CI-2 :
Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-2
Modéliser les signaux et les fonctions de transfert.
Passer du domaine temporel au domaine symbolique de Laplace et inversement.

Lycée Carnot - Dijon, 2024 - 2025

Germain Gondor

Sommaire

Objectifs

MODELISER RESOUDRE

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable :

- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
    - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
    - Modéliser le signal d'entrée.
    - Simplifier un modèle.

Sommaire

Domaine symbolique de Laplace

En SI., la transformée de Laplace sera utilisée de manière privilégiée afin de traiter les équations différentielles à coefficients constants. Elle permet de changer de domaine de travail.

Domaine symbolique de Laplace

En SI., la transformée de Laplace sera utilisée de manière privilégiée afin de traiter les équations différentielles à coefficients constants. Elle permet de changer de domaine de travail.

Équation du mouvement

$m.\ddot{X} + \lambda.\dot{X} + k.X = F$

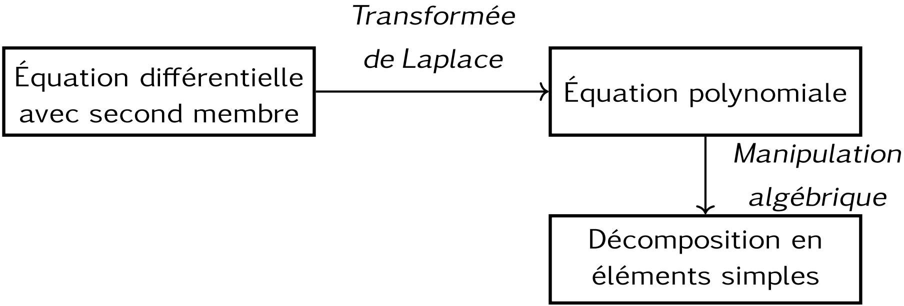
Utilisation des transformées de Laplace

Équation différentielle
avec second membre

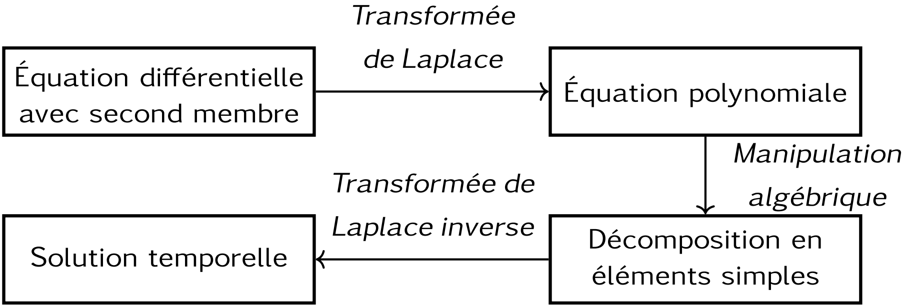
Utilisation des transformées de Laplace

$$\boxed{\text{Équation différentielle avec second membre}} \xrightarrow{\textit{Transformée de Laplace}} \boxed{\text{Équation polynomiale}}$$

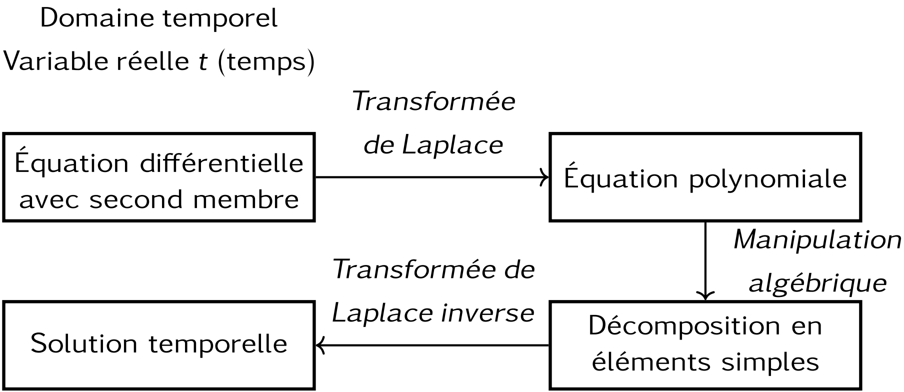
Utilisation des transformées de Laplace



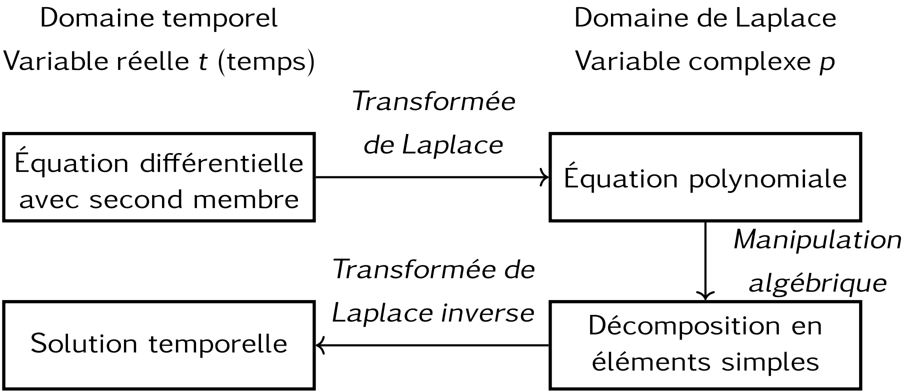
Utilisation des transformées de Laplace



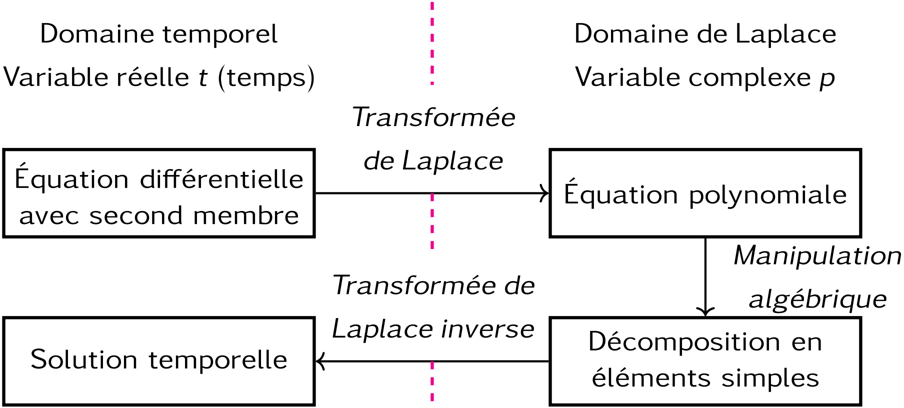
Utilisation des transformées de Laplace



Utilisation des transformées de Laplace



Utilisation des transformées de Laplace



La transformée de Laplace permet de :

- transformer une équation différentielle linéaire en une équation algébrique plus facilement exploitable.

La transformée de Laplace permet de :

- transformer une équation différentielle linéaire en une équation algébrique plus facilement exploitable.
- revenir dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse (cas simple)

La transformée de Laplace permet de :

- transformer une équation différentielle linéaire en une équation algébrique plus facilement exploitable.
- revenir dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse (cas simple)
- donner les caractéristiques principales du système en terme de performances sans calculer la réponse temporelle (cas + complexes)

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$
- où p représente une variable complexe

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$
- où p représente une variable complexe

Sous réserve d'existence, la transformée (unilatérale) de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est définie par la relation :

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$
- où p représente une variable complexe

Sous réserve d'existence, la transformée (unilatérale) de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est définie par la relation :

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t)dt}$$

Définition

Soit f une fonction du temps : $f = f(t)$

- définie et continue (par morceaux) pour tout $t \geq 0$
- nulle pour tout $t < 0$
- où p représente une variable complexe

Sous réserve d'existence, la transformée (unilatérale) de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est définie par la relation :

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t)dt}$$

p étant une variable complexe.

Remarques :

1. $\boxed{\int_0^{+\infty} (\ldots) dt}$ signifie $\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_0^{n} (\ldots) dt}$. C'est une intégrale impropre
2. F(p) existe si l'intégrale a un sens et converge. Dans les cas rencontrés en SI, les conditions d'existences et de convergence sont réunies.
3. La variable p peut aussi être notée avec la lettre s
4. La transformée de Laplace inverse sera notée : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]$

Conditions d'Heaviside

Les conditions d'Heaviside imposent à une fonction f et ses dérivées, d'être nulles en 0 : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

Sommaire

Propriétés et théorèmes

Unicité

La transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ est unique.

Propriétés et théorèmes

Unicité

La transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ est unique.

Linéarité

Soient f et g deux fonctions du temps ayant les "bonnes" propriétés par rapport à la transformée de Laplace :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.\mathcal{L}[f(t)] + \beta.\mathcal{L}[g(t)]$$

Dérivation

Ce théorème très important pour le traitement, par la transformée de Laplace, des systèmes linéaires continus permet la linéarisation des équations différentielles. La transformée de Laplace de la dérivée de f vaut :

Dérivation

Ce théorème très important pour le traitement, par la transformée de Laplace, des systèmes linéaires continus permet la linéarisation des équations différentielles. La transformée de Laplace de la dérivée de f vaut :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = p.F(p) - f(0)} \qquad \text{avec } f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

Dérivation

Ce théorème très important pour le traitement, par la transformée de Laplace, des systèmes linéaires continus permet la linéarisation des équations différentielles. La transformée de Laplace de la dérivée de f vaut :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = p.F(p) - f(0)} \qquad \text{avec } f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

et : $$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1-i)}.f^{(i)}(0)}$$

Dérivation

Si toutes les conditions initiales sont nulles : $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, l'expression précédente se réduit à :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p)$$

Dérivation

Si toutes les conditions initiales sont nulles : $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, l'expression précédente se réduit à :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p)$$

Une équation différentielle à coefficients constants devient donc :

$$\begin{aligned} a_n.\frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \ldots + a_1.\frac{ds(t)}{dt} + a_0.s(t) &= b_m.\frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \ldots + b_1.\frac{de(t)}{dt} + b_0.e(t) \\ \mathcal{L}\left[\ldots = \ldots\right] \Rightarrow (a_n.p^n + \ldots + a_1.p + a_0).S(p) &= (b_m.p^m + \ldots + b_1.p + b_0).E(p) \end{aligned}$$

Dérivation

Si toutes les conditions initiales sont nulles : $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$, l'expression précédente se réduit à :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n.F(p)$$

Une équation différentielle à coefficients constants devient donc :

$$\begin{aligned}
a_n.\frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \ldots + a_1.\frac{ds(t)}{dt} + a_0.s(t) &= b_m.\frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \ldots + b_1.\frac{de(t)}{dt} + b_0.e(t) \\
\mathcal{L}\left[\ldots = \ldots\right] \Rightarrow (a_n.p^n + \ldots + a_1.p + a_0).S(p) &= (b_m.p^m + \ldots + b_1.p + b_0).E(p) \\
\frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{b_m.p^m + \ldots + b_1.p + b_0}{a_n.p^n + \ldots + a_1.p + a_0}
\end{aligned}$$

Intégration

Uniquement pour une intégration de 0 à t :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p) - g(0)}{p}}$$ où g est une primitive de f

Remarque : Si les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside) :

- Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique
- Intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Pour obtenir des informations sur la fonction originale $f(t)$ (au voisinage de $t = 0$ et $t = \infty$) sans calculer la transformée de Laplace inverse de F(p), il est possible d'utiliser les théorème de la valeur initiale et de la valeur finale (Théorèmes valables dans la mesure où la limite existe...) :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty} p.F(p)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)}$$

Démonstration :

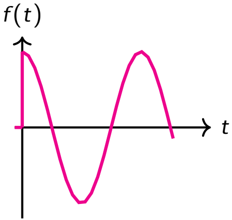
$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)dt = p.F(p) - f(0)$$

$$\underbrace{\lim_{p\mapsto\infty} \int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)dt}_{\mapsto 0} = \lim_{p\mapsto\infty}\left[p.F(p) - \underbrace{f(0)}_{\lim\limits_{t\mapsto 0} f(t)}\right]$$

$$\text{d'ou} \quad \lim_{t\mapsto 0} f(t) = \lim_{p\mapsto+\infty} p.F(p)$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)dt & = & p.F(p) - f(0) \\
\displaystyle\lim_{p\mapsto 0}\int_0^\infty e^{-p.t}.f'(t)dt & = & \displaystyle\lim_{p\mapsto 0}\left[p.F(p) - f(0)\right] \\
\displaystyle\int_0^\infty f'(t)dt = \left[f(t)\right]_0^\infty & = & \displaystyle\lim_{p\mapsto 0} p.F(p) - f(0) \\
\displaystyle\lim_{t\mapsto\infty} f(t) - f(0) & = & \displaystyle\lim_{p\mapsto 0} p.F(p) - f(0) \\
\text{d'ou} \quad \displaystyle\lim_{t\mapsto\infty} f(t) & = & \displaystyle\lim_{p\mapsto 0} p.F(p)
\end{array}
$$

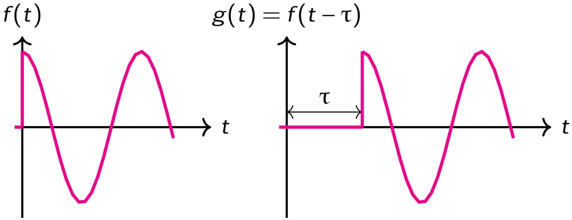
Retard



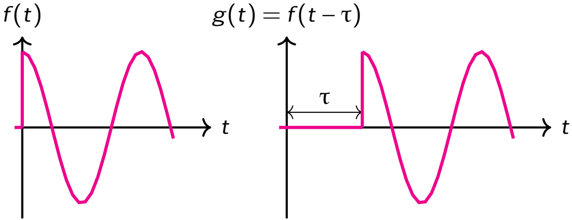
Dans le cas d'un retard τ :

$$\boxed{\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau.p}.F(p)}$$

Retard



Retard



Dans le cas d'un retard τ :

$$\boxed{\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau.p}.F(p)}$$

Amortissement

Dans le cas d'une fonction f amortie par une fonction exponentielle décroissante $e^{-a.t}$, alors :

Amortissement

Dans le cas d'une fonction f amortie par une fonction exponentielle décroissante $e^{-a.t}$, alors :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathcal{L}\left[f(t).e^{-a.t}\right] = F(p+a)}$$

Amortissement

Dans le cas d'une fonction f amortie par une fonction exponentielle décroissante $e^{-a.t}$, alors :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathcal{L}\Big[f(t).e^{-a.t}\Big] = F(p+a)}$$

Démonstration : $\mathcal{L}\left[f(t).e^{-a.t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-p.t}.f(t).e^{-a.t}\,dt = F(p+a)$

Sommaire

Signaux d'entrée types

Pour évaluer les performances d'un système, des signaux tests sont appliquées en entrée $e(t)$, de façon théorique ou expérimentale.

Signal Impulsion (dirac)

L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Signal Impulsion (dirac)

L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Signal Impulsion (dirac)

L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Exemple : Fonction créneaux de durée infinitésimale

Signal Impulsion (dirac)

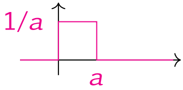
L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Exemple : Fonction créneaux de durée infinitésimale

Soit $f(t)$ une fonction créneau :

- pour tout $t < 0$ et $t > a$: $f_a(t) = 0$
- pour $0 \leq t \leq a$: $f_a(t) = \frac{1}{a}$



Signal Impulsion (dirac)

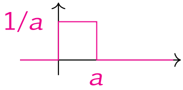
L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Exemple : Fonction créneaux de durée infinitésimale

Soit $f(t)$ une fonction créneau :

- pour tout $t < 0$ et $t > a$: $f_a(t) = 0$
- pour $0 \leq t \leq a$: $f_a(t) = \frac{1}{a}$



L'impulsion Dirac peut être imagée par un créneau de surface unité pour lequel on fait tendre a vers zéro.

Signal Impulsion (dirac)

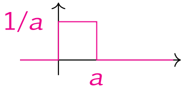
L'impulsion de Dirac est représentative de signaux d'entrée de type choc, perturbation brutale et passagère.

Afin de représenter un tel signal de façon théorique, plusieurs descriptions peuvent être envisagées.

Exemple : Fonction créneaux de durée infinitésimale

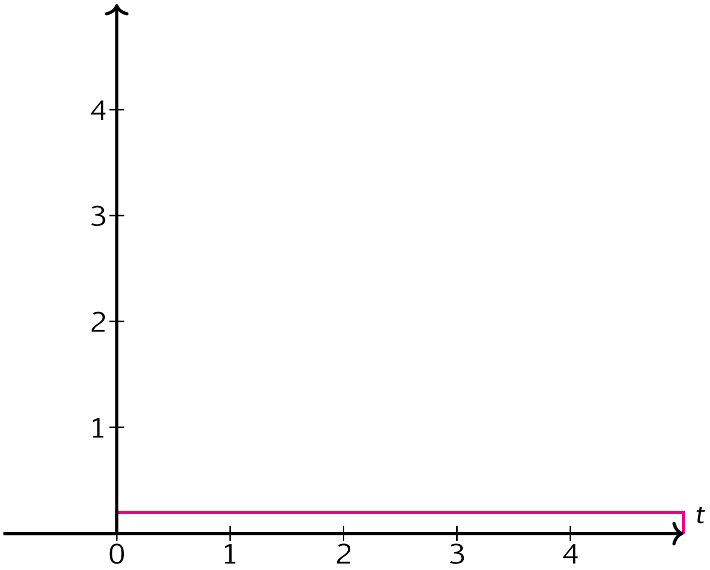
Soit $f(t)$ une fonction créneau :

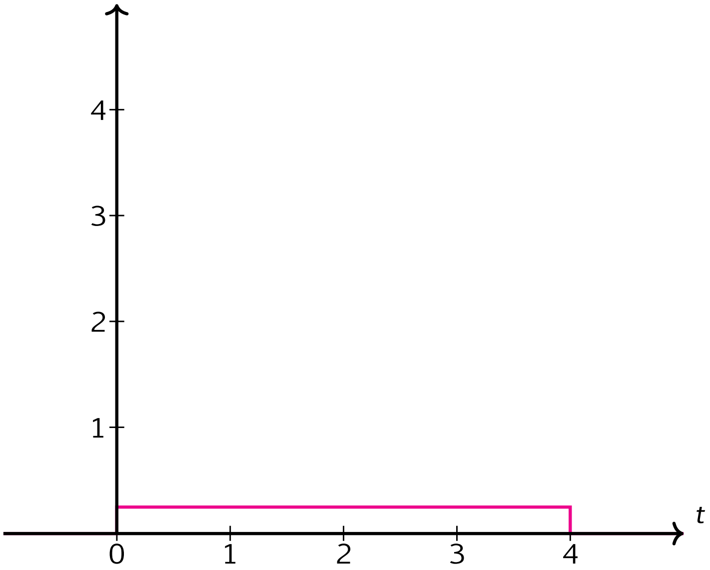
- pour tout $t < 0$ et $t > a$: $f_a(t) = 0$
- pour $0 \leq t \leq a$: $f_a(t) = \frac{1}{a}$

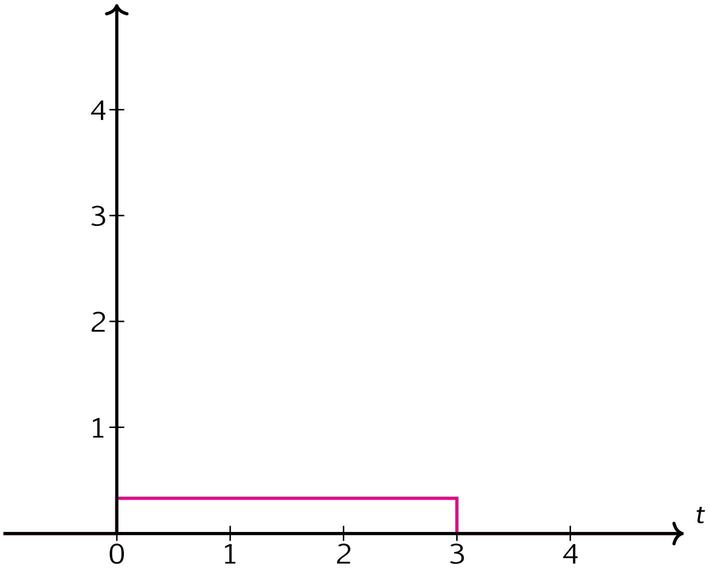


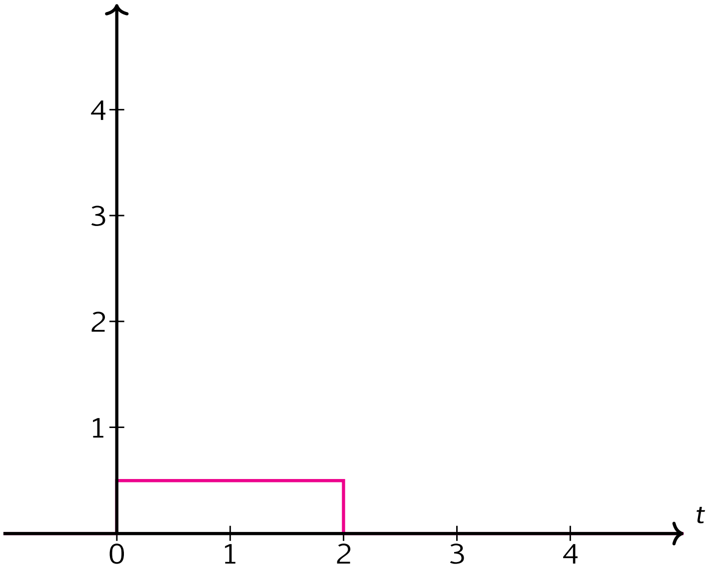
L'impulsion Dirac peut être imagée par un créneau de surface unité pour lequel on fait tendre a vers zéro.

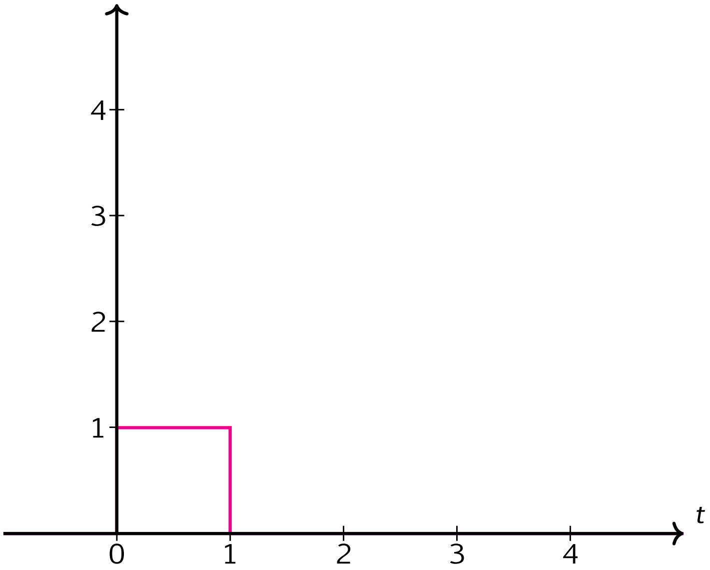
$$\boxed{\delta(t) = \lim_{a \to 0} f_a(t)}$$

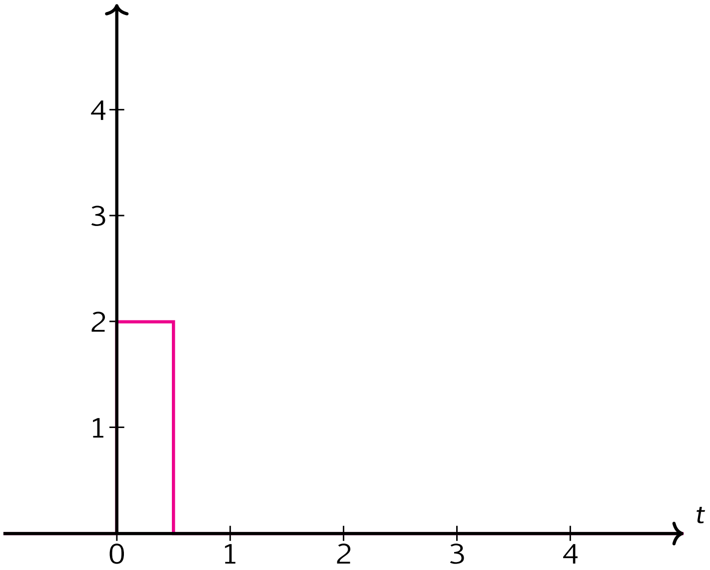

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

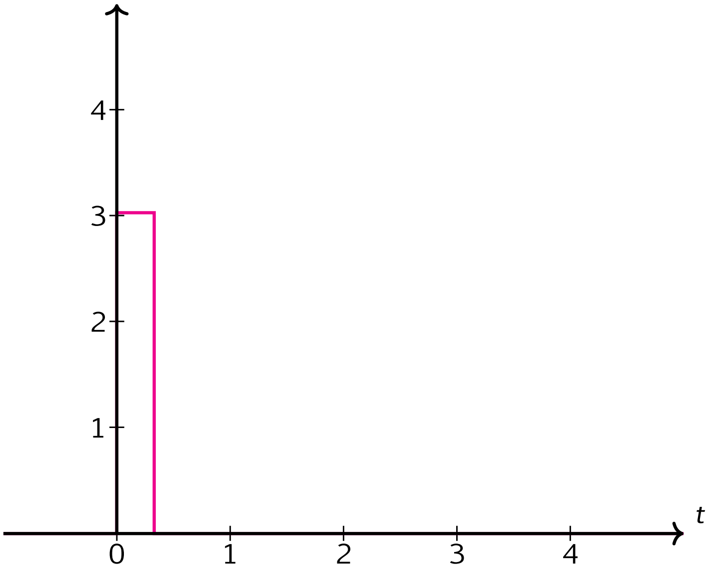

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

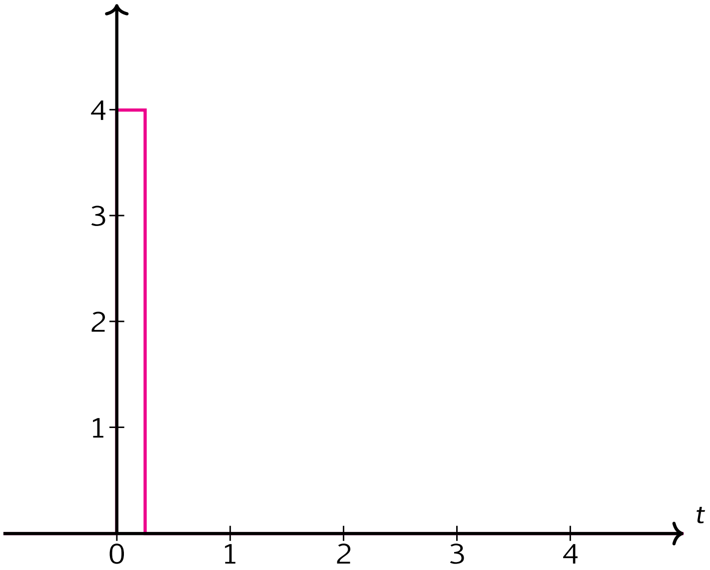

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

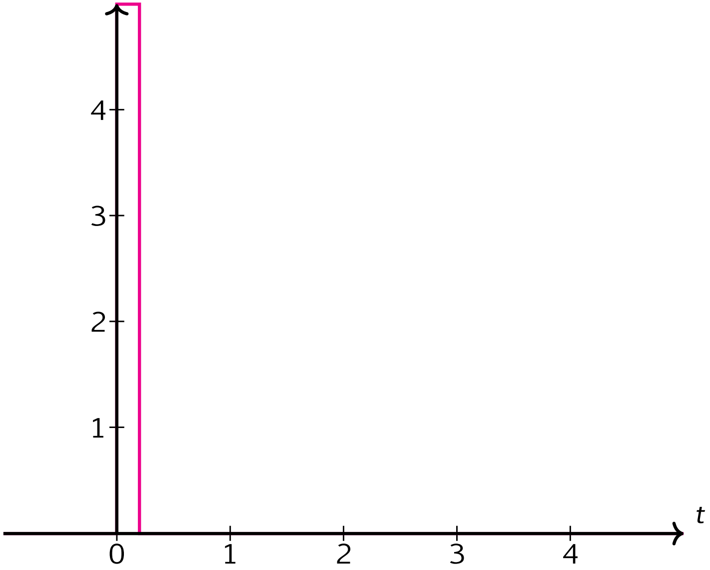

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

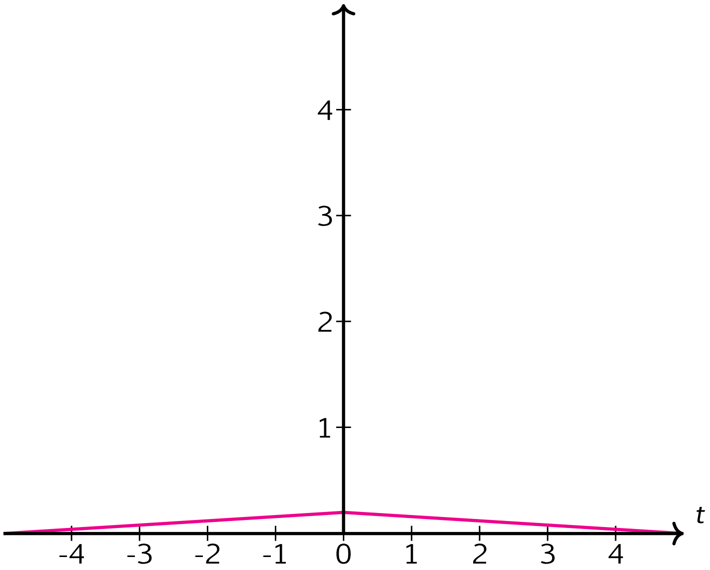

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

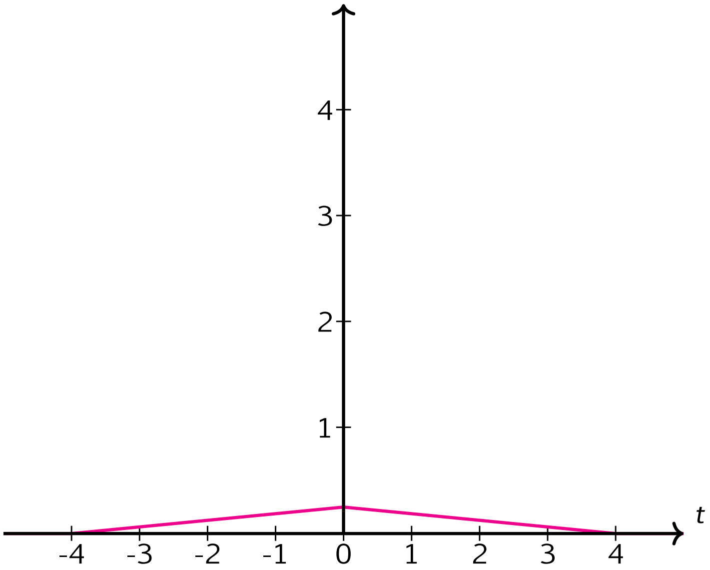

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

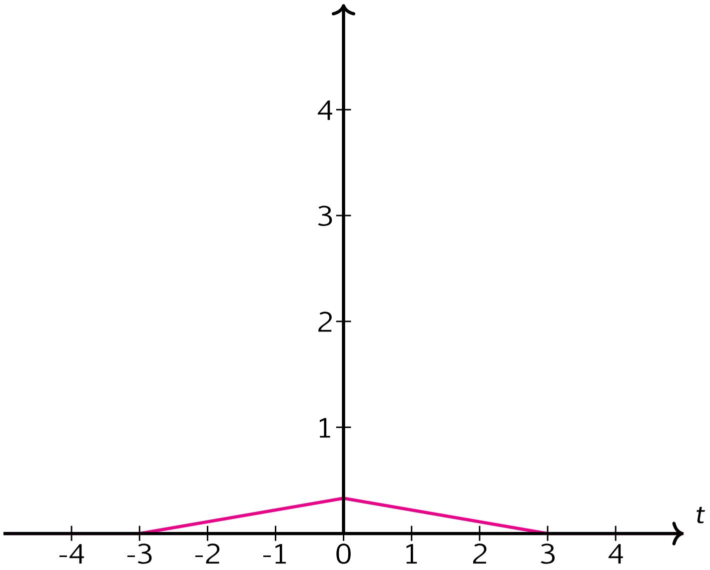

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

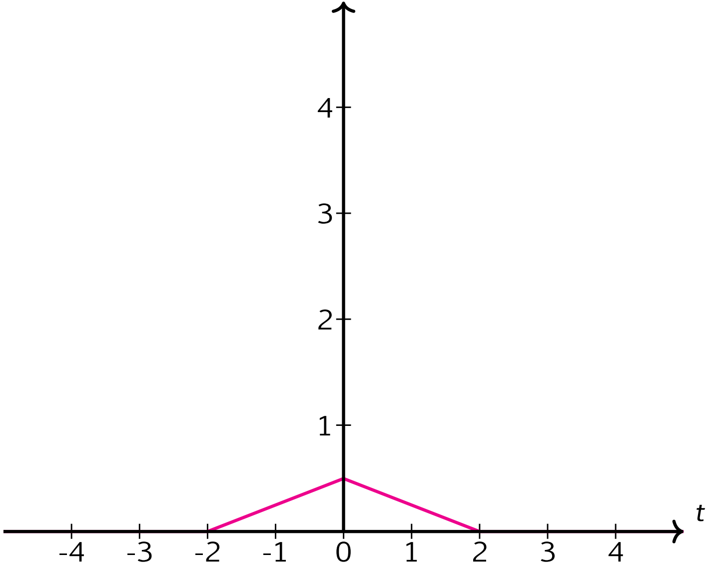

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

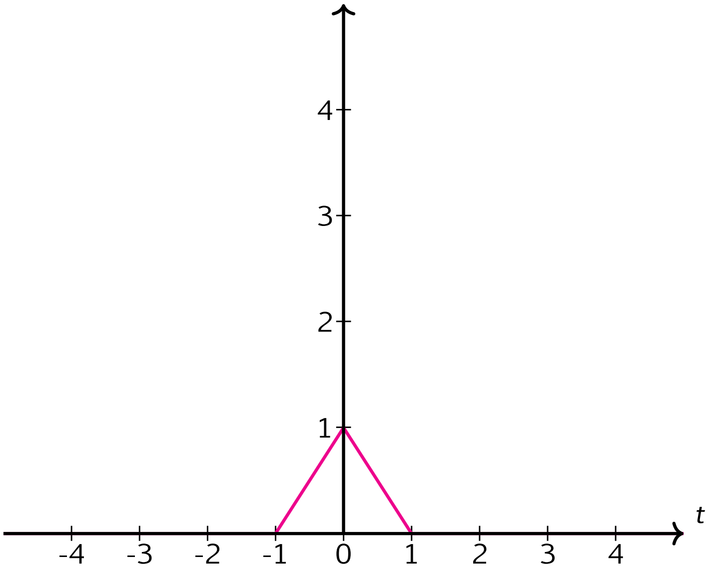

4
3
2
1
0
1
2
3
4
t

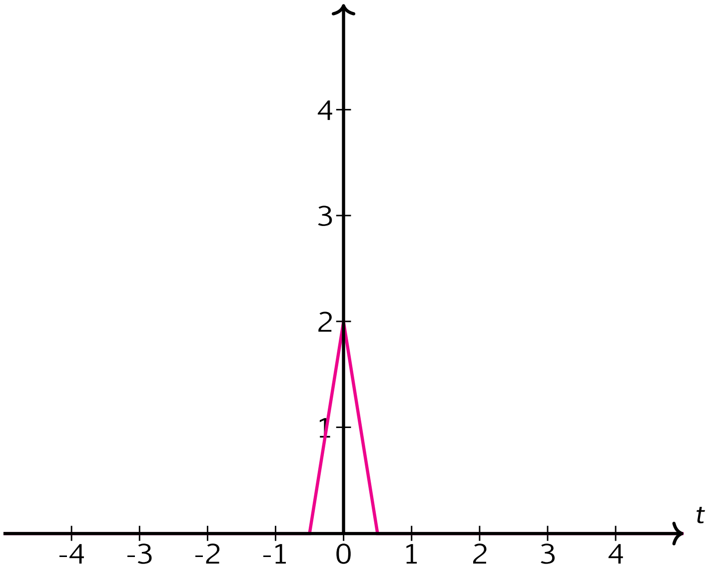

4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t


4
3
2
1
t
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

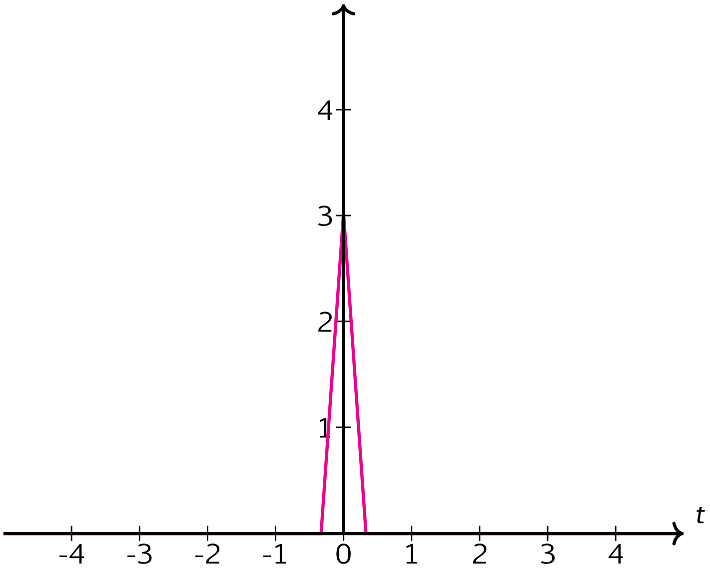

4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t

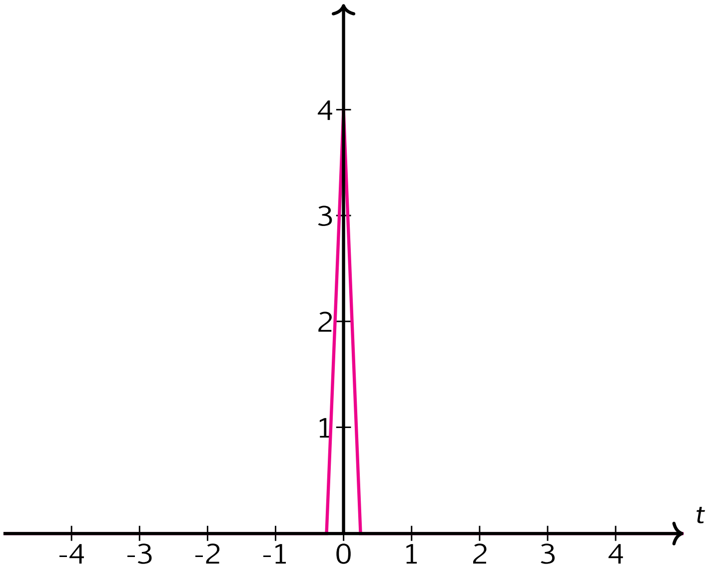

4
3
2
1
t
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

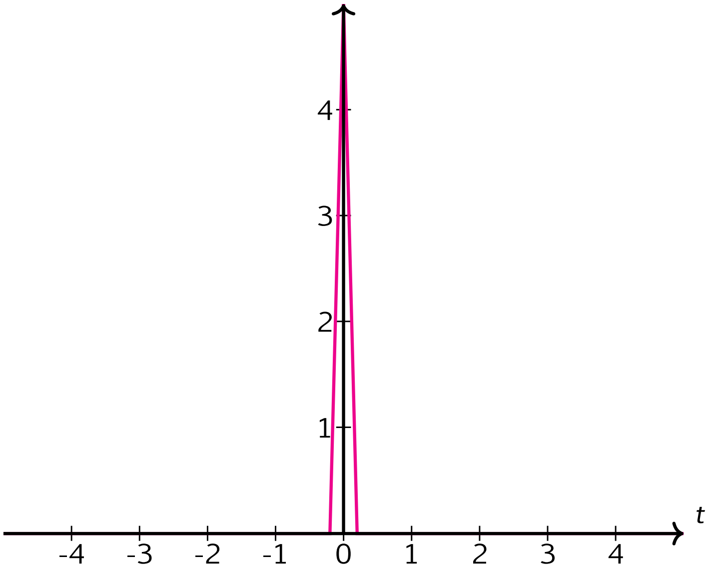

4
3
2
1
t
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4



4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t


4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t


4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
t


4
3
2
1
t
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Propriétés :

- Mathématiquement parlant, le Dirac $\delta(t)$ est une distribution particulière (voir plus tard en Math). En résumé et pour faire simple : c'est une fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$ sauf en zéro et dont la valeur en zéro vérifie :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt = f(0)}$$

Propriétés :

- Mathématiquement parlant, le Dirac $\delta(t)$ est une distribution particulière (voir plus tard en Math). En résumé et pour faire simple : c'est une fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$ sauf en zéro et dont la valeur en zéro vérifie :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt = f(0)}$$

- La transformée de Laplace de cette fonction est donc :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-p.t}.\delta(t)dt = e^{-p.0} = 1 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1}$$

Propriétés :

- Mathématiquement parlant, le Dirac $\delta(t)$ est une distribution particulière (voir plus tard en Math). En résumé et pour faire simple : c'est une fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$ sauf en zéro et dont la valeur en zéro vérifie :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt = f(0)}$$

- La transformée de Laplace de cette fonction est donc :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-p.t}.\delta(t)dt = e^{-p.0} = 1 \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1}$$

- La réponse temporelle d'un système à un Dirac est appelée réponse impulsionnelle.

Signal échelon

Un échelon unitaire $u(t)$ est définie de la manière suivante :

- pour $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$
- pour $t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

Signal échelon

Un échelon unitaire $u(t)$ est définie de la manière suivante :

- pour $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$
- pour $t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

Sa transformée de Laplace vaut : $\boxed{\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \dfrac{1}{p}}$

La réponse temporelle d'un système soumis à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle.

Signal échelon

Un échelon unitaire $u(t)$ est définie de la manière suivante :

- pour $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$
- pour $t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$

Sa transformée de Laplace vaut : $\boxed{\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \dfrac{1}{p}}$

La réponse temporelle d'un système soumis à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle.

Remarque : L'échelon est le signal le plus facilement réalisable expérimentalement.

Signal Rampe

Une rampe est définie par : $r(t) = k.t.u(t)$

Signal Rampe

Une rampe est définie par : $r(t) = k.t.u(t)$

Sa transformée de Laplace vaut : $\boxed{\mathcal{L}\left[r(t)\right] = \dfrac{k}{p^2}}$

Signal Rampe

Une rampe est définie par : $r(t) = k.t.u(t)$

Sa transformée de Laplace vaut : $\boxed{\mathcal{L}\left[r(t)\right] = \dfrac{k}{p^2}}$

La réponse temporelle d'un système soumis à une rampe unitaire est appelée réponse en suivi (ou en poursuite).

Signal sinusoïdale ($\sin(\omega t)$)

Soit $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$.

Signal sinusoïdale ($\sin(\omega t)$)

Soit $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.t)e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\cos(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\left[\sin(\omega.t).e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p^2}{\omega^2}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}.\mathcal{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

Signal sinusoïdale ($\sin(\omega t)$)

Soit $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.t)e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\cos(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\left[\sin(\omega.t).e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p^2}{\omega^2}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}.\mathcal{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

Signal sinusoïdale ($\sin(\omega t)$)

Soit $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.t)e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\cos(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\left[\sin(\omega.t).e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p^2}{\omega^2}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}.\mathcal{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$$

La réponse temporelle d'un système à une fonction sinusoïdale est appelée réponse harmonique.

Signal sinusoïdale ($\sin(\omega t)$)

Soit $f(t) = \sin(\omega t).u(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.t)e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\cos(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\left[\sin(\omega.t).e^{-p.t}\right]_0^{+\infty} - \frac{p^2}{\omega^2}.\int_0^{+\infty} e^{-p.t}.\sin(\omega.t)dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}.\mathcal{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

La réponse temporelle d'un système à une fonction sinusoïdale est appelée réponse harmonique.

Remarque : Utilisé expérimentalement pour effectuer une analyse fréquentielle d'un système

Signaux causaux

DÉFINITION : Signal causal

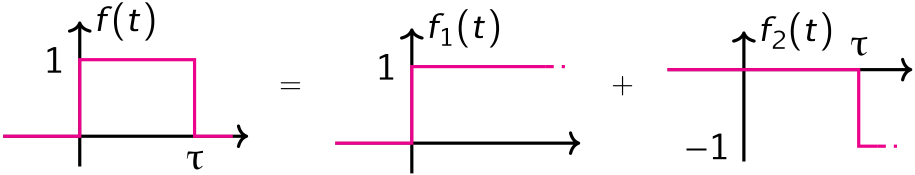
un signal $c(t)$ est dit causal si pour $t < 0$ alors $c(t) = 0$

La plupart des systèmes mécaniques ne produisent un effet qu'à partir de l'apparition d'une cause. Ces systèmes sont donc des systèmes causaux.

Décomposition d'un signal

Pour avoir des signaux causaux (nul pour $t < 0$) et pour éviter d'utiliser une définition des fonctions par intervalle, on définit les signaux avec une combinaison d'échelons unitaires, éventuellement retardés.

EXEMPLE :



Le signal f peut être défini :

- soit par intervalle :

$$\begin{cases} t < 0 & \rightarrow & f(t) = 0 \\ t \leq 0 < \tau & \rightarrow & f(t) = 1 \\ t \geq \tau & \rightarrow & f(t) = 0 \end{cases}$$

- soit en le décomposant à l'aide de deux échelons :
  - Le signal f_1 est un échelon unitaire classique : $f_1(t) = u(t)$
  - Le signal f_2 est un échelon unitaire négatif, retardé de τ : $f_2(t) = -u(t-\tau)$
  - On en déduit donc que $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = u(t) - u(t-\tau)$

Par linéarité, on peut calculer la transformée de Laplace de f : $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = \dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-\tau.p}}{p}$

Sommaire

Transformée de Laplace inverse

Cette opération consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une expression F(p) donnée.
La formule mathématique permettant de passer du domaine symbolique de Laplace au domaine temporelle est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]=\frac{1}{2.\pi.i}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{p.t}.F(p)dp}$$

Cette formule n'étant guère enthousiasmante, on lui préfère très souvent la décomposition en éléments simples.

Décomposition en éléments simples

Cette opération consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une expression F(p) donnée. Pour cela, il faut décomposer la fonction $F(p)$ en éléments simples (éléments pour lesquels on connaît les transformées de Laplace inverses).

Décomposition en éléments simples

Cette opération consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une expression F(p) donnée. Pour cela, il faut décomposer la fonction $F(p)$ en éléments simples (éléments pour lesquels on connaît les transformées de Laplace inverses).

Il faut donc identifier les pôles de $F(p)$, puis déterminer les différentes constantes relatives à chaque élément simple :

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=A_0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{ij}}{(p-\alpha_i)^j}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{q_k}\frac{B_{kl}.p+C_{kl}}{\left[(p+\beta_k)^2+\omega_k^2\right]^l}$$

n :	nb pôles réels	m_i, q_k :	multiplicité des pôles
r :	nb de dipôles conjugués $(z,\bar{z})$		

Le calcul des coefficients A_0, A_{ij}, B_{kl} et C_{kl} se fait :

- soit par identification en recomposant la fraction
- soit en prenant des valeurs particulières (moyennant une multiplication afin de faire disparaître les pôles)

Exemple : Décomposition en éléments simples sans pôles complexes :

$$F(p) = \frac{9}{(p+1)(p-2)^2} = \frac{\alpha}{p+1} + \frac{\beta}{p-2} + \frac{\gamma}{(p-2)^2}$$

- Pour α : multiplication par $(p+1)$ et évaluation de l'expression pour $p = -1$

$$\begin{aligned}
(p+1).F(p) &= \frac{9}{(p-2)^2} = \alpha + \beta.\frac{p+1}{p-2} + \gamma.\frac{p+1}{(p-2)^2} \\
p = -1 &\Rightarrow \frac{9}{(-1-2)^2} = \alpha \\
&\Rightarrow \alpha = 1
\end{aligned}$$

- Pour γ : multiplication par $(p-2)^2$ et évaluation de l'expression pour $p=2$

$$\begin{aligned}
(p-2)^2.F(p) &= \frac{9}{p+1} = \alpha.\frac{(p-2)^2}{p+1} + \beta.(p-2) + \gamma \\
p=2 &\Rightarrow \frac{9}{2+1} = \gamma \\
&\Rightarrow \gamma = 3
\end{aligned}$$

- Pour γ : multiplication par $(p-2)^2$ et évaluation de l'expression pour $p=2$

$$\begin{aligned}(p-2)^2.F(p) &= \frac{9}{p+1} = \alpha.\frac{(p-2)^2}{p+1} + \beta.(p-2) + \gamma \\ p=2 &\Rightarrow \frac{9}{2+1} = \gamma \\ &\Rightarrow \gamma = 3\end{aligned}$$

- Pour β : évaluation de l'expression pour $p=0$ (par exemple).

$$\begin{aligned}F(0) = \frac{9}{(1)(-2)^2} &= \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{-2} + \frac{\gamma}{(-2)^2} \\ \frac{9}{4} &= \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} \\ \Rightarrow \quad \beta &= \frac{4.\alpha + \gamma - 9}{2} = -1\end{aligned}$$

Il aurait aussi été possible de multiplier l'expression par p est faire tendre p vers $+\infty$.

Exemple : Décomposition en éléments simples avec pôles complexes :

$$
\begin{aligned}
F(p)=\frac{2.p+3}{(p^2+p+1)(p+1)} &= \frac{\alpha}{p+1}+\frac{\beta.p+\gamma}{p^2+p+1}\\
&= \frac{\alpha.(p^2+p+1)+(\beta.p+\gamma)(p+1)}{(p^2+p+1)(p+1)}\\
&= \frac{(\alpha+\beta).p^2+(\alpha+\beta+\gamma).p+\alpha+\gamma}{(p^2+p+1)(p+1)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \alpha=1,\ \beta=-1$ et $\gamma=2$

Transformée inverse de Laplace

La fraction rationnelle associée à $F(p)$ étant décomposée en éléments simples, il s'agit d'utiliser le tableau des transformées usuelles.

Transformée inverse de Laplace

La fraction rationnelle associée à $F(p)$ étant décomposée en éléments simples, il s'agit d'utiliser le tableau des transformées usuelles.

Exemple :

$$F(p) = \frac{9}{(p+1)(p-2)^2}$$

Transformée inverse de Laplace

La fraction rationnelle associée à $F(p)$ étant décomposée en éléments simples, il s'agit d'utiliser le tableau des transformées usuelles.

EXEMPLE :

$$F(p) = \frac{9}{(p+1)(p-2)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2} + \frac{3}{(p-2)^2}$$

Transformée inverse de Laplace

La fraction rationnelle associée à $F(p)$ étant décomposée en éléments simples, il s'agit d'utiliser le tableau des transformées usuelles.

Exemple :

$$F(p) = \frac{9}{(p+1)(p-2)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2} + \frac{3}{(p-2)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad f(t) = e^{-t} - e^{2.t} + 3.t.e^{2.t}$$