CI-3 : Prévoir et vérifier les performances dynamiques et énergétiques des systèmes.

CI-3-1 Établir les équations dynamiques et énergétiques

Objectifs **MODELISER-SIMULER**

A la fin de la séquence, l'élève doit être capable de :

- **B1 : Identifier et caractériser les grandeurs physiques**
  - Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance
  - Identifier les pertes d'énergie
  - Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent
  - Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide
  - Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides
- **B2 : Proposer un modèle de connaissance et de comportement**
  - Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
  - Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide
- **C1 : Proposer une démarche de résolution**
  - Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
  - Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison
  - Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre
- **C2 : Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique**
  - Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas où le mouvement est imposé
  - Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus

Table des matières

1 Cinétique

1.1 Masses et centre de masse

1.1.1 Point matériel

Définition : Point matériel

Un point matériel M est un point de l'espace affine affecté d'une masse m

1.1.2 Masse d'un système matériel linéique Γ

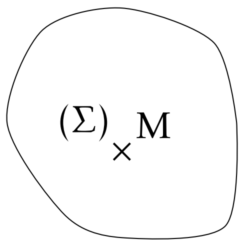
La masse m d'un système matériel linéique Γ est $\boxed{m = \int_\Gamma \mu(\mathrm{M}).dl}$ avec dl, l'abscisse curviligne élémentaire en M et $\mu(\mathrm{M})$, la masse linéique en M. Le centre de gravité G est défini par $\boxed{m.\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \int_\Gamma \mu(\mathrm{M}).\overrightarrow{\mathrm{AM}}.dl}$

1.1.3 Masse d'un système matériel surfacique $\mathcal{A}$

La masse m d'un système matériel surfacique $\mathcal{A}$ est $\boxed{m = \iint_\mathcal{A} \mu_\mathrm{S}(\mathrm{M}).d\mathrm{S}}$ avec $d\mathrm{S}$, la surface élémentaire en M et $\mu_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, la masse surfacique en M. Le centre de gravité G est défini par $\boxed{m.\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \iint_\mathcal{A} \mu_\mathrm{S}(\mathrm{M}).\overrightarrow{\mathrm{AM}}.d\mathrm{S}}$

1.1.4 Masse d'un système matériel volumique Σ

$$\boxed{m_\Sigma = \iiint_\Sigma \rho(\mathrm{M}).d\mathrm{V}}$$



avec $d\mathrm{V}$, le volume élémentaire en M et $\rho(\mathrm{M})$, la masse volumique en M

1.1.5 Centre de gravité (de masse, d'inertie)

Le centre de gravité G est défini par $\boxed{\iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{GM}}.dm = \vec{0}}$ ainsi $\boxed{m_\Sigma.\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}.dm}$

Démonstration : $\iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{GM}}.dm = \vec{0} \Leftrightarrow \iiint_\Sigma \left(\overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right).dm = 0$

$$\iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OG}}.\rho(\mathrm{M}).d\mathrm{V} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}.dm \Rightarrow \left(\iiint_\Sigma \rho(\mathrm{M}).d\mathrm{V}\right).\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}.dm \Rightarrow m_\Sigma.\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{OM}}.dm$$

Remarque : si Σ est un solide indéformable S, alors G est fixe dans tout repère lié à S.

1.1.6 Principe de conservation de la masse

Σ est à masse conservative $\Leftrightarrow \forall\, t_1$ et $\forall\, t_2$, $m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2)$.

Conséquence : soient E un ensemble matériel **fermé** en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ et $\vec{f}(\mathrm{M}, t)$ un champ de vecteurs définis en tout point M de Σ, continûment différentiable par rapport à t (vitesse, accélération...), le principe de conservation de la masse permet d'écrire : $\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \iiint_\Sigma \vec{f}(\mathrm{M}, t).dm\right]_\mathcal{R} = \iiint_\Sigma \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \vec{f}(\mathrm{M}, t)\right]_\mathcal{R} dm}$

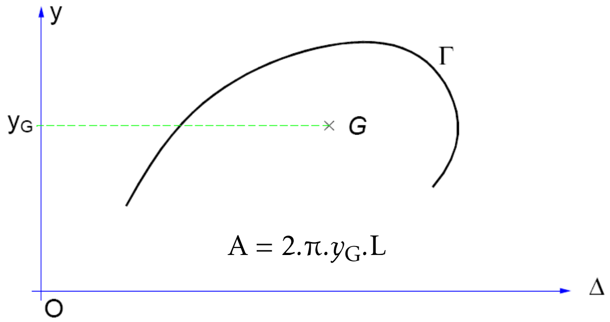
1.2 Théorèmes de Guldin

1.2.1 Premier théorème

Supposons données, dans un plan de l'espace affine euclidien, une courbe paramétrée Γ et une droite Δ qui ne se coupent pas.

Théorème

L'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Δ est égale au produit de la longueur L de la courbe Γ et de la longueur du cercle engendré par la rotation autour de Δ du centre d'inertie G de la courbe Γ.

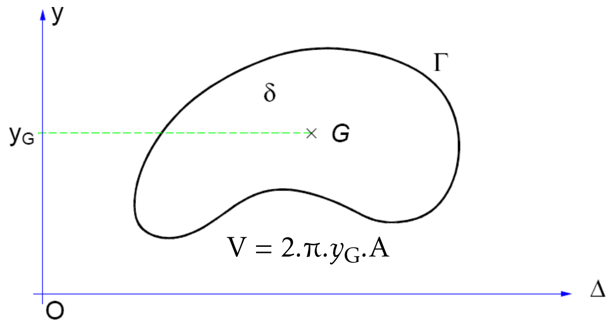


1.2.2 Second théorème

Supposons donnés, dans un plan de l'espace affine euclidien, un domaine δ limité par une courbe paramétrée fermée Γ et une droite Δ qui ne coupe pas le domaine.

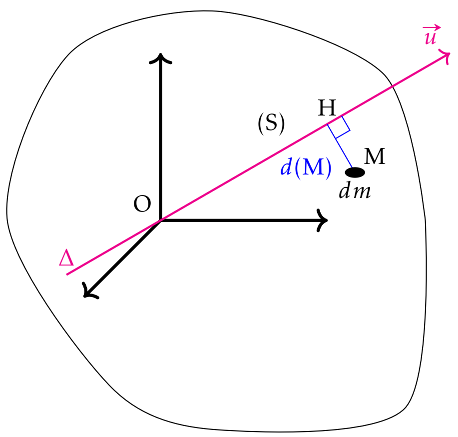
Théorème

Le volume V du domaine tridimensionnel de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de δ est égal au produit de l'aire A du domaine plan δ et de la longueur du cercle engendré par la rotation autour de Δ du centre d'inertie G du domaine plan δ.



1.3 Opérateur d'inertie d'un solide S

1.3.1 Moments d'inertie d'un solide S



1.3.1.1 par rapport à un axe Δ

H = projection orthogonale de $M \in S$ sur $\Delta = (O, \vec{u})$

$$\boxed{I(S,\Delta) = \iiint_S \overrightarrow{MH}^2.dm = \iiint_S d(M)^2.dm = I_{O\vec{u}}(S)}$$

d = distance de M à l'axe Δ. L'unité est alors le $kg.m^2$

1.3.1.2 par rapport à un point A

$$\boxed{I_A(S) = \iiint_S \overrightarrow{AM}^2.dm}$$

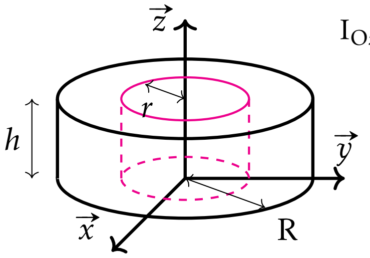
1.3.1.3 Exemples

Soit M de coordonnées x, y, z dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\boxed{I_O(S) = \iiint_{M\in S} (x^2+y^2+z^2).dm}$$

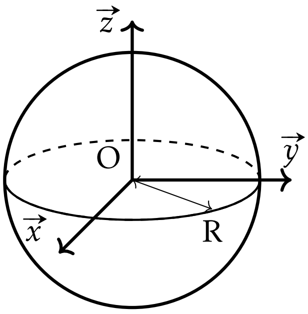
$$\boxed{I_{Ox}(S) = \iiint_{M\in S} (y^2+z^2).dm}$$

Exemple : Cylindre de révolution de rayon R, de hauteur h et de masse m.



$$
\begin{aligned}
I_{Oz}(Cyl) &= \iiint_{M\in S}(x^2+y^2).dm \Rightarrow \text{ passons en coordonnées polaires}\\
&= \iiint_{M\in S} r^2.dm \text{ avec } dm(M)=\rho(M).dV(M)=\rho.r.dr.d\theta.dz\\
&= 2.\pi.h.\rho.\int_0^R r^3.dr = \pi.h.\frac{R^4}{2}.\rho \quad \text{or} \quad m=\rho.\pi.R^2.h \quad \text{donc} \quad \boxed{I_{Oz}(Cyl)=m.\frac{R^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Exemple : Sphère de rayon R, de masse m par rapport à son centre O puis par rapport à un diamètre Δ quelconque.



$$
\begin{aligned}
I_O(Sph) &= \iiint_{M\in S} r^2.dm \text{ avec } dm(M)=\rho(M).dV(M)=\rho(M).S(r).dr=\rho.4.\pi.r^2.dr\\
&= \iiint_{M\in S}\rho.4.\pi.r^4.dr=\rho.4.\pi.\frac{r^5}{5}=\frac{3}{5}.m.R^2 \qquad \boxed{I_O(Sphe)=\frac{3}{5}.m.R^2}
\end{aligned}
$$

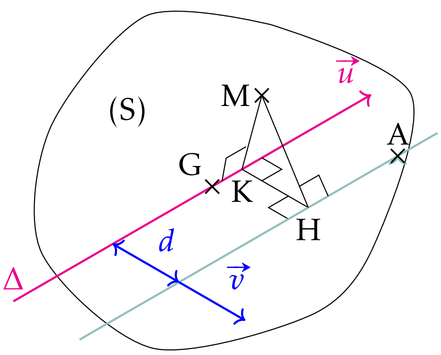
comme $I_\Delta = I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$ par symétrie,

$$3.I_\Delta = I_{Ox}+I_{Oy}+I_{Oz} = \iiint_{M\in S} 2.(x^2+y^2+z^2).dm = 2.I_O \text{ d'où } \qquad \boxed{I_\Delta=\frac{2}{5}.m.R^2}$$

1.3.1.4 Théorème de Huygens

Soit un axe $(G,\vec{u})$ passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle de distance d passant par le point A.

$$\boxed{I_{Au}(S)=I_{Gu}(S)+m.d^2}$$



$$
\begin{aligned}
I_{Au}(S) &= \iiint_S \overrightarrow{HM}^2.dm = \iiint_S\left(\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KM}\right)^2.dm\\
&= \iiint_S \overrightarrow{HK}^2.dm + \iiint_S \overrightarrow{KM}^2.dm + \iiint_S 2\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KM}\right).dm\\
&= m.d^2 + I_{Gu}(S) + 2.\cancel{\iiint_S\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KG}\right).dm} + \underbrace{\iiint_S 2.\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{GM}\right).dm}_{2.d.\vec{v}.\underbrace{\iiint_S \overrightarrow{GM}.dm}_{\vec{0}}}
\end{aligned}
$$

1.3.2 Tenseur d'inertie (Matrice d'inertie d'un solide S en O dans un repère $\mathcal{R}$)

1.3.2.1 Construction de l'opérateur

Soit une application linéaire $\mathbb{I}_{(O,S)}$ de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{U}$ associe :

$$\boxed{\vec{U}\mapsto \mathbb{I}_{(O,S)}\left[\vec{U}\right]=\iiint_S \overrightarrow{OM}\wedge\left(\vec{U}\wedge\overrightarrow{OM}\right).dm}$$

Soient le point $M\in S$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$ et $\vec{U}=u_x.\vec{x}+u_y.\vec{y}+u_z.\vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(O,S)}\left[\vec{U}\right] = \iiint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}\right).dm$$

$$\mathbb{I}_{(O,S)}\left[\vec{U}\right] = \iiint_S \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \left(\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right).dm = \iiint_S \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} z.u_y - y.u_z \\ x.u_z - z.u_x \\ y.u_x - x.u_y \end{vmatrix} dm$$

$$= \iiint_S \begin{vmatrix} y.\left(y.u_x - x.u_y\right) - z.\left(x.u_z - z.u_x\right) \\ z.\left(z.u_y - y.u_z\right) - x.\left(y.u_x - z.u_y\right) \\ x.\left(x.u_z - z.u_x\right) - y.\left(z.u_y - z.u_z\right) \end{vmatrix} dm = \iiint_S \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -x.y & -x.z \\ -y.x & z^2+x^2 & -y.z \\ -z.x & -z.y & x^2+y^2 \end{bmatrix} dm. \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix}$$

alors

$$\boxed{\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & -P_{Oxy} & -P_{Oxz} \\ -P_{Oxy} & I_{Oy} & -P_{Oyz} \\ -P_{Oxz} & -P_{Oyz} & I_{Oz} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

avec :

- **le produit d'inertie** par rapport au plan O_{xy} $\boxed{P_{Oxy}(S) = \iiint_S x.y.dm}$
- **le moment d'inertie** par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ $\boxed{I_{Ox}(S) = \iiint_S (y^2+z^2).dm}$

On montre que le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe $(O, \vec{u})$ s'écrit : $\boxed{I_{Ou}(S) = \vec{u}.\mathbb{I}(O,S)[\vec{u}]}$ et $\boxed{P_{Ouv}(S) = \vec{u}.\mathbb{I}(O,S)[\vec{v}]}$

1.3.2.2 Trièdre principal d'inertie

Le tenseur d'inertie étant symétrique et réel, il est diagonalisable dans un repère orthonormé $\mathcal{R}'$. Ce repère est appelé repère principal d'inertie et les 3 axes sont les directions principales d'inertie. Les moments d'inertie A′, B′ et C′ sont les moments principaux d'inertie de S en O.

1.3.3 Propriétés de la matrice d'inertie

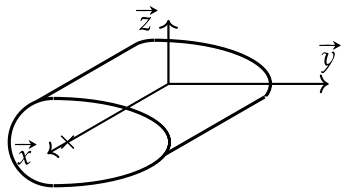
1.3.3.1 Un plan de symétrie

Si un solide possède un plan de symétrie (par exemple, le plan O_{xy}), alors les produits d'inertie P_{Oxz} et P_{Oyz} sont nuls. L'axe perpendiculaire à ce plan (ici z) est principal d'inertie.
La matrice a alors la forme suivante :

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1.3.3.2 Deux plans de symétrie

Si un solide possède deux plans de symétrie, ces plans sont nécessairement orthogonaux. Dans le repère formé des axes associés à ces plans, la matrice associée à l'opérateur d'inertie est diagonale. Ce repère est donc principal d'inertie.



$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1.3.3.3 Un axe de révolution

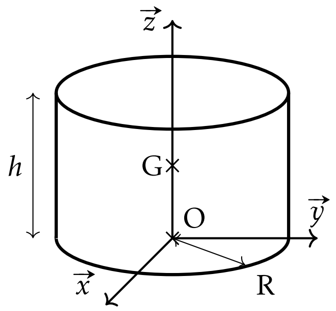
Si l'axe $(O, \vec{z})$ est un axe de révolution (Attention : pas un axe de symétrie !), alors les moments d'inertie I_{Ox} et I_{Oy} sont égaux et les trois produits d'inertie sont nuls. la matrice d'inertie a l'allure ci-contre.

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,-,-,\vec{z})}$$

Par axisymétrie, x et y jouent le même rôle. ce qui donne : $\iiint_S x^2.dm = \iiint_S y^2.dm$

$$\boxed{A = B = \frac{1}{2}.C + \iiint_S z^2.dm}$$

Exemple :

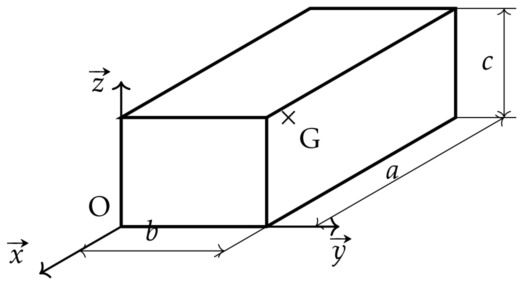


Matrice d'inertie en G du cylindre de masse m, de rayon R et hauteur h, d'axe $(G, \vec{z})$:

$$\mathbb{I}_{(G,S)} = \begin{bmatrix} m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m.\left(\frac{R^2}{2}\right) \end{bmatrix}_{(G,-,-,\vec{z})}$$

Matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de masse m, de côtés a sur x, b sur y et c sur z :

$$\mathbb{I}_{(G,S)} = \begin{bmatrix} m.\frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m.\frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m.\frac{a^2+b^2}{12} \end{bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



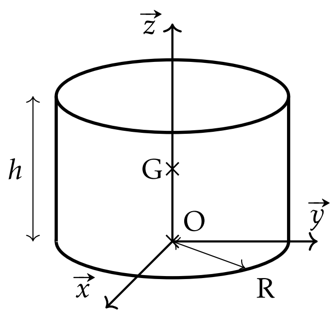
1.3.4 Théorème de Huygens

Ce théorème donne la relation entre $\mathbb{I}_{(G,S)}$, matrice d'inertie du solide S au centre de gravité G, et $\mathbb{I}_{(P,S)}$, matrice d'inertie en un point P quelconque tel que $\overrightarrow{PG} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$:

$$\boxed{\mathbb{I}_{(P,S)} = \mathbb{I}_{(G,S)} + \begin{bmatrix} m.(y^2+z^2) & -m.x.y & -m.x.z \\ -m.x.y & m.(x^2+z^2) & -m.y.z \\ -m.x.z & -m.y.z & m.(x^2+y^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Donc, la matrice d'inertie en un point quelconque P est la somme de la matrice d'inertie exprimée en G et de la matrice d'inertie en G "du point P affecté de la masse totale".

Exemple :

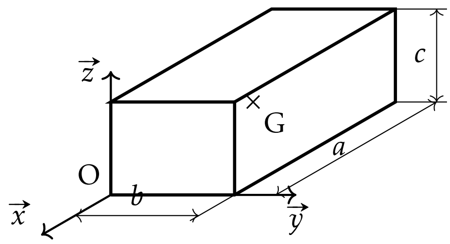


Matrice d'inertie en O du cylindre de masse m, de rayon R et hauteur h, d'axe $(O, \vec{z})$ avec $\overrightarrow{OG} = \frac{h}{2}.\vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m.\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m.\left(\frac{R^2}{2}\right) \end{bmatrix}_{(O,-,-,\vec{z})}$$

Matrice d'inertie en O d'un parallélépipède de masse m, de côtés a sur x, b sur y et c sur z avec $\overrightarrow{OG} = -\frac{a}{2}.\vec{x} + \frac{b}{2}.\vec{y} + \frac{c}{2}.\vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} m.\frac{b^2+c^2}{3} & m.\frac{a.b}{4} & m.\frac{a.c}{4} \\ m.\frac{a.b}{4} & m.\frac{a^2+c^2}{3} & -m.\frac{b.c}{4} \\ m.\frac{a.c}{4} & -m.\frac{b.c}{4} & m.\frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



1.4 Torseur cinétique

1.4.1 Définition

On appelle torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement) d'un système matériel Σ par rapport au repère $\mathcal{R}$, le torseur défini par :

$$\boxed{\mathscr{C}_{\Sigma/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} \\ \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}}$$

avec pour :

- **résultante cinétique** ou quantité de mouvement de Σ par rapport à $\mathcal{R}$ $\boxed{\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M\in\Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm}$
- **moment cinétique en A** de Σ par rapport à $\mathcal{R}$ $\boxed{\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm}$

1.4.2 Conservation de la masse et quantité de mouvement

Démonstration : D'après le principe de conservation de la masse $\boxed{\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}}$

$$\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M\in\Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm = \underbrace{\iiint_{M\in\Sigma} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{R}}.dm = \left[\frac{d}{dt}\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{OM}.dm\right]_{\mathcal{R}}}_{\text{par conservation de la masse}} = \left[\frac{d}{dt}m.\overrightarrow{OG}\right]_{\mathcal{R}} = m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

1.4.3 Moment cinétique et champs équiprojectifs

Relation entre les moments cinétiques en deux points A et B d'un même système Σ $\boxed{\vec{\sigma}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}}$

1.4.4 Cas du solide indéformable S

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} &= \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})}.dm = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm \\
&= \left(\iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm\right) \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm \\
&= m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} m.\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})} \\ m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right] \end{array} \right\}}
\end{aligned}$$

Cas particuliers • **A en** G $\boxed{\vec{\sigma}_{(G,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(G,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]}$ A **fixe dans** $\mathcal{R}$ $\boxed{\vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]}$

1.5 Torseur dynamique

1.5.1 Définition

On appelle torseur dynamique (ou torseur des quantités d'accélération) d'un système matériel Σ par rapport au repère $\mathcal{R}$, le torseur défini par :

$$\boxed{\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} \\ \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}}}$$

- **résultante dynamique** de Σ par rapport à $\mathcal{R}$ $\boxed{\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M\in\Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm}$
- **moment dynamique** en A de Σ par rapport à $\mathcal{R}$ $\boxed{\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm}$

1.5.2 Conservation de la masse et résultante dynamique

D'après le principe de conservation de la masse $\boxed{\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}}$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} &= \iiint_{M\in\Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm \\
&= \iiint_{M\in\Sigma} \left[\frac{d}{dt}\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}.dm = \left[\frac{d}{dt}\iiint_{M\in\Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm\right]_{\mathcal{R}} \quad \text{par conservation de la masse} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\iiint_{M\in\Sigma} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{R}}.dm\right]_{\mathcal{R}} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{OM}.dm\right]_{\mathcal{R}} \quad \text{par conservation de la masse} \\
&= \left[\frac{d^2}{dt^2} m\overrightarrow{OG}\right]_{\mathcal{R}} = m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}}$$

La résultante dynamique est la dérivée par rapport au temps de le résultante cinétique.

1.5.3 Moment dynamique et champs équiprojectifs

Relation entre les moments dynamiques en deux points A et B d'un même système Σ indéformable :

$$\boxed{\vec{\delta}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} &= \iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm = \iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm + \iiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm \\
&= \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\iiint_{M\in\Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm}_{m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}} + \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}
\end{aligned}$$

1.5.4 Relation entre moment cinétique et moment dynamique

$$\boxed{\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}} + m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\iiint_{M\in\Sigma}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}dm\right]_{\mathcal{R}} = \iiint_{M\in\Sigma}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}.dm \\
&= \iiint_{M\in\Sigma}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AM}\right]_{\mathcal{R}}\wedge\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}+\overrightarrow{AM}\wedge\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}.dm \\
&= \iiint_{M\in\Sigma}(\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}-\vec{V}_{(A/\mathcal{R})})\wedge\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm+\iiint_{M\in\Sigma}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{A}_{(M/\mathcal{R})}.dm \\
&= -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\wedge\iiint_{\Sigma}\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.dm+\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \\
&= -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\wedge\left(m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}\right)+\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}
\end{aligned}$$

Cas particuliers

- A en G

$$\boxed{\vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}}$$

- **Solide Σ en translation**

$$\boxed{\vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})}=\vec{0}}$$

- **A fixe dans $\mathcal{R}$**

$$\boxed{\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}}$$

1.5.5 Projection du moment dynamique sur un axe

Il arrive fréquemment dans les problèmes de mécanique que l'on n'ait pas besoin de l'expression complète du moment dynamique, mais seulement de sa projection sur un axe $\vec{u}$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}.\vec{u}+\vec{u}.\left(m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\wedge\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\,\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u}}{\mathrm{dt}}-\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{u}\right]_{\mathcal{R}}+\vec{u}.\left(m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\wedge\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}\right)
\end{aligned}}$$

En agissant ainsi, il ne reste plus qu'à dériver la composante de $\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}$ sur $\vec{u}$ et le produit mixte, invariant par permutation circulaire, peut être source de simplification considérables.

1.6 Énergie cinétique

1.6.1 Définition

L'énergie cinétique d'un système Σ dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R})=\frac{1}{2}\iiint_{M\in\Sigma}\left[\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}\right]^2.dm}$$

. Son unité est le Joule (J).

1.6.2 Cas du solide indéformable S

$$\begin{aligned}
2.\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) &= \iiint_{M\in S}\left[\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}+\overrightarrow{MG}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]^2.dm \\
&= \iiint_{M\in S}\left[\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}\right]^2.dm+\iiint_{M\in S}\left[\overrightarrow{MG}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]^2.dm+2\iiint_{M\in S}\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}.\left[\overrightarrow{MG}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right].dm
\end{aligned}$$

$$\text{or}\quad \underbrace{\overrightarrow{MG}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}_{\vec{a}}.\left(\underbrace{\overrightarrow{MG}}_{\vec{b}}\wedge\underbrace{\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}_{\vec{c}}\right)=\underbrace{\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}_{\vec{c}}.\left[\left(\underbrace{\overrightarrow{MG}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}_{\vec{a}}\right)\wedge\underbrace{\overrightarrow{MG}}_{\vec{b}}\right]\quad\text{donc}$$

$$2.\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = m.\left[\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}\right]^2+\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}.\iiint_{M\in S}\overrightarrow{GM}\wedge\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\wedge\overrightarrow{GM}.dm+2.\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}.\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\wedge\cancel{\iiint_{M\in S}\overrightarrow{GM}.dm}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R})=\frac{1}{2}.m.\left[\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}\right]^2+\frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}.\mathbb{I}(G,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]}$$

ATTENTION ! Formule vraie seulement en G, le centre de gravité

Cas particuliers :

- mouvement d'un solide S autour d'un point fixe A de $\mathcal{R}$: $\boxed{\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R})=\frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}.\mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]}$
- mouvement d'un solide S autour d'un axe fixe $(A,\vec{x})$ de $\mathcal{R}$ avec $\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}=\omega.\vec{x}$: $\boxed{\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R})=\frac{1}{2}.I_{Ax}(S).\omega^2}$

1.7 Éléments cinétiques d'un ensemble

Les éléments cinétiques d'un ensemble Σ de n solides S_i en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ sont :

$$\boxed{\mathscr{C}_{\Sigma/\mathcal{R}}=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{C}_{S_i/\mathcal{R}}\qquad \mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}}=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{D}_{S_i/\mathcal{R}}\qquad \mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R})=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_c(S_i/\mathcal{R})}$$

Pour les torseurs, attention de calculer les moments au même point pour tous les solides.

2 Puissance

2.1 Puissance des efforts extérieurs

Puissance des efforts extérieurs à un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$.

Soit un champ de forces $d\vec{F}(M)$ agissant sur chaque point M d'un système Σ.

EXEMPLE :

- pesanteur : $d\vec{F}(M)=\rho(M).dV.\vec{g}$
- champ de pression dans un fluide : $d\vec{F}(M)=-p(M).\vec{n}(M).dS$
- champ des forces de contact entre 2 solides : $d\vec{F}(M)=-p(M).\vec{n}(M).dS+f\,p(M).\vec{t}(M).dS$

La puissance développée, à l'instant t, par l'action des efforts extérieurs sur Σ, dans le mouvement de $\Sigma/\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{P_{(Ext\to\Sigma/\mathcal{R})}=\iiint_{M\in\Sigma}\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}.d\vec{F}(M)}$$

2.2 Cas particulier du solide indéformable

$$\begin{array}{lrcl} & \vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})} & = & \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \text{d'où} & P_{(Ext\to S/\mathcal{R})} & = & \iiint_{M\in S} d\vec{F}(M).\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \iiint_{M\in S} d\vec{F}(M).\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AM}\right] \\ & & = & \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})}.\iiint_{M\in S} d\vec{F}(M) + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}.\iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}(M) \end{array}$$

or le torseur associé aux efforts extérieurs à S en A s'écrit : $\mathcal{F}_{Ext\to S} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \iiint_{M\in S} d\vec{F}(M) \\ \iiint_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}(M) \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{R}_{(Ext\to S)} \\ \vec{M}_{(A,Ext\to S)} \end{array}\right\}$

donc $\boxed{P_{(Ext\to S/R)} = \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})}.\vec{R}_{(Ext\to S)} + \vec{\Omega}_{(S/R)}.\vec{M}_{(A,Ext\to S)}}$

La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à un solide S en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est égale au produit (comoment) du torseur cinématique de $S/\mathcal{R}$ par le torseur des actions mécaniques extérieures. $\boxed{P_{(Ext\to S/\mathcal{R})} = \mathcal{F}_{Ext\to S} \otimes \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}}}$

REMARQUE : Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (qui doit bien sûr être le même pour les deux !) mais du repère $\mathcal{R}$.

$$_A\left\{\begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_{\mathcal{R}} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array}\right\}_{\mathcal{R}} = X.V_x + Y.V_y + Z.V_z + L.\omega_x + M.\omega_y + N.\omega_z$$

2.3 Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables

Soient 2 solides S_1 et S_2 en liaison à l'intérieur d'un système. On parle aussi de la puissance ($P_{(S_2\leftrightarrow S_1/\mathcal{R})}$) des inter-efforts de liaison pour la puissance $P_{int}(S_2, S_1)$ des efforts intérieurs .

La puissance $P_{int}(S_2, S_1)$ développée par les efforts de liaison entre les 2 solides est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} P_{(S_2\leftrightarrow S_1/\mathcal{R})} & = & P_{(S_2\to S_1/\mathcal{R})} + P_{(S_1\to S_2/\mathcal{R})} \\ & = & \mathcal{F}_{S_2\to S_1} \otimes \mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}} + \mathcal{F}_{S_1\to S_2} \otimes \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}} \\ & = & \mathcal{F}_{S_2\to S_1} \otimes \left[\mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}} - \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}}\right] \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_{int}(S_2, S_1) = P_{(S_2\leftrightarrow S_1/\mathcal{R})} = -\mathcal{F}_{S_2\to S_1} \otimes \mathcal{V}_{S_2/S_1}} \end{array}$$

Cette puissance est indépendante du repère $\mathcal{R}$ par rapport auquel elle est calculée.

2.4 Liaison parfaite entre deux solides

Deux solides S_1 et S_2 ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle (pas de frottement). $\boxed{P_{int}(S_1, S_2) = 0}$

APPLICATION : retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées.

- pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$:

$$\mathscr{V}_{S_1/S_2} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} \omega & V \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}} \qquad \mathcal{F}_{S_1 \to S_2} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}}$$

$$P_{int}(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \forall \omega, \forall V, L.\omega + X.V = 0 \Leftrightarrow X = L = 0 \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{F}_{S_2 \to S_1} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}}$$

- glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$:

$$\mathscr{V}_{S_1/S_2} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} \omega & \frac{p}{2\pi}.\omega \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}} \qquad \mathcal{F}_{S_1 \to S_2} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}}$$

$$P_{int}(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \forall \omega, L.\omega + X.\frac{p}{2\pi}.\omega = 0 \Leftrightarrow L = -\frac{p}{2\pi}.X \quad \text{d'où} \; \mathcal{F}_{S_2 \to S_1} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} X & -\frac{p}{2\pi}.X \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}}$$

3 Principe fondamental de la dynamique

3.1 Référentiels galiléens

3.1.1 Principe de l'inertie

Il existe un repère privilégié dans lequel un point matériel qui serait soustrait à toute influence (actions mécaniques) aurait une accélération nulle. Ce repère est dit galiléen ou absolu.

> référentiel = repère à 3 dimensions (longueur en mètre) + chronologie (temps en seconde)

3.1.2 Relativité galiléenne

On remarque que s'il existe un repère galiléen, alors il en existe une infinité, qui se déduisent du premier par des mouvements d'accélération nulle (mouvement de translation uniforme). Tous ces repères conviennent dont pour exprimer les lois de la mécanique classique.

3.1.3 Espaces galiléens approchés

- **repère héliocentrique de Copernic :** (centre d'inertie du système solaire + 3 directions stellaires) $\mapsto$ étude des fusées et satellites interplanétaires.
- **repère géocentrique :** lié au centre d'inertie de la terre + 3 directions stellaires $\mapsto$ étude du mouvement des corps restant au voisinage de la terre ou expériences de longue durée.
- **repère terrestre :** lié à la terre $\mapsto$ mécanismes étudiés en laboratoire

On montre que tout repère $\mathcal{R}$ en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est aussi galiléen.

3.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un référentiel galiléen tel que, pour tout ensemble matériel Σ, le torseur dynamique de Σ dans cet espace est constamment égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à Σ :

$$\boxed{\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{\mathrm{Ext}\to\Sigma}}$$

3.3 Théorème de la résultante dynamique

$$\boxed{m_\Sigma.\vec{\mathrm{A}}_{(\mathrm{G}/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathrm{R}}_{(Ext\to\Sigma)}}$$

3.4 Théorème du moment dynamique

$$\boxed{\vec{\delta}_{(\mathrm{A},\Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathrm{M}}_{(\mathrm{A},Ext\to\Sigma)}}$$

Remarque : En prenant A en un point **fixe** de $\mathcal{R}_g$ ou au centre d'inertie G de Σ, le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique d'où les théorèmes du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\vec{\sigma}_{(\mathrm{A},\Sigma/\mathcal{R}_g)}\right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathrm{M}}_{(\mathrm{A},\mathrm{Ext}\to\Sigma)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\vec{\sigma}_{(\mathrm{G},\Sigma/\mathcal{R}_g)}\right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathrm{M}}_{(\mathrm{G},\mathrm{Ext}\to\Sigma)}$$

3.5 Équations de mouvement

En appliquant ces théorèmes, on obtient des relations entre les paramètres de position du système, leurs dérivées $1^{\text{ères}}$ et 2^{ndes} et les efforts s'exerçant sur Σ. On appelle équation du mouvement une équation différentielle du 2^{nd} ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

3.6 Théorème de l'énergie cinétique

3.6.1 Cas du solide unique S

Soit un unique solide S en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$: $\mathscr{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}}$
En multipliant cette expression par le torseur cinématique, on obtient la puissance galiléenne des efforts extérieurs à S :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g}\otimes\mathscr{V}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g} &= \mathcal{F}_{\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}}\otimes\mathscr{V}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g} = \mathrm{P}_{(\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)} \text{ or} \\
\mathscr{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g}\otimes\mathscr{V}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}_g} &= \left[\iiint_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}}\vec{\mathrm{A}}_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.dm\right].\vec{\mathrm{V}}_{(\mathrm{A},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)} + \left[\iiint_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}}\vec{\mathrm{AM}}\wedge\vec{\mathrm{A}}_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.dm\right].\vec{\Omega}_{(\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)} \\
&= \iiint_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}}\vec{\mathrm{A}}_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.\left[\vec{\mathrm{V}}_{(\mathrm{A},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)} + \vec{\Omega}_{(\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}\wedge\vec{\mathrm{AM}}\right].dm \\
&= \iiint_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}}\vec{\mathrm{A}}_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.\vec{\mathrm{V}}_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.dm = \iiint_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}}\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{V}}^2_{(\mathrm{M},\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}.dm = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\left(\mathrm{S}/\mathcal{R}_g\right)
\end{aligned}$$

d'où le théorème de l'énergie cinétique :

> La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\left(\mathrm{S}/\mathcal{R}_g\right) = \mathrm{P}_{(\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}/\mathcal{R}_g)}}$$

3.6.2 Système Σ de n solides S_i

Pour chaque solide i, on a : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\left(\mathrm{S}_i/\mathcal{R}_g\right) = \mathrm{P}_{(\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}_i/\mathcal{R}_g)}$

En ajoutant les n relations pour les n solides : $\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\left(\mathrm{S}_i/\mathcal{R}_g\right) = \sum\mathrm{P}_{(\mathrm{Ext}\to\mathrm{S}_i/\mathcal{R}_g)}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\left(\Sigma/\mathcal{R}_g\right) = P_{(Ext\to\Sigma/\mathcal{R}_g)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} P_{int}(S_k,S_l) = P_{(Ext\to\Sigma/\mathcal{R}_g)} + P_{int}(\Sigma)}$$

Remarques :

- l'équation obtenue à partir du théorème de l'énergie cinétique n'est pas indépendante des équations fournies par le principe fondamental.
- le principe fondamental donne 6 équations et le théorème de l'énergie cinétique une seule, donc suffisant seulement pour les problèmes à un degré de mobilité.
- pour un système de solides, il faut tenir compte des inter-efforts, contrairement au PFD.
- ce théorème n'est intéressant que si on peut intégrer facilement la puissance ie si la puissance "dérive d'un potentiel" et si les liaisons sont parfaites.

4 Notion de rendement

4.1 Définitions

Rendement mécanique Le rendement mécanique d'un mécanisme est donné par : $\eta(t) = \frac{\lvert P_r\rvert}{P_m} \quad \text{avec} \quad 0 \le \eta(t) \le 1$	**Puissance dissipée** Puissance perdue sous forme de chaleur $P_{\text{dissipée}} = P_d \quad \text{avec} \quad P_d \le 0$
Puissance motrice Puissance reçue par le système $P_{\text{motrice}} = P_m \quad \text{avec} \quad P_m \ge 0$ Un moteur exerce une puissance motrice si le couple a le même signe que la vitesse de rotation et la pesanteur si le centre de gravité descend.	**Puissance réceptrice** Puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur. $P_{\text{réceptrice}} = P_r \quad \text{avec} \quad P_r \le 0$ Puissance de la pesanteur si le centre de gravité monte ou puissance d'un moteur si le couple et la vitesse de rotation sont de signe contraire ("frein-moteur").

4.2 Calcul du rendement d'un ensemble

Calcul du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement par rapport $\mathcal{R}_g$. Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} = P_m + P_d + P_r \qquad \Leftrightarrow \qquad P_m + P_d + P_r - \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} = 0$$

1. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} = 0$ alors $\eta = \frac{\lvert P_r\rvert}{P_m}$
2. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} < 0$ alors $\eta = \frac{\lvert P_r\rvert}{P_m - \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}}}$
3. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} > 0$ alors $\eta = \frac{\left\lvert P_r - \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}}\right\rvert}{P_m}$

Remarques :

- Le rendement dépend en général du temps.
- En général, on calcule un rendement moyen pour les mouvements cycliques.
- Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur, le rendement est nul (frein).

5 Formulaire

Masse et centre de masse

$m_\Sigma = \iiint_\Sigma \rho(M).dV$ $\quad \iiint_\Sigma \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$ $\quad m_\Sigma.\overrightarrow{OG} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{OM}.dm$

Opérateur d'inertie

$\vec{U} \mapsto \mathbb{I}(O,S)\left[\vec{U}\right] = \iiint_S \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}\right).dm$

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & -P_{Oxy} & -P_{Oxz} \\ -P_{Oxy} & I_{Oy} & -P_{Oyz} \\ -P_{Oxz} & -P_{Oyz} & I_{Oz} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$P_{Oxy}(S) = \iiint_S x.y.dm$ $\quad I_{Ox}(S) = \iiint_S (y^2+z^2).dm$

Torseur cinétique : $\mathscr{C}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})} \\ \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}_A$

$\vec{\sigma}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$

$\vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]$

Cas particuliers

- A en G $\quad \vec{\sigma}_{(G,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(G,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]$
- **A fixe dans $\mathcal{R}$** $\quad \vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(A,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]$

Énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}.\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}} \otimes \mathscr{V}_{S/\mathcal{R}}$

$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}.m.\left[\vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})}\right]^2 + \frac{1}{2}.\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}.\mathbb{I}(G,S)\left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right]$

Torseur dynamique : $\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})} \\ \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}_A$

$\vec{\delta}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{A}_{(G/\mathcal{R})}$

$\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}} + m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$

Cas particuliers

- A en G $\quad \vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}$
- **Solide Σ en translation** $\quad \vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{0}$
- **A fixe dans $\mathcal{R}$** $\quad \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}\right]_{\mathcal{R}}$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u} &= \frac{d\,\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u}}{dt} - \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\left[\frac{d}{dt}\vec{u}\right]_{\mathcal{R}} \dots \\ &\dots + \vec{u}.\left(m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}\right)\end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique

$\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{Ext\to\Sigma}$

Théorème de l'énergie cinétique

$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c\left(\Sigma/\mathcal{R}_g\right) = P_{(Ext\to\Sigma/\mathcal{R}_g)} + P_{int}(\Sigma)$

Puissance des efforts extérieurs

$P_{(Ext\to S/\mathcal{R})} = \mathcal{F}_{Ext\to S} \otimes \mathscr{V}_{S/\mathcal{R}}$

Puissance des efforts intérieurs

$P_{int}(S_2,S_1) = P_{(S_2\leftrightarrow S_1/\mathcal{R})} = -\mathcal{F}_{S_2\to S_1} \otimes \mathscr{V}_{S_2/S_1}$