -\arctan\left(\dfrac{2.\xi.\omega_0.\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in [-\pi, 0] \end{array} \right.$$

Action proportionnelle

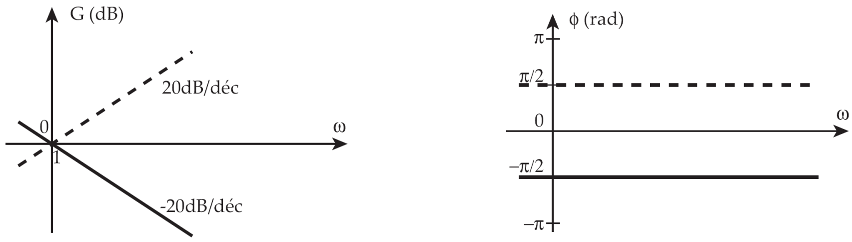
$H(p) = K$



Action intégrale et action dérivée

Action intégrale $H(p) = \dfrac{1}{p}$

Action dérivée $H(p) = p$



Systèmes du premier et second ordre