Méthodes de calcul approché d'intégrales

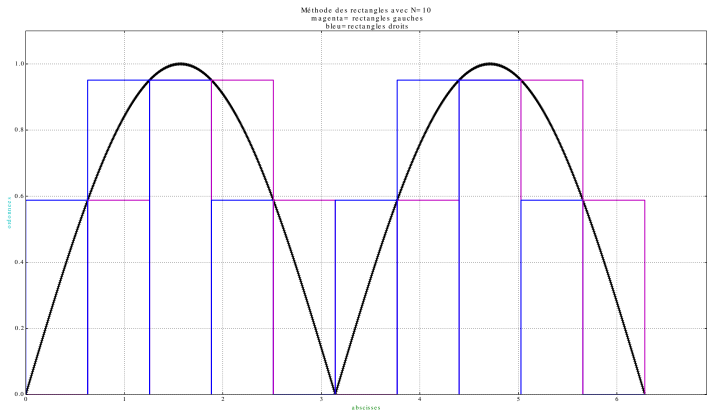

Figure 1 – Approximation de l'intégrale de la fonction $|\sin(x)|$ par la méthode rectangles gauches et la méthode des rectangles droits.

1 Objectifs et support du Tp

L'objectif de ce tp est de comparer les vitesses de convergence de plusieurs méthodes d'intégration numériques :

- méthodes d'approximation par un polynôme de degré 0 :
  - méthode des rectangles gauches
  - méthode des rectangles droit
  - méthode du point milieu
- méthode d'approximation par un polynôme de degré 1 (méthode des trapèzes)
- méthode d'approximation par un polynôme de degré 2 (méthode de Simpson)

Comme support, on cherchera à déterminer, par les différentes méthodes, une approximation numérique de $\int_0^{2.\pi} |\sin(x)|\, dx$ qui vaut 4...

2 Intégration numérique d'une fonction

Pour calculer numériquement $\int_a^b f(x).dx$, on subdivise le segment $[a,b]$ avec un pas constant h.
Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace la fonction f par une fonction polynomiale. On note $\mathrm{M}_i = \sup_{[a,b]}(f^{(i)})$ avec f C^i sur $[a,b]$.

2.1 Méthode des rectangles

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace f par la fonction constante $f(x_{i-1})$ (resp. $f(x_i)$) pour la méthode des rectangles « gauche » (resp. « droite »).

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f - \mathrm{R}_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{M}_1(b-a)^2}{2n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Q - 1 : *Écrire une fonction* `Rn` *prenant comme arguments d'entrée* f, a, b, *et* n *et retournant* $\mathrm{R}_n(f)$. *Tester votre fonction sur la fonction support du Tp pour* $n \in \{10, 100, 1000\}$.

2.2 Méthode des rectangles médians

Sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, on remplace f par la fonction constante $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$.

$$\mathrm{R}'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f - \mathrm{R}'_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{24n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Q - 2 : *Écrire de la même façon (cf partie 2.1), une fonction* `Rnp`. *La tester de la même façon.*

2.3 Méthode des trapèzes

Sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, on remplace f par la fonction affine coïncidant avec f en x_{i-1} et en x_i.

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f - \mathrm{T}_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{12n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Q - 3 : *Écrire de la même façon (cf partie 2.1), une fonction* `Tn`. *La tester de la même façon.*

2.4 Méthode de Simpson

Sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, on remplace f par la fonction polynomiale de degré 2 coïncidant avec f en x_{i-1}, $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ et x_i.

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{3}(\mathrm{T}_n(f) + 2.\mathrm{R}'_n(f)) \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f - \mathrm{S}_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{M}_4(b-a)^5}{2880n^4} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Q - 4 : *Écrire de la même façon (cf partie 2.1), une fonction* `Sn`. *La tester de la même façon.*

3 Comparaison automatique des vitesses de convergence

Avec $h = \dfrac{b-a}{n}$, l'intégrale de f entre a et b peut être approximée via un découpage de l'intervalle $[a,b]$ en n segments sur lesquels une régression polynomiale est effectuée. On obtient alors l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x).dx \approx h.\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j . f(\lambda(i,j))\right)$$

où m est le degré du polynôme interpolateur, ω_j les poids associés à l'intégrale de ce polynôme et $\lambda(i,j)$ les valeurs des abscisses tels que pour $m > 0$ $\lambda(i,j) = x_i + j.\dfrac{x_{i+1} - xi}{m} = x_i + \dfrac{j}{m}.h$.
Nous allons utiliser cette formule générale pour comparer les méthodes.

Soient deux listes `X` et `W`. La liste `X` contiendra les ratios $\dfrac{j}{m}$ pour chacune des méthodes et la liste `W` les poids ω_j associés.
Ainsi :

Méthode	**ratio**
Rectangle gauche	`X = [0]`
Rectangle droit	`X = [1]`
Rectangle milieu	`X = [1/2]`
Trapèze	`X = [0, 1]`
Simpson	`X = [0, 1/2, 1]`
Boole-Villarceau	`X = [0, 1/4, 1/2, 3/4, 1]`
Weddle-Hardy	`X = [0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1]`

Méthode	**poids**
Rectangle gauche	`W = [1]`
Rectangle droit	`W = [1]`
Rectangle milieu	`W = [1]`
Trapèze	`W = [1/2, 1/2]`
Simpson	`W = [1/6, 2/3, 1/6]`
Boole-Villarceau	`W = [7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]`
Weddle-Hardy	`W = [41/840, 9/35, 9/280, 34/105, 9/280, 9/35, 41/840]`

Q - 5 : *Écrire une liste `GX` contenant plusieurs listes `X` et une liste `GW` contenant les listes de poids correspondant.*

Exemple : `GX = [ [0], [1], [1/2], [0, 1] ]` et `GW = [ [1], [1], [1], [1/2, 1/2] ]`

Q - 6 : *Écrire une liste `N` contenant différentes valeurs de n à tester.*

Exemple : `N = [10, 100, 1000]` ou `N = [n for n in range(2,20)]`

Q - 7 : *Écrire un programme prenant en arguments `f`, `a`, `b`, `GX`, `GW`, `N` et qui renvoie une liste de longueur la longueur de `GX` (donc du nombre de méthodes) et dont les éléments sont les listes des erreurs obtenues pour chaque valeur de n prise dans `N` pour la méthode correspondante.*

Q - 8 : *Tracer l'évolution des erreurs pour chaque méthode.*

Q - 9 : *Recommencer l'étude pour g tel que $g(x) = \dfrac{1}{1+x} + 2$ pour $x \in [0,1]$.*