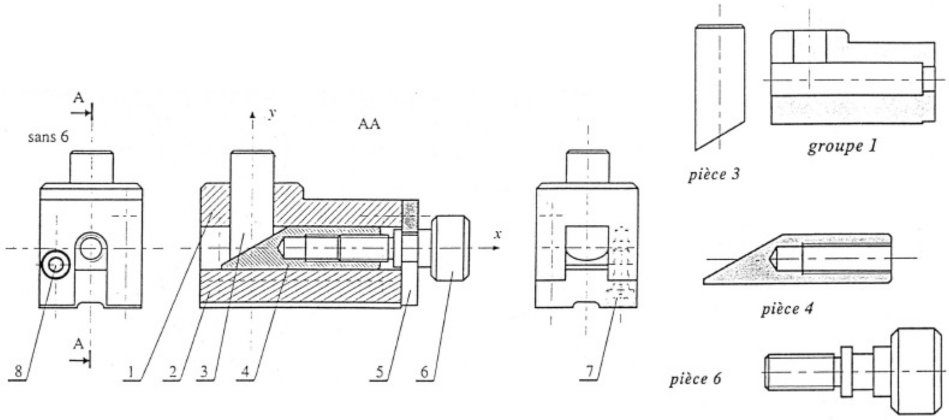
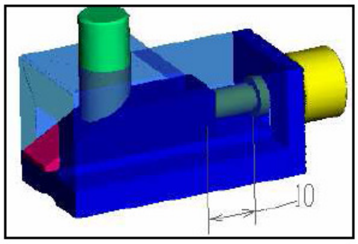
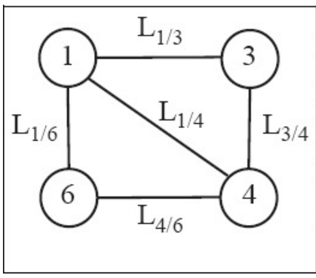
Synthèse : Cinématique

Schématisation

Plan d'ensemble, dessin de définition, vue 3D, graphe de structure, tableau des liaisons et schéma cinématique







$L_{1/3}$: Pivot glissant d'axe $(A, \vec{y})$
$L_{1/4}$: Glissière de direction $(\vec{x})$
$L_{3/4}$: Appui plan de normale $(\vec{n})$
$L_{4/6}$: Hélicoïdale $(A, \vec{x})$
$L_{1/6}$: Appui plan de normale $(\vec{x})$

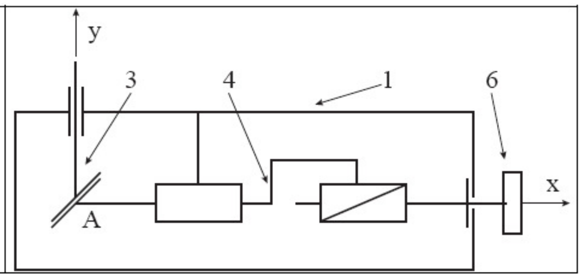


Schéma technologique

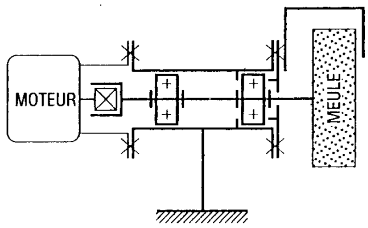


Schéma architectural

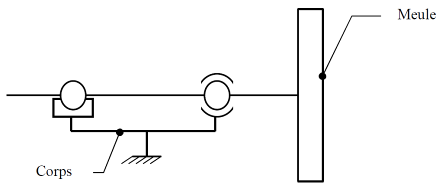
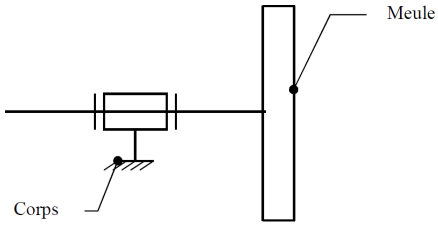


Schéma cinématique minimal



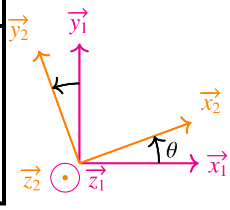
Dérivation vectorielle

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u}$$

où $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est appelé vecteur rotation de $\mathcal{B}_1$ par rapport à $\mathcal{B}_0$ $(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$. On le note aussi $\vec{\Omega}_{(1/0)}$.

Figures de changement de base

Produits scalaires	Produits vectoriels
$\vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 = \vec{z}_1$
$\vec{x}_1.\vec{x}_2 = \cos\theta$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin\theta.\vec{z}_1$
$\vec{y}_1.\vec{x}_2 = \sin\theta$	$\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos\theta.\vec{z}_1$
$\vec{x}_1.\vec{y}_2 = -\sin\theta$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \cos\theta.\vec{z}_1$



Vecteur vitesse d'un point

On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$, le vecteur défini par :

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Vecteur accélération d'un point

On appelle accélération de M par rapport à $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$, le vecteur défini par :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{M/\mathcal{R}}\right)\right]_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{R}}$$

Champ équiprojectif

Un champ de vecteur est équiprojectif ssi $\forall (M, N) \in (\varepsilon)^2$, la relation suivante est vérifiée :
$\vec{V}_{(M)}.\overrightarrow{MN} = \vec{V}_{(N)}.\overrightarrow{MN}$

Champ de moments

Un champ de moment est un champ de vecteurs pour lequel qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ tel que :
$\forall M, N \in (\varepsilon)$ $\vec{V}_{(M)} = \vec{V}_{(N)} + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{U}$

Théorème de Delassus

Champ équiprojectif ⇔ Champ de moment

Comoment de deux torseurs

On appelle comoment de deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, la quantité scalaire :
$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{R}_1.\vec{M}_{2(A)} + \vec{R}_2.\vec{M}_{1(A)}$

Axe central d'un torseur

Ensemble des points I pour lesquels le champ $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$.

Ensemble des points $I \in (\varepsilon)/\exists\lambda \in \mathbb{R}/\vec{M}_{(I)} = \lambda.\vec{R}$ (ou encore $\vec{M}_{(I)} \wedge \vec{R} = \vec{0}$, avec $\vec{R} \neq \vec{0}$)
I est alors appelé point central du torseur.

Définition d'un torseur

Association d'un champ de moment $\vec{M}$ (dépendant du point où on le calcule) et du vecteur résultant $\vec{R}$ (identique en tout point de l'espace) correspondant. Il vérifie $\forall(A,B) \in (\varepsilon)^2$ l'équation $\underbrace{\vec{M}_{(B)}}_{B} = \underbrace{\vec{M}_{(A)}}_{A} + \underbrace{\vec{BA}}_{BA} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{R}$

$\vec{R}$ est appelé la résultante et $\vec{M}_{(A)}$ le moment en A. Ces deux vecteurs (les coordonnées pluckériennes) sont alors appelés les éléments de réduction du torseur en A. on note le torseur $\left\{\mathcal{T}\right\}$ comme suit :

$$\left\{\mathcal{T}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}\\ \vec{M}_{(A)}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc}R_x & M_{x(A)}\\ R_y & M_{y(A)}\\ R_z & M_{z(A)}\end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Torseur couple

Torseur dont la résultante est nulle :
$\left\{\mathcal{C}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \vec{M}_{(A)}\end{array}\right\}$

Torseur glisseur

Torseur dont le vecteur résultant est non nul ($\vec{R} \neq \vec{0}$) mais dont l'automoment est nul.

Champ de vecteurs vitesse d'un solide

Soient A et B deux points d'un solide S.

$\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$

Composition des vitesses pour le point

Soient $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ deux référentiels et A un point. Alors $\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$

Champ de vecteurs accélération d'un solide

Soient A et B deux points d'un solide S. $\vec{A}_{(B,S/\mathcal{R})} = \dots$

$\dots \vec{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \vec{AB}\right)$

Composition des vitesses pour le solide

Soient $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point. Alors $\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$

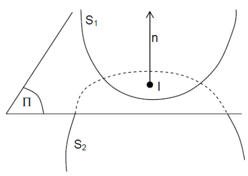
Composition des torseurs cinématiques

La composition des mouvements s'effectue en additionnant les torseurs en **UN MÊME POINT (!)**.

$\mathcal{V}_{S_2/S_0} = \mathcal{V}_{S_2/S_1} + \mathcal{V}_{S_1/S_0}$

Vitesse de glissement

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en I. A t donné, il existe $I_1 \in S_1$ tel que $I = I_1$ et il alors $I_2 \in S_2$ tel que $I = I_2$. I est le point de contact.
$I \notin S_1$ et $I \notin S_2$.



On se limite aux surfaces régulières qui admettent un plan tangent Π et une normale $\vec{n}$.

DÉFINITION: Vecteurs roulement et pivotement

> $\vec{\Omega}_p = \left(\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)}.\vec{n}\right)\vec{n}$ *est le vecteur pivotement.*
> $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \vec{\Omega}_p$ *est le vecteur roulement.*

DÉFINITION: Vecteur glissement

> *On appelle vecteur glissement de S_2 sur S_1 en I,* $\vec{V}_{(I,S_2/S_1)}$

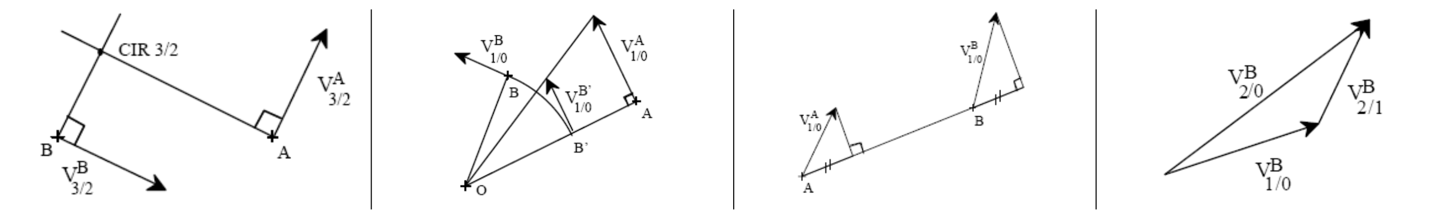
Mouvement plan

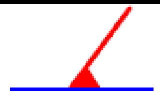
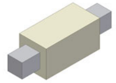
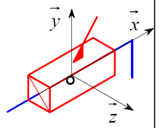
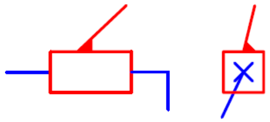
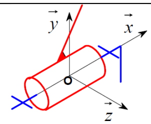
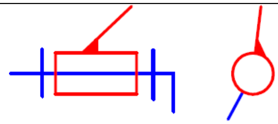
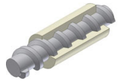
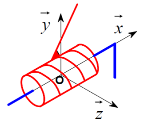
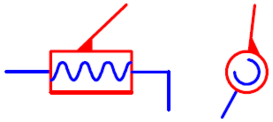
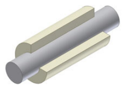
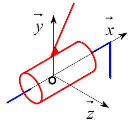
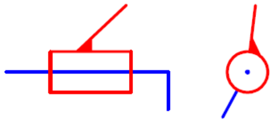
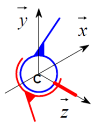
Le mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est dit plan s'il existe un plan (Π_2) lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan (Π_1) lié à S_1.

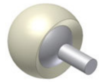
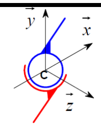
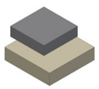
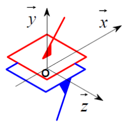
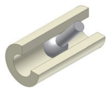
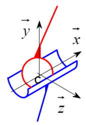
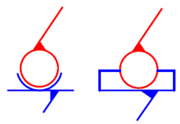
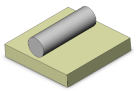
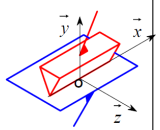
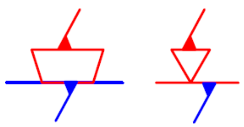
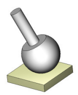
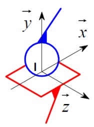
Il en résulte que le paramétrage de S_2 par rapport à S_1 ne nécessite que 3 paramètres : un angle et deux longueurs ou deux angles et une longueur.

$\mathcal{V}_{S_2/S_1} = {}_{O_2}\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\vec{z}_1\\ \dot{x}\vec{x}_1 + \dot{y}\vec{y}_1\end{array}\right\}$

Cinématique graphique



dll	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\\ \vec{V}_{(X,S_1/S_0)}\end{matrix}\right\}$		Torseur des actions mécaniques transmissibles
0 dll 0 tr 0 rt	Encastrement			$\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{R_0}$
1 dll 1 tr 0 rt	Glissière 			1 direction $\vec{x}$ $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & u_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{R_0}$
1 dll 0 tr 1 rt	Pivot 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & 0\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{R_0}$
1 dll 1 tr 1 rt	Hélicoïdale 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$ avec $V = \frac{p}{2.\pi}.\omega$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & \frac{p}{2.\pi}.p_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}X_{10} & -\frac{p}{2.\pi}.X_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{R_0}$
2 dll 1 tr 1 rt	Pivot glissant 			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	${}_M\left\{\begin{matrix}\omega.\vec{x}\\ V.\vec{x}\end{matrix}\right\}$	${}_M\left\{\begin{matrix}p_{10} & u_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_M\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & N_{10}\end{matrix}\right\}_{R_0}$
2 dll 0 tr 2 rt	Rotule à doigt 			1 point A, centre de liaison	${}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}.\vec{x} = 0$	${}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ q_{10} & 0\\ r_{10} & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$	${}_A\left\{\begin{matrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & 0\\ Z_{10} & 0\end{matrix}\right\}_{R_0}$

dll	Nom de la liaison	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(X,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$		Torseur des actions mécaniques transmissibles
3 dll 0 tr 3 rt	Rotule 			1 point A, centre de liaison	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} X_{10} & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ Z_{10} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$
3 dll 2 tr 1 rt	Appui plan 			Normal au plan $\vec{y}$, $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(M,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{V}_{(M,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_M\left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{array} \right\}_{R_0}$	${}_M\left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{10} \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & N_{10} \end{array} \right\}_{R_0}$
4 dll 1 tr 3 rt	Linéaire annulaire 			1 axe $(A, \vec{x})$, centre de sphère A	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ Z_{10} & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$
4 dll 2 tr 2 rt	Linéaire rectiligne 			Normal au plan $\vec{y}$, Droite de contact $(A, \vec{x})$	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{array} \right\}_{R_0}$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & N_{10} \end{array} \right\}_{R_0}$
5 dll 2 tr 3 rt	Ponctuelle 			Normal au plan $\vec{y}$, point de contact A	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}_{(S_1/S_0)}$ quelconque et $\vec{V}_{(A,S_1/S_0)} \cdot \vec{y} = 0$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & w_{10} \end{array} \right\}_{R_0}$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$