CI-2-5:
Prévoir et vérifier les performances des systèmes linéaires continus invariants.

CI-2 Prévoir, modifier et vérifier les performances des systèmes linéaires continus invariants.

Lycée Carnot - Dijon, 2023 - 2024

Germain Gondor

Sommaire

Sommaire

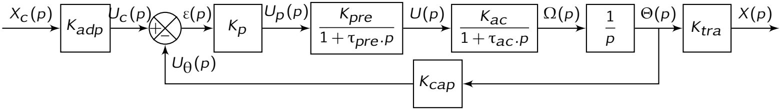
Cet exercice n'est pas contextualisé mais permet de s'entraîner sur l'étude des performances des SLCI et de leur correction.

Cependant, on peut inventer n'importe quoi pour lui donner du sens. On cherche, par exemple, à asservir en position ($x(t)$) un système, dont l'actionneur principale peut être modélisé par une fonction de transfert du premier ordre de gain K_{ac} et de constantes de temps τ_{ac}, ayant pour entrée une tension $u(t)$ et admettant en sortie une vitesse de rotation $\omega(t)$. L'actionneur est relié à l'effecteur par une fonction de transfert modélisable par un gain pur et on considère que le déplacement du système $x(t)$ est proportionnel (de coefficient K_{tra}) à la rotation $\theta(t)$ de l'actionneur.

Un capteur permet de connaitre la position $\theta(t)$ de l'actionneur et la convertit en une tension $u_\theta(t)$ tel que $u_\theta(t) = K_{cap}.\theta(t)$. Un bloc d'adaptation permet d'obtenir une tension consigne $u_c(t)$ à partir de la consigne de position $x_c(t)$ imposée au système, avec $u_c(t) = K_{adp}.x_c(t)$.

Enfin, un correcteur proportionnel K_p convertit l'écart de tension $u_c(t) - u_\theta(t)$ en une tension pilote $u_p(t)$ pour le pré-actionneur de fonction de transfert du permier ordre de gain statique K_{pre} et de constante de temps τ_{pre}.

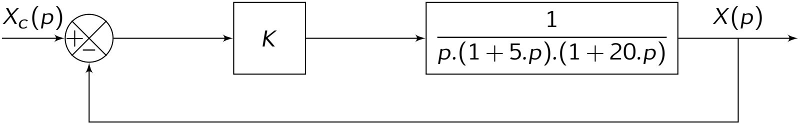
La figure ci-dessous donne le schéma bloc de cet asservissement :



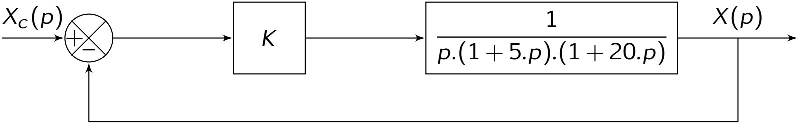
Pour que le système soit correctement asservi, $K_{adp} = \dfrac{K_{cap}}{K_{tra}}$ et on pose $K = K_{adp}.K_p.K_{pre}.K_{ac}$ et on donne $\tau_{pre} = 5$ s et $\tau_{ac} = 20$ s.

Sommaire

La simplification du système régulé devient :



La simplification du système régulé devient :



La figure sur la page ci-après donne les diagrammes de Bode de la FTBO du système pour $K = 1$.

Q - 1 : *Représenter sur le diagramme la marge de phase et la marge de gain de ce système. Donner leurs valeurs. Commenter.*

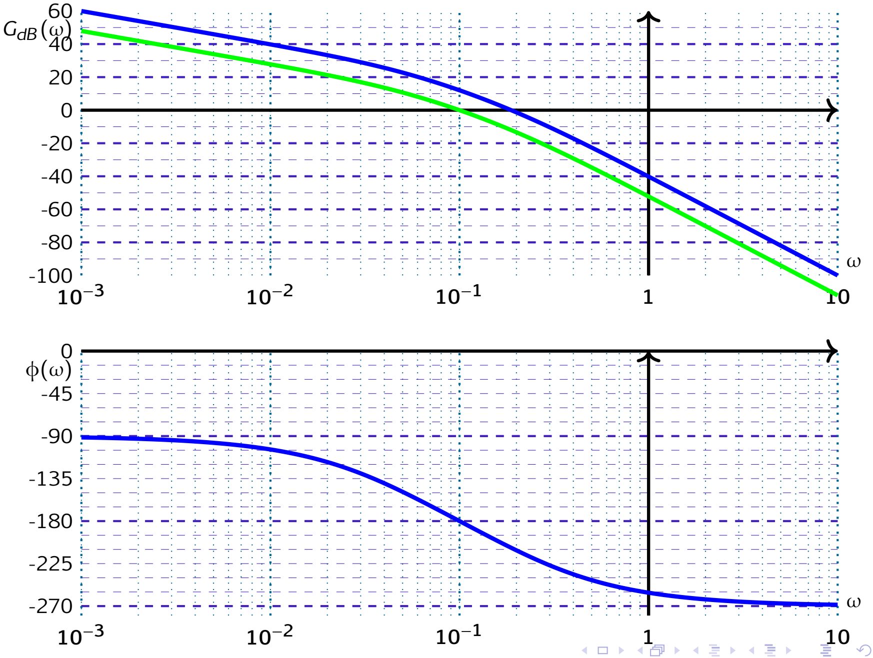
Q - 2 : *Représenter sur le diagramme la marge de phase et la marge de gain de ce système. Donner leurs valeurs. Commenter.*

Par lecture graphique, on trouve $M_G = -12$ dB et $M_\varphi = -28°$.

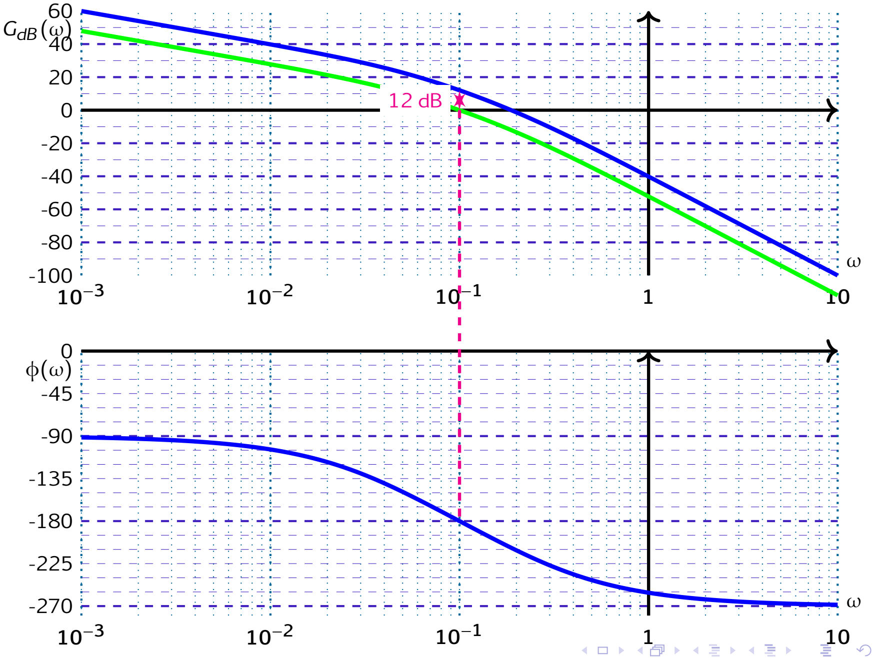
Q - 3 : *Représenter sur le diagramme la marge de phase et la marge de gain de ce système. Donner leurs valeurs. Commenter.*

Par lecture graphique, on trouve $M_G = -12$ dB et $M_\varphi = -28°$.

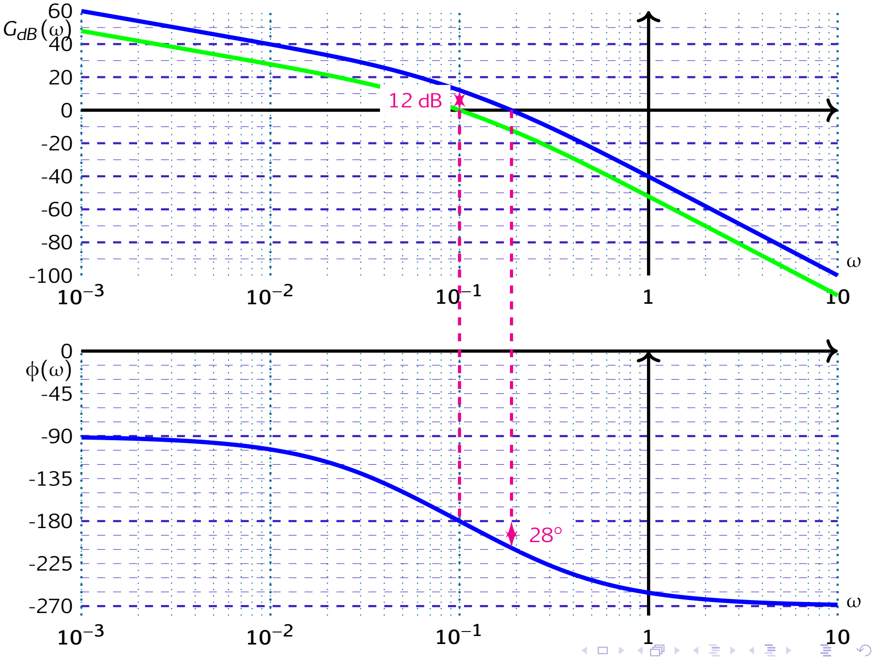
Les marges de gain et de phase sont négatives. Le système est instable.



60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10



60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
12 dB
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10


60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
12 dB
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

Q - 4 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Q - 5 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Comme la marge de gain est négative et vaut -12 dB, il faut descendre le gain de 12 dB.

Q - 6 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Comme la marge de gain est négative et vaut -12 dB, il faut descendre le gain de 12 dB. Cela conduit à avoir K, tel que :

$$20.\log(K) = -12$$

Q - 7 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

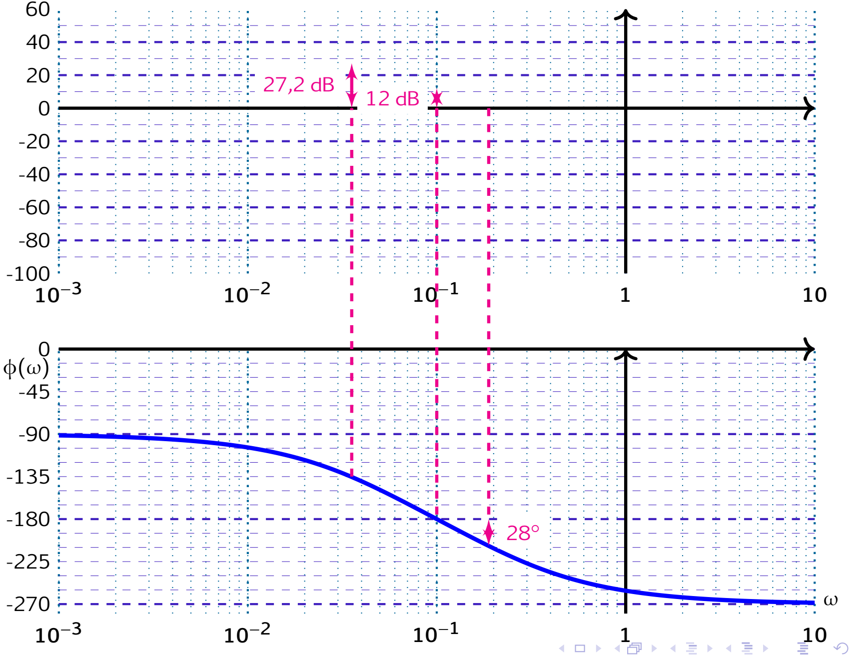
Comme la marge de gain est négative et vaut -12 dB, il faut descendre le gain de 12 dB. Cela conduit à avoir K, tel que :

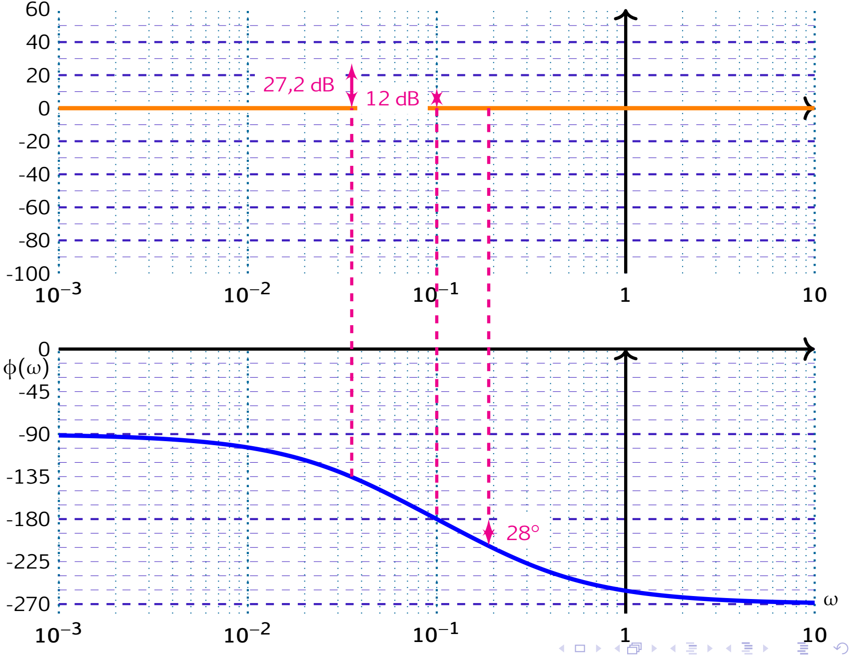
$$20.\log(K) = -12 \quad \Rightarrow \quad K = 10^{-\frac{12}{20}}$$

Q - 8 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

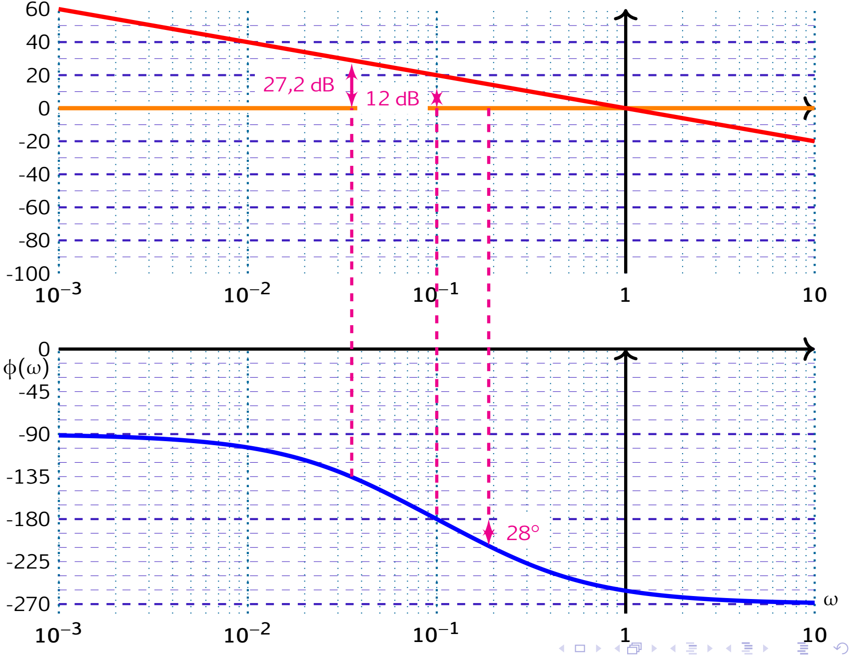
Comme la marge de gain est négative et vaut -12 dB, il faut descendre le gain de 12 dB. Cela conduit à avoir K, tel que :

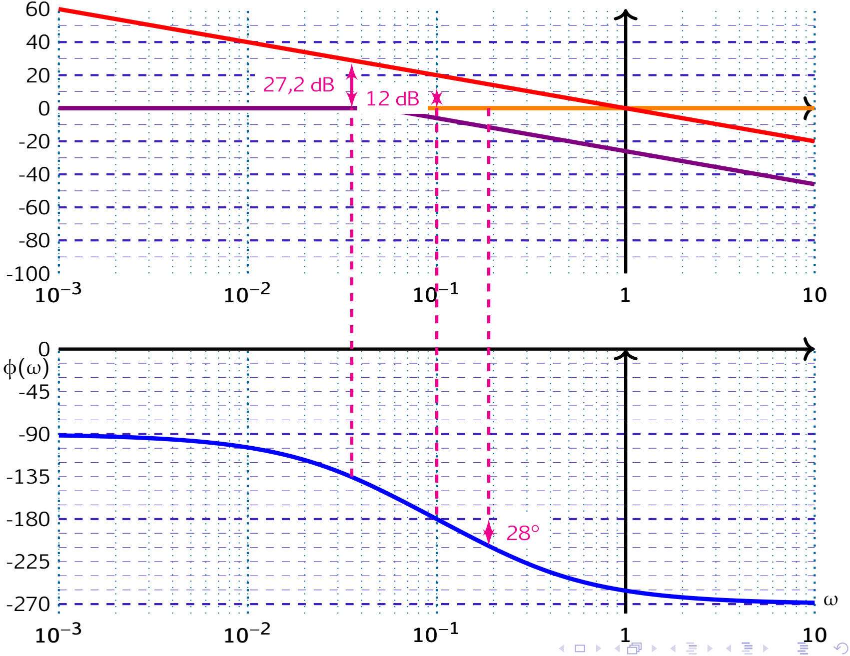
$$20.\log(K) = -12 \quad \Rightarrow \quad K = 10^{-\frac{12}{20}} \approx 0,25 \text{ rad/s}$$

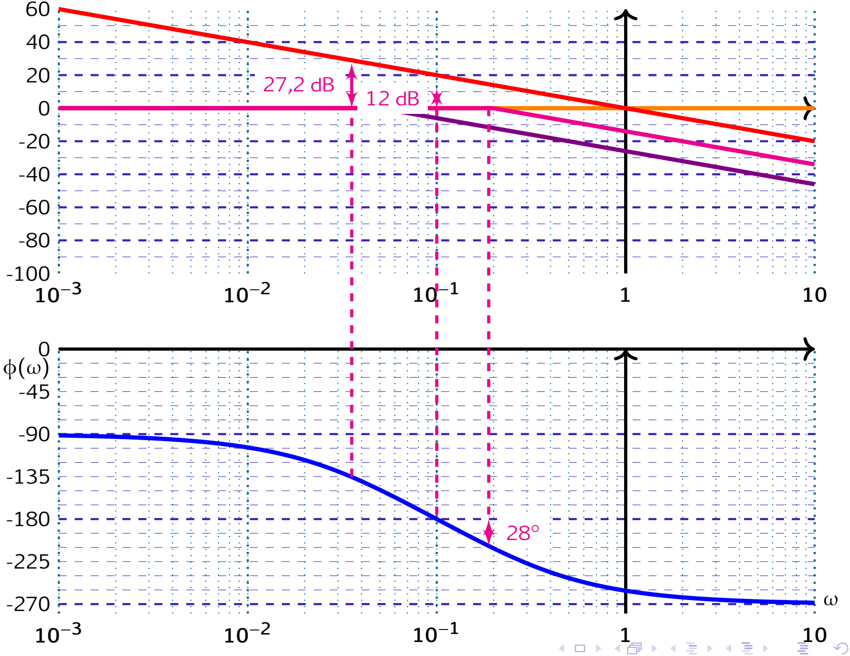

60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

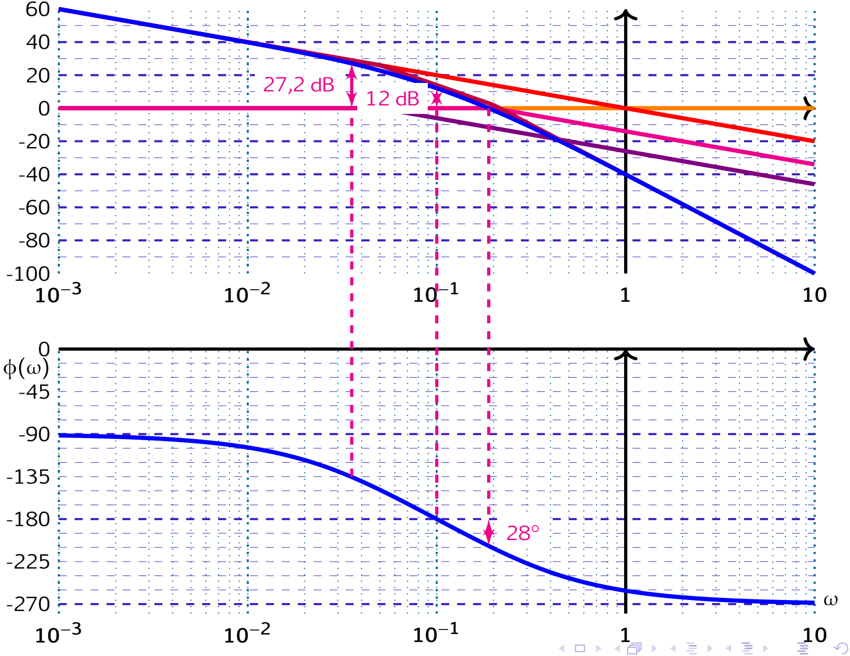


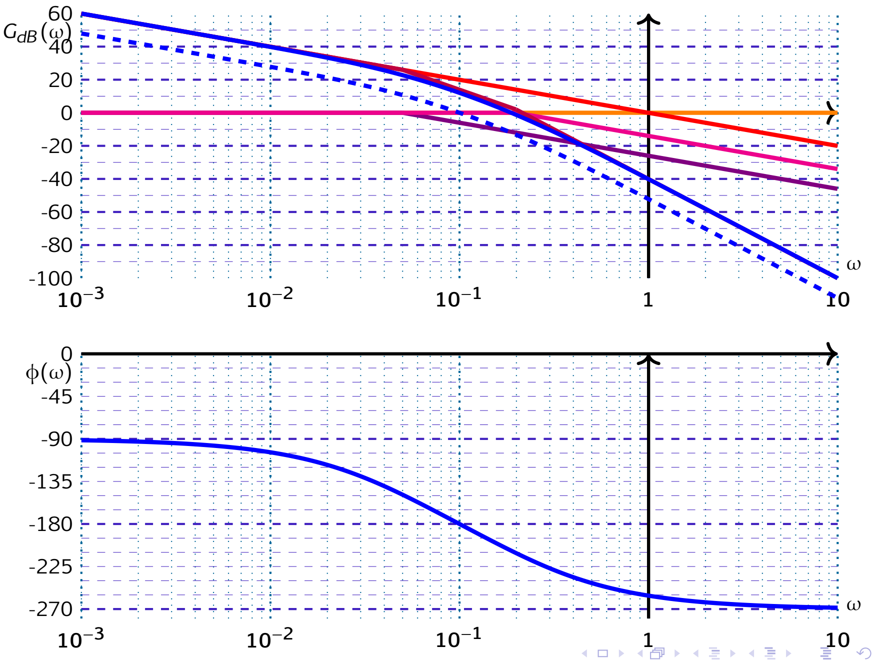
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

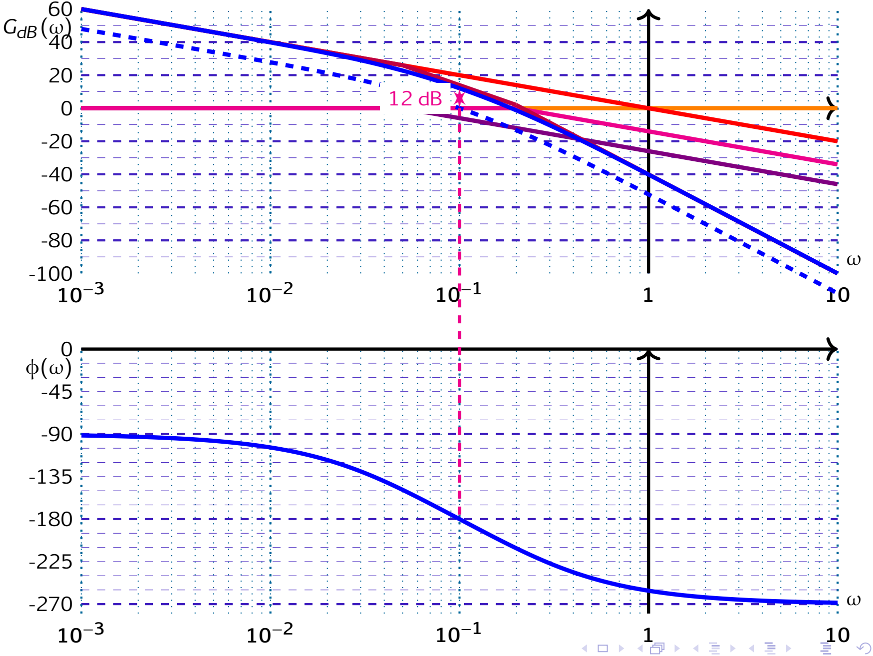

60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10


60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

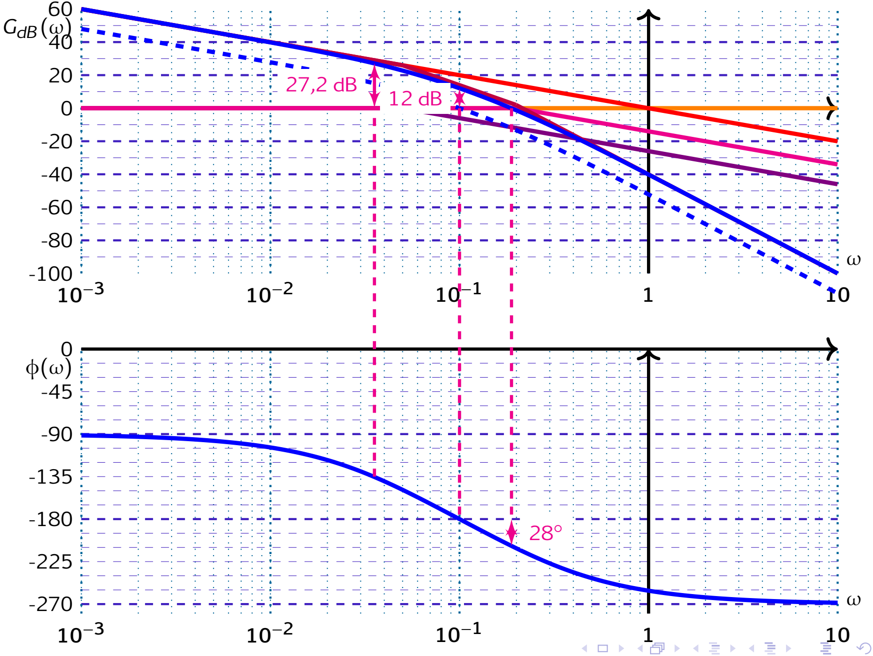

60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10


60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω


$G_{dB}(\omega)$
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
$\phi(\omega)$
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10



60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
12 dB
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10



60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
12 dB
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
28°
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

Q - 9 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Q - 10 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180.

Q - 11 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$-180 \quad = \quad \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right)$$

Q - 12 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned}
-180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right) \\
&= \cancel{\arg(K)} - \arg\left(j.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \\
&= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right)
\end{aligned}$$

Q - 13 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned}
-180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right) \\
&= \cancel{\arg(K)} - \arg(j.\omega_{180}) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \\
&= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) + \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$$

Q - 14 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned} -180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right) \\ &= \cancel{\arg(K)} - \arg(j.\omega_{180}) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \\ &= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) + \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant le fait que si $X > 0$, $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\tau_{pre}.\omega_{180} = \frac{1}{\tau_{ac}.\omega_{180}}$$

Q - 15 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned} -180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right) \\ &= \cancel{\arg(K)} - \arg(j.\omega_{180}) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \\ &= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) + \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant le fait que si $X > 0$, $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\tau_{pre}.\omega_{180} = \frac{1}{\tau_{ac}.\omega_{180}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{180} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{pre}.\tau_{ac}}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 20}}$$

Q - 16 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned}
-180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right) \\
&= \cancel{\arg(K)} - \arg\left(j.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right) \\
&= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) + \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant le fait que si $X > 0$, $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\tau_{pre}.\omega_{180} = \frac{1}{\tau_{ac}.\omega_{180}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{180} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{pre}.\tau_{ac}}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 20}} = \frac{1}{10}$$

Q - 17 : *Déterminer par le calcul un gain K pour que le système soit en limite de stabilité.*

Pour avoir le système en limite de stabilité, il faut que le gain soit nul à la pulsation pour laquelle la phase vaut -180. Or:

$$\begin{aligned}-180 &= \varphi(\omega_{180}) = \arg\left(H_{BO}(j.\omega_{180})\right)\\ &= \cancel{\arg(K)} - \arg(j.\omega_{180}) - \arg\left(1 + j.\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arg\left(1 + j.\tau_{ac}.\omega_{180}\right)\\ &= -90 - \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) - \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan\left(\tau_{pre}.\omega_{180}\right) + \arctan\left(\tau_{ac}.\omega_{180}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant le fait que si $X > 0$, $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\tau_{pre}.\omega_{180} = \frac{1}{\tau_{ac}.\omega_{180}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{180} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{pre}.\tau_{ac}}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 20}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ rad/s}$$

Reste à obtenir un gain nul pour $\omega = \omega_{180}$. Or un gain nul correspond à un module unitaire :

$$|H(j.\omega_{180})| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}$$

Reste à obtenir un gain nul pour $\omega = \omega_{180}$. Or un gain nul correspond à un module unitaire :

$$|H(j.\omega_{180})| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad K = \omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}$$

Reste à obtenir un gain nul pour $\omega = \omega_{180}$. Or un gain nul correspond à un module unitaire :

$$|H(j.\omega_{180})| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}$$

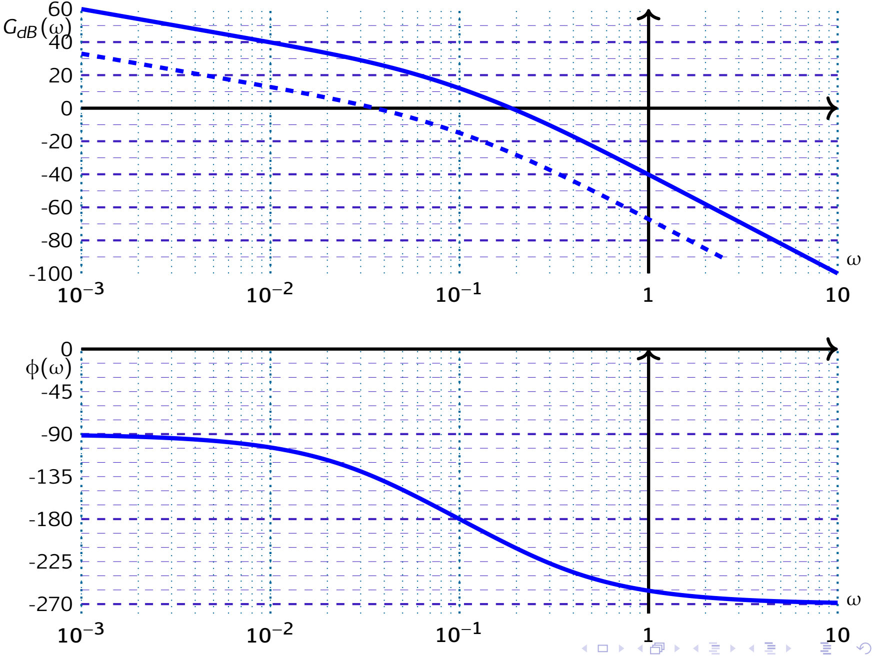
$$\Rightarrow \quad K = \omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}$$

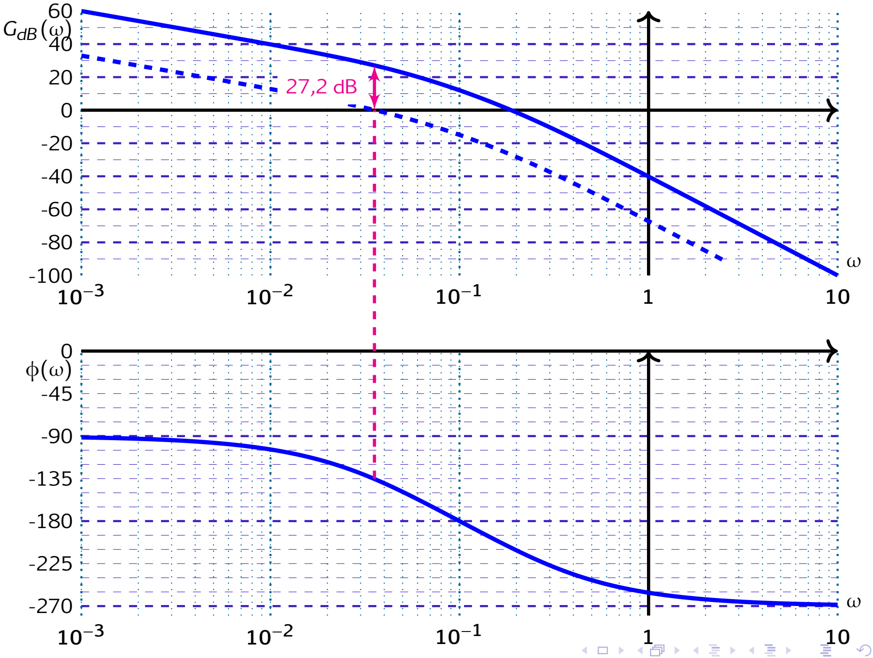
ainsi $K = 0{,}1.\sqrt{(1+(5\times 0{,}1)^2).(1+(20\times 0{,}1)^2)} = 0{,}1.\sqrt{1{,}25\times 5} = 0{,}25$ rad/s

Q - 18 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que la marge de phase soit $M_\varphi = 45°$.*

Q - 19 : *Déterminer graphiquement un gain K pour que la marge de phase soit* $M_{\varphi} = 45°$.

Par lecture graphique, on peut lire qu'il faut abaisser la courbe de 27,2 dB. Ainsi, $K = 10^{-\dfrac{27,2}{20}} \approx 4,5.10^{-2}$ rad/s.


60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10


60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
27,2 dB
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

D'après la question 3, $\varphi(\omega_{180}) = -180°$ avec $\omega_{180} = 0{,}1$ rad/s.

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

D'après la question 3, $\varphi(\omega_{180}) = -180°$ avec $\omega_{180} = 0{,}1$ rad/s. Reste à déterminer K pour que $G_{dB}(\omega_{180}) = -8$ dB.

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

D'après la question 3, $\varphi(\omega_{180}) = -180°$ avec $\omega_{180} = 0{,}1$ rad/s. Reste à déterminer K pour que $G_{dB}(\omega_{180}) = -8$ dB.

$$-8 = 20.\log\left(\frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}\right)$$

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

D'après la question 3, $\varphi(\omega_{180}) = -180°$ avec $\omega_{180} = 0{,}1$ rad/s. Reste à déterminer K pour que $G_{dB}(\omega_{180}) = -8$ dB.

$$-8 = 20.\log\left(\frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}\right)$$

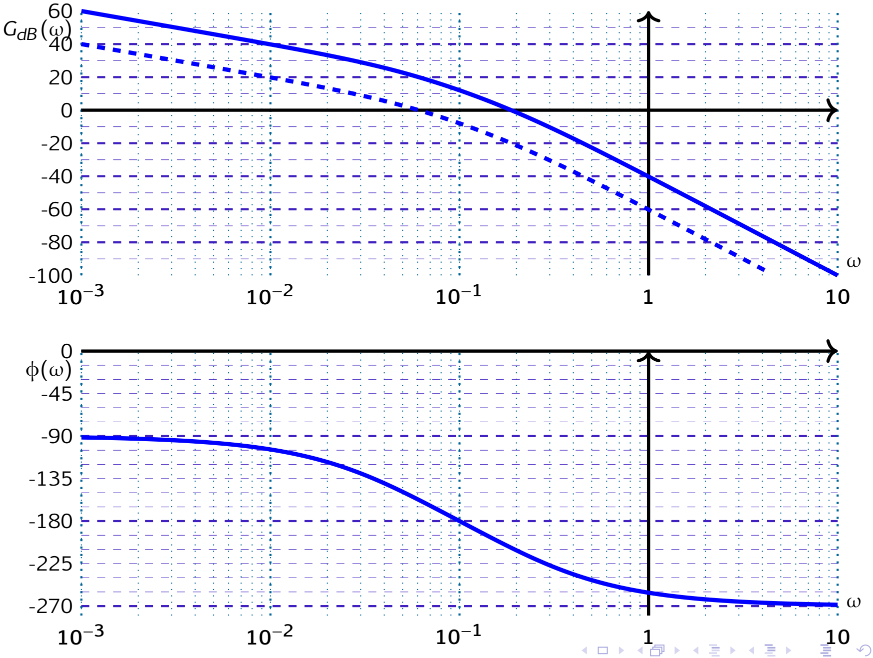
$$\Rightarrow \quad K \quad = \quad 10^{-\frac{8}{20}}.\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}$$

Q - 5 : *Déterminer par le calcul un nouveau gain K pour que la marge de gain soit $M_G = 8$ dB.*

D'après la question 3, $\varphi(\omega_{180}) = -180°$ avec $\omega_{180} = 0{,}1$ rad/s. Reste à déterminer K pour que $G_{dB}(\omega_{180}) = -8$ dB.

$$-8 = 20.\log\left(\frac{K}{\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)}}\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad K &= 10^{-\frac{8}{20}}.\omega_{180}.\sqrt{(1+(\tau_{pre}.\omega_{180})^2).(1+(\tau_{ar}.\omega_{180})^2)} \\ &= 10^{-0{,}4}.0{,}25 \approx 0{,}1 \text{ rad/s}\end{aligned}$$



60
$G_{dB}(\omega)$
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
0
$\phi(\omega)$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
ω
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10

On considère respectées les conditions de stabilité.

On considère respectées les conditions de stabilité.

Q - 6 : *Déterminer l'erreur en position pour une entrée en échelon* $x_c(t) = X_0$.

On considère respectées les conditions de stabilité.

Q - 6 : *Déterminer l'erreur en position pour une entrée en échelon* $x_c(t) = X_0$.

La fonction de transfert en boucle ouverte est un de classe 1. L'erreur en position est nulle quelque soit l'amplitude de l'échelon.

Q - 7 : *Déterminer l'erreur en traînage pour une entrée en rampe* $x_c(t) = V_0.t$.

Q - 7 : *Déterminer l'erreur en traînage pour une entrée en rampe* $x_c(t) = V_0.t$*.*

La fonction de transfert en boucle ouverte est un de classe 1. L'erreur de trainage pour une entrée en rampe de coefficient V_0 vaut $E_{rrt} = \dfrac{V_0}{K_{BO}} = \dfrac{V_0}{K}$.