Méthodes d'intégration d'une courbe discrétisée

1 Estimation d'une position à partir de valeurs obtenues avec un accéléromètre

Un accéléromètre permet de mesurer une accélération. Il est généralement constitué d'une masselotte fixée au boitier de la pièce en mouvement par un ressort. L'élongation du ressort permet de déterminer l'accélération du boîtier par rapport à un référentiel galiléen.
Ces composants ont été largement miniaturisés durant les 10 dernières années pour s'intégrer aux téléphones portables, tablettes, manettes de jeux et autres objets électroniques ayant besoin de mesurer un mouvement.

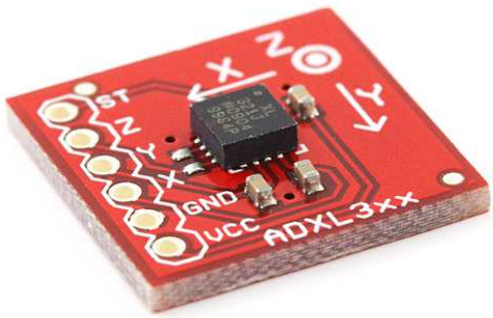

Figure 1 – Accéléromètre miniature

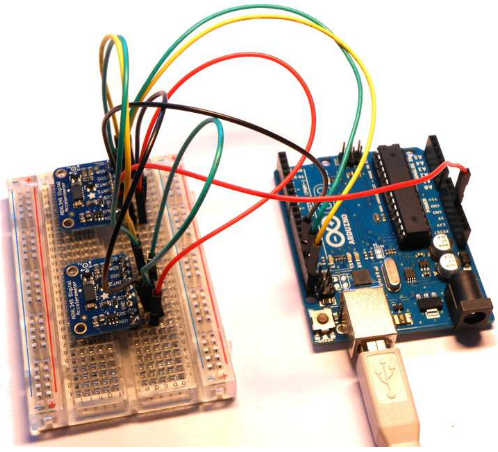

Figure 2 – Montage de l'accéléromètre sur l'arduino pour la mesure

Ce problème vise à tester les possibilités de mesure de ces composants : peut-on, à partir de la mesure de l'accélération, remonter facilement à la vitesse, voire à la trajectoire du boîtier dans lequel est monté le capteur ?

1.1 Fichiers de points expérimentaux

On donne des fichiers de points pour 3 fréquences d'échantillonnage. La colonne de gauche correspond au temps ; la colonne de droite à l'accélération en fonction de temps.

Q - 1 : *Tracer l'évolution de l'accélération en fonction de temps pour un des fichiers.*

Remarque : les points sont enregistrés au format .csv pour s'ouvrir directement avec un tableur. Afin de les charger sous **Python** , on peut utiliser le code suivant :

```
T, Acc= np.loadtxt('Acceleration-mesures-10.0-Hz.csv', delimiter=';', unpack=True)
```

1.2 Courbes théoriques

Le fichier des accélérations est en fait la dérivée seconde d'un système du second ordre de gain $K = 1$, de pulsation propre $\omega_0 = 1$ et de coefficient d'amortissement $\xi = 0,2$.

Ce fichier parfait (sans bruit de mesure) est donc ce qu'on l'on pourrait mesurer avec un accéléromètre lors de la sollicitation d'un système masse/ressort par un échelon unitaire $E_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] \\
v(t) = x'(t) &= K.E_0.\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t\right) \\
a(t) = x''(t) &= K.E_0.\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\left[-\xi.\omega_0.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t\right) + \omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.\cos\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t\right)\right] \\
&= -K.E_0.\frac{\omega_0^2}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Q - 2 : *A partir des lignes **Python** suivantes, superposer les courbes théoriques tracées avec 1000 points et les courbes obtenues par intégration du fichier de points.*

```
xi, w0, K, tmax, npts = 0.2, 1, 10, 20, 1000
nT = np.linspace(0, tmax, npts)
asqrt = m.sqrt(1 - xi**2)
pha = m.atan(asqrt / xi)
Sec = [K * (1 - m.exp(-xi*w0*t)*m.sin(w0*asqrt*t + pha) / asqrt) for t in nT]
Secp = [K * w0 * m.exp(-xi*w0*t) * m.sin(w0*asqrt*t) / asqrt for t in nT]
Secpp = [-K * w0**2 * m.exp(-xi*w0*t) * m.sin(w0*asqrt*t-pha) / asqrt for t in nT]
```

1.3 Intégration numérique

A la différence de l'exercice précédent, cette fois, la courbe à intégrer n'a pas de fonction connue (afin, disons qu'on ne doit pas s'en servir pour trouver l'intégrale). On ne peut utiliser que le fichier de points.

De plus, on ne cherche plus l'aire sous la courbe mais l'évolution de l'aire sous la courbe en fonction de l'abscisse. Il ne s'agit plus de renvoyer une valeur intégrale de la fonction sur le domaine ($\int_a^b f(t).dt$) mais une liste de valeurs V_i telles que $V_i = \int_0^{t_i} f(x).dx$.

Les fonctions permettant l'intégration numérique devront avoir en argument `(X,Y,i0)`, avec `X` les valeurs en abscisses, `Y` les valeurs en ordonnées et `i0`, la condition initiale.

Q - 3 : *Adapter les méthodes des rectangles gauches, des rectangles droits et des trapèzes pour les rendre compatibles avec des fichiers de points d'abscisses* X *et d'ordonnées* Y.

1.4 Méthodes de Simpson et du point médian

Les méthodes de Simpson et du point médian nécessitent une adaptation supplémentaire. Ne disposant pas de points entre 2 mesures, il faut appliquer ces méthodes sur un ensemble de 3 points et non 2 comme précédemment. Le problème est qu'on obtient alors 2 fois moins de valeurs après intégration. Pour passer au déplacement, on risque d'avoir 4 fois moins de points, ce qui pose problème.

Si on comprend qu'on peut trouver la vitesse V_i en t_i à partir des valeurs de l'accélération en a_{i-2}, a_{i-1} et a_i et de la vitesse en V_{i-2} avec la méthode de Simpson, on comprend alors qu'on peut obtenir la vitesse V_{i-1} en t_{i-1} à partir des valeurs de l'accélération en a_{i-3}, a_{i-2} et a_{i-1} et de la vitesse en V_{i-3} avec la même méthode. Reste à savoir comment obtenir V_1.

Q - 4 : *En estimant l'intégrale au temps t_1 à l'aide de la méthode des trapèzes, adapter les méthodes de Simpson et du point médian pour les rendre compatibles avec des fichiers de points expérimentaux tout en conservant le nombre de valeurs.*