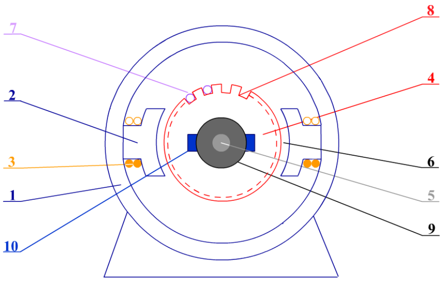
CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-0 : Support de cours Machines à courant continu (MCC)



1. Stator
2. Inducteur
3. Bobines de l'inducteur
4. Rotor
5. Arbre
6. Champ magnétique
7. Bobinage Induit
8. Conducteur de l'induit
9. Collecteur
10. Porte balais

Objectifs — **MODELISER RESOUDRE**

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable, à partir des équations temporelles du moteur à courant continu de

- transposer les équations dans le domaine de Laplace
- établir le schéma bloc du système
- déterminer la réponse temporelle du système
- évaluer le temps de réponse à 5%
- déterminer la réponse en fréquence du système

Table des matières

1 Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway

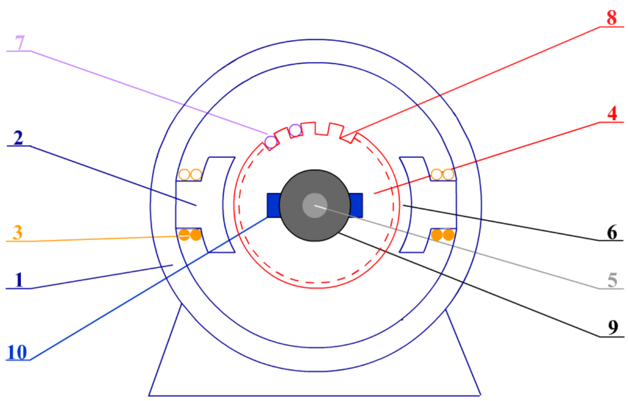
Les grandes métropoles répondent au problème du déplacement des populations par le développement des transports en commun. Dans ce contexte, il est possible d'augmenter le débit des passagers en augmentant la vitesse de déplacement et en diminuant les temps d'arrêt aux gares. Ce dernier point implique que les dispositifs d'accès des passagers aux voitures soient optimisés.

Le support de ce Cours-Td est le système d'ouverture et de fermeture des portes de voitures développé par la société FAIVELEY qui équipe des tramways, des métropolitains ou des trains express régionaux.

2 Moteur à courant continu

Un moteur électrique est utilisé pour convertir l'énergie électrique du réseau en énergie mécanique. On considérera pour l'étude, que l'inertie sur l'axe moteur vaut $0,01$ Kg.m^2. On considère alors les valeurs numériques suivantes pour le moteur: $R = 20\ \Omega$ $\quad L = 0{,}1$ H $\quad K_e = 1{,}2$ V.(rad.s^{-1})$^{-1}$ $\quad K_c = 1{,}2$ Nm.A^{-1} $\quad J = 0{,}01$ Kg.m^2

2.1 Technologie du moteur à courant continu



1. Stator
2. Inducteur
3. Bobines de l'inducteur
4. Rotor
5. Arbre
6. Champ magnétique
7. Bobinage Induit
8. Conducteur de l'induit
9. Collecteur
10. Porte balai

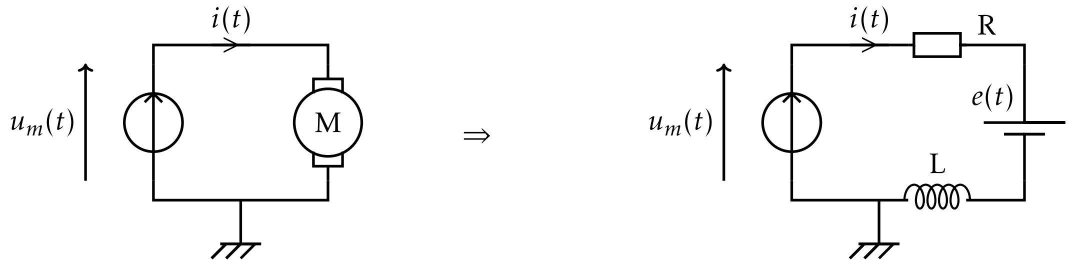
2.2 Equations du modèle

Écrivons les modèles de connaissances pour déterminer les relations entre la tension d'alimentation $u_m(t)$, l'intensité $i(t)$, la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ et les couples moteur $C_m(t)$ et résistant $C_r(t)$.

2.2.1 Équation électrique

Pour alimenter le moteur on applique à ses bornes une tension $u_m(t)$. Le moteur peut être modélisé par une résistance R en série avec une inductance L et une force électromotrice induite $e(t)$.

On obtient alors l'équation électrique $\boxed{u_m(t) = R.i(t) + L.\frac{di}{dt} + e(t)}$



2.2.2 Équation mécanique

L'application du moment dynamique sur l'axe moteur soumis aux actions mécaniques du couple moteur C_m et du couple résistant C_r conduit à $\boxed{J.\frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - C_r(t)}$

2.2.3 Couplage électromoteur

L'action mécanique de la force de Laplace ($d\vec{F} = i(t).\vec{dl} \wedge \vec{B}$ et $d\phi = B.dS$) sur le rotor donne la relation entre le couple moteur et l'intensité $\boxed{C_m(t) = K_c.i(t)}$

2.2.4 Force électromagnétique induite

La loi de Lenz conduit à la relation entre la vitesse de rotation et le force électromagnétique induite $\boxed{e(t) = K_e.\omega_m(t)}$

2.3 Schéma bloc

Afin de trouver les lois d'entrées-sorties, passons les équations temporelle dans le domaine symbolique de Laplace.

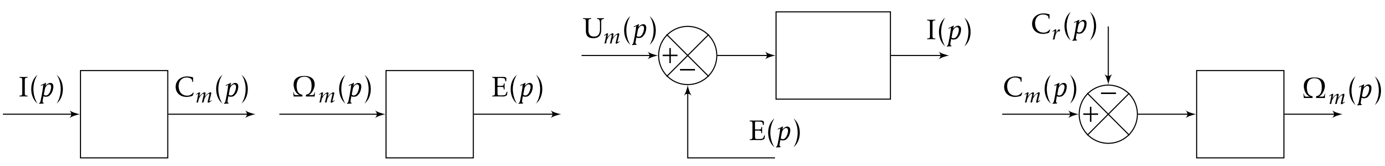
2.3.1 Construction des blocs

Le modèle de connaissance permet d'obtenir 4 équations pour le moteur à courant continu:

avec les conditions d'Heaviside

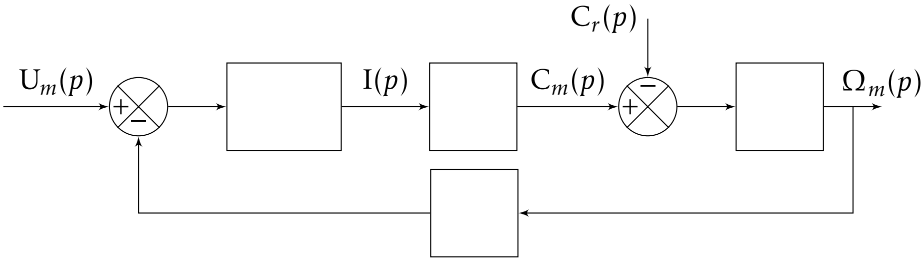
$$\begin{array}{rcllcc}
u_m(t) & = & R.i(t) + L.\frac{di}{dt} + e(t) & \Rightarrow & & = \\
J.\frac{d\omega_m}{dt} & = & C_m(t) - C_r(t) & \Rightarrow & & = \\
C_m(t) & = & K_c.i(t) & \Rightarrow & & = \\
e(t) & = & K_e.\omega_m(t) & \Rightarrow & & =
\end{array}$$

Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :



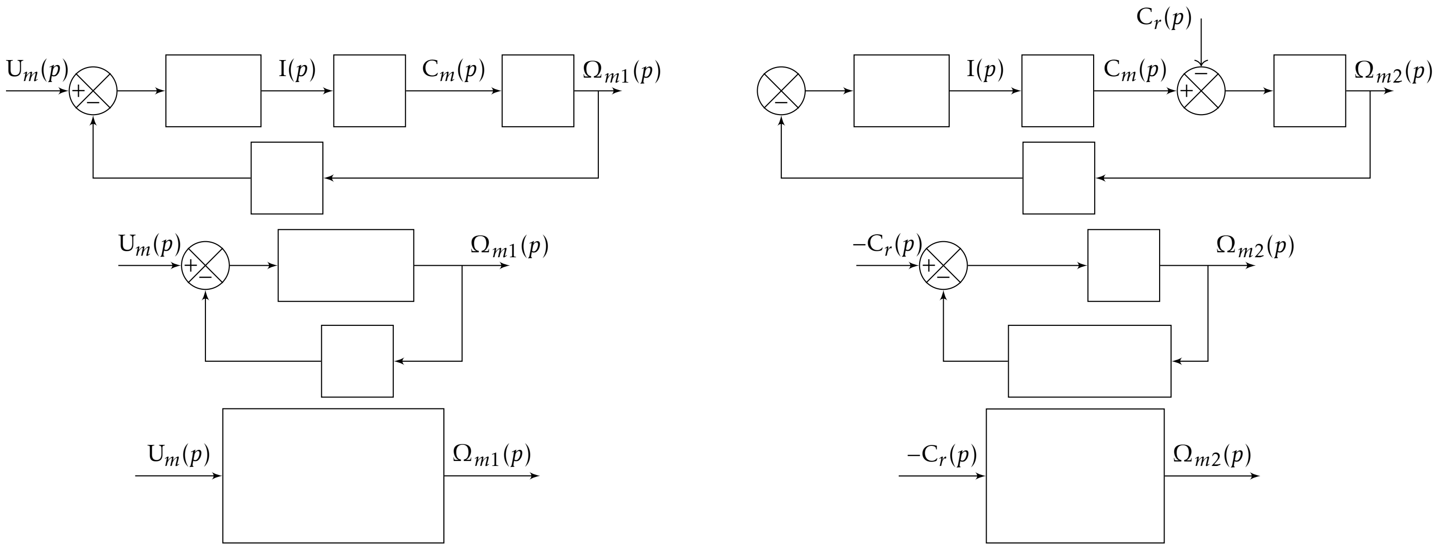
2.3.2 Schéma bloc du moteur à courant continu

L'assemblage des modèles de connaissances et de comportements (ici uniquement de connaissances) permet de construire le schéma bloc complet:



2.3.3 Fonction de transfert

Il est possible de déterminer la fonction de transfert à partir des équations mais on peut également déplacer les blocs pour se ramener à un schéma bloc élémentaire. De plus à partir du principe de superposition :



D'après le théorème de superposition :

$$\Omega_m(p) \quad = \quad \Omega_{m1}(p)+\Omega_{m2}(p) = \underline{\hspace{6cm}}.U_m(p) - \underline{\hspace{5cm}}.C_r(p)$$

Après simplifications : $\boxed{\Omega_m(p) = \qquad\qquad\qquad .U_m(p) - \qquad\qquad\qquad .C_r(p)}$

ou bien : $\boxed{\Omega_m(p) = \qquad\qquad\qquad .U_m(p) - \qquad\qquad\qquad .C_r(p)}$

La lecture directe du schéma bloc, conduit à : $\Omega_m(p) = \dfrac{1}{\mathrm{J}.p}$.

$$\begin{aligned}\Omega_m(p) &= \qquad\qquad \mathrm{U}_m(p) - \qquad .\mathrm{C}_r(p)\\ (\mathrm{J}.p.(\mathrm{R}+\mathrm{L}.p)+\mathrm{K}_c.\mathrm{K}_e).\Omega_m(p) &= \mathrm{K}_c.\mathrm{U}_m(p) - (\mathrm{R}+\mathrm{L}.p).\mathrm{C}_r(p)\end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

3 Réponses indicielle et fréquentielle

3.1 Pulsation propre et coefficient d'amortissement

D'après l'équation du moteur à courant continue établie précédemment, le système est du second ordre. Déterminons alors par identification les paramètres caractéristiques ξ et ω_0:

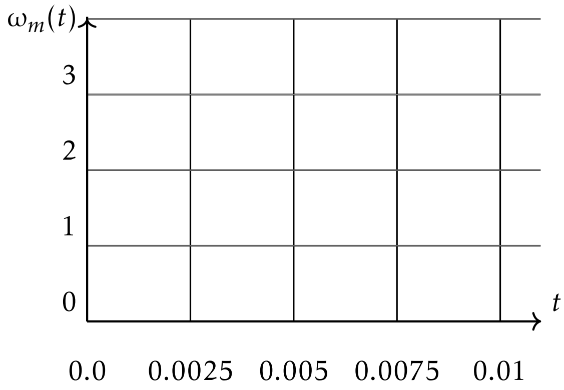
$$1 + \frac{\mathrm{J.R}}{\mathrm{K}_e.\mathrm{K}_c}.p + \frac{\mathrm{J.L}}{\mathrm{K}_e.\mathrm{K}_c}.p^2 = 1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \; = \qquad\qquad \text{et}$$

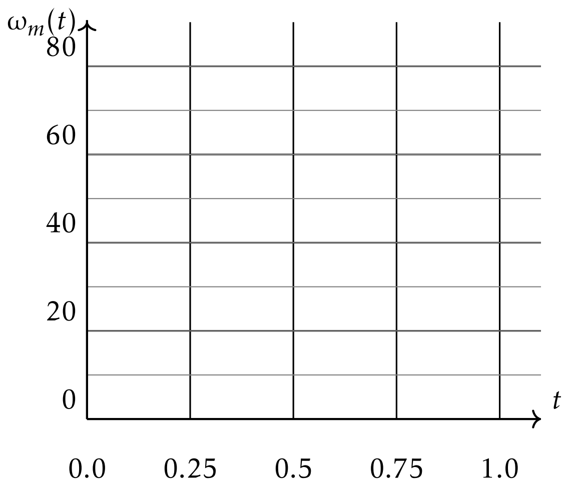
Application Numérique : $\boxed{\omega_0 = \qquad \mathrm{rad.s}^{-1} \qquad \xi = \qquad}$

3.2 Réponse temporelle à un échelon

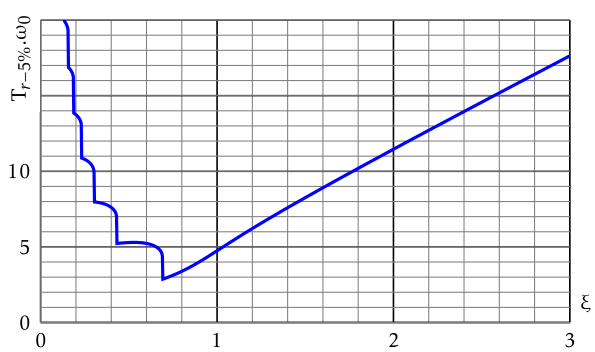
On impose un échelon de tension $u_m(t) = \mathrm{U}_0.u(t)$ avec $\mathrm{U}_0 = 100$ V. Par transformée de Laplace, $\mathrm{U}_m(p) = \dfrac{\mathrm{U}_0}{p}$

$$\begin{aligned}\Omega_m(p) &= \frac{\frac{1}{\mathrm{K}_e}}{1 + \frac{\mathrm{J.R}}{\mathrm{K}_e.\mathrm{K}_c}.p + \frac{\mathrm{J.L}}{\mathrm{K}_e.\mathrm{K}_c}.p^2}.\frac{\mathrm{U}_0}{p} = \frac{\mathrm{K.U}_0}{p.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}\\ \text{avec} \quad & \tau_1 = \frac{1}{\omega_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)} \text{ et } \tau_2 = \frac{1}{\omega_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)}\\ \omega_m(t) &= \mathrm{K.U}_0\left[1 + \frac{1}{\tau_2-\tau_1}.\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1} - \tau_2.e^{-t/\tau_2}\right)\right]\\ \omega_{m\infty} &= \lim_{t\to\infty}\omega_m(t) = \lim_{p\to 0} p.\Omega_m(p) =\end{aligned}$$





Application Numérique :



$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{rr} &= t_{r5\%}.\omega_0\\ t_{r5\%} &= \\ &\approx \qquad \mathrm{s}\end{aligned}$$

3.3 Réponse fréquentielle

Soit la fonction de transfert $H(p)$ définie par:

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J.R}{K_e.K_c}.p + \frac{J.L}{K_e.K_c}.p^2} = \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}$$