CI-2 :
Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-3 Prévoir les réponses temporelles de systèmes élémentaires

Lycée Carnot - Dijon, 2023 - 2024

Germain Gondor

Sommaire

1. Gain pur
2. Système du premier ordre
3. Système du deuxième ordre
4. Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques

Endosquelette

Objectifs

MODELISER SIMULER RESOUDRE EXPERIMENTER

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier les paramètres d'un modèle.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
  - Compléter un modèle multiphysique.
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
  - Simplifier un modèle.
- **B3** Valider un modèle
  - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Déterminer la réponse temporelle.
- **D2** Proposer et justifier un protocole expérimental
  - Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.
  - Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.
  - Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.

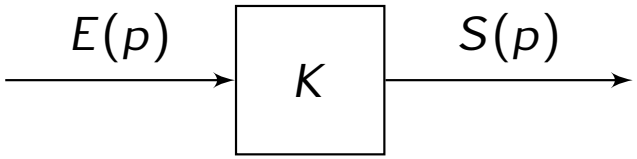
Sommaire

1. Gain pur
   - Définition
   - Réponses temporelles
2. Système du premier ordre
3. Système du deuxième ordre
4. Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques

Gain pur

Définition

La relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est simplement $s(t) = K.e(t)$ pour un système assimilé à un gain pur K.



Gain pur

Réponses temporelles

Pour les entrées canoniques, un système assimilé à un gain pur K donne directement :

Sollicitation	Dirac	Échelon	Rampe	Sinus
$e(t)$	$\delta(t)$	$E_0.u(t)$	$V_0.t.u(t)$	$E_0.\sin(\omega.t).u(t)$
$s(t)$	$K.\delta(t)$	$K.E_0.u(t)$	$K.V_0.t.u(t)$	$K.E_0.\sin(\omega.t).u(t)$

Sommaire

1. Gain pur
2. Système du premier ordre
   - Définition
   - Réponse impulsionnelle
   - Réponse impulsionnelle
   - Réponse à un échelon
   - Réponse à une rampe
3. Système du deuxième ordre
4. Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques

Système du premier ordre

Définition

Définition : Système du premier ordre

On appelle système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, un système régi par une équation différentielle de type :

$$\boxed{\tau.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = K.e(t)}$$

Système du premier ordre

Définition

Définition : Système du premier ordre

On appelle système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, un système régi par une équation différentielle de type :

$$\boxed{\tau.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = K.e(t)}$$

Avec les conditions d'Heaviside ($s(0^-) = e(0^-) = 0$), la fonction de transfert est $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$ avec K le gain statique et τ la constante de temps.

Système du premier ordre

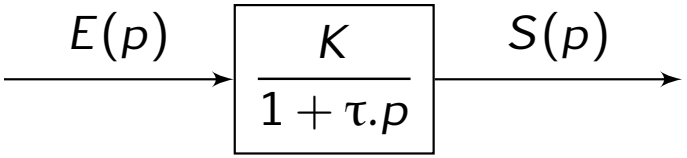
Définition

Définition : Système du premier ordre

On appelle système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, un système régi par une équation différentielle de type :

$$\boxed{\tau.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = K.e(t)}$$

Avec les conditions d'Heaviside ($s(0^-) = e(0^-) = 0$), la fonction de transfert est $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$ avec K le gain statique et τ la constante de temps.



Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est par définition, la réponse à un Dirac :

$$\left.\begin{array}{r} e(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad E(p) = 1 \\ S(p) = H(p).E(p) \end{array}\right\}$$

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est par définition, la réponse à un Dirac :

$$\left.\begin{array}{r} e(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad E(p) = 1 \\ S(p) = H(p).E(p) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) \quad = \quad H(p) \times 1 = \frac{K}{1+\tau.p} = \frac{\frac{K}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}$$

Réponse impulsionnelle

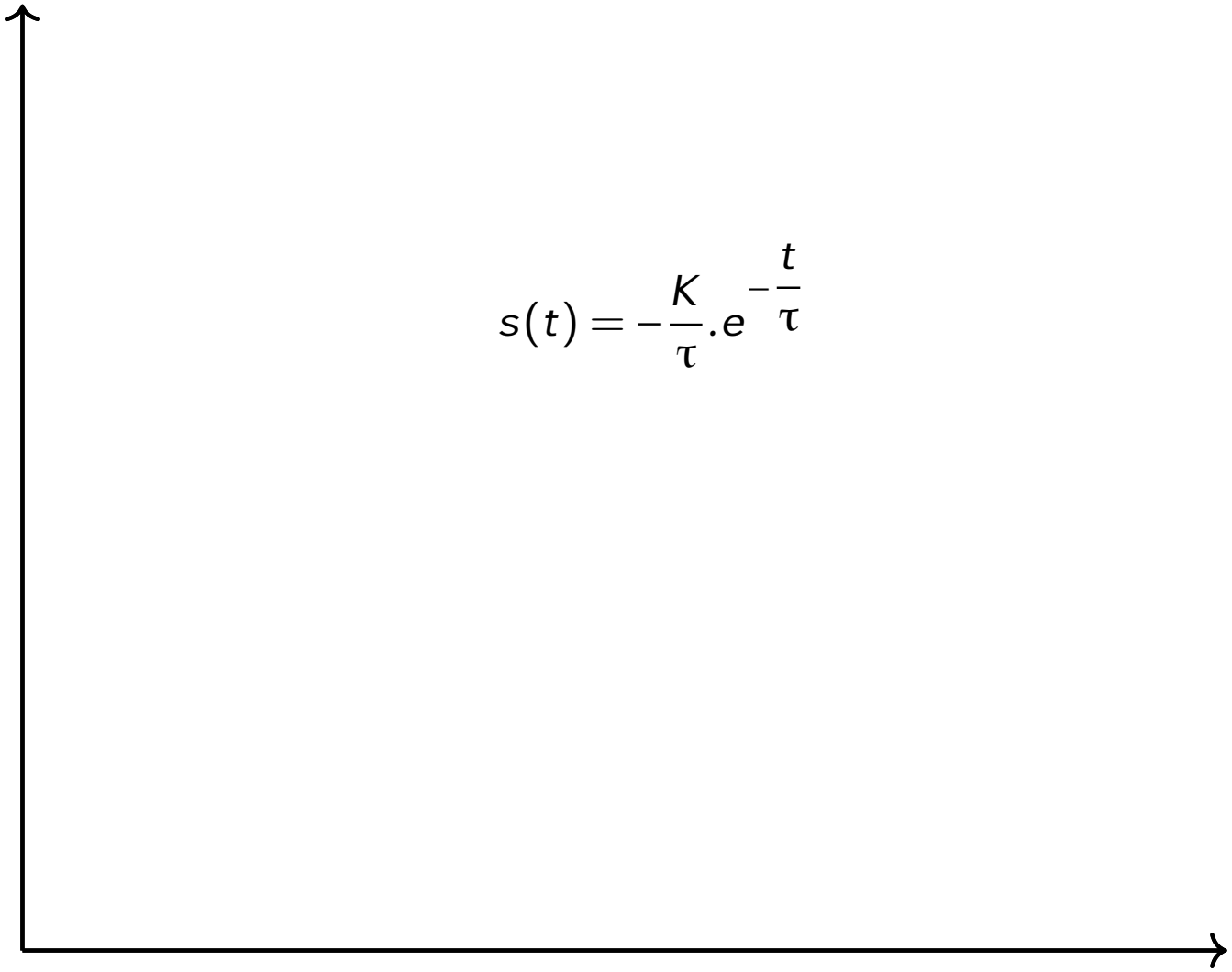
La réponse impulsionnelle d'un système est par définition, la réponse à un Dirac :

$$\left.\begin{array}{r} e(t)=\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad E(p)=1 \\ S(p)=H(p).E(p) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) \quad = \quad H(p)\times 1=\frac{K}{1+\tau.p}=\frac{\frac{K}{\tau}}{p+\frac{1}{\tau}}$$

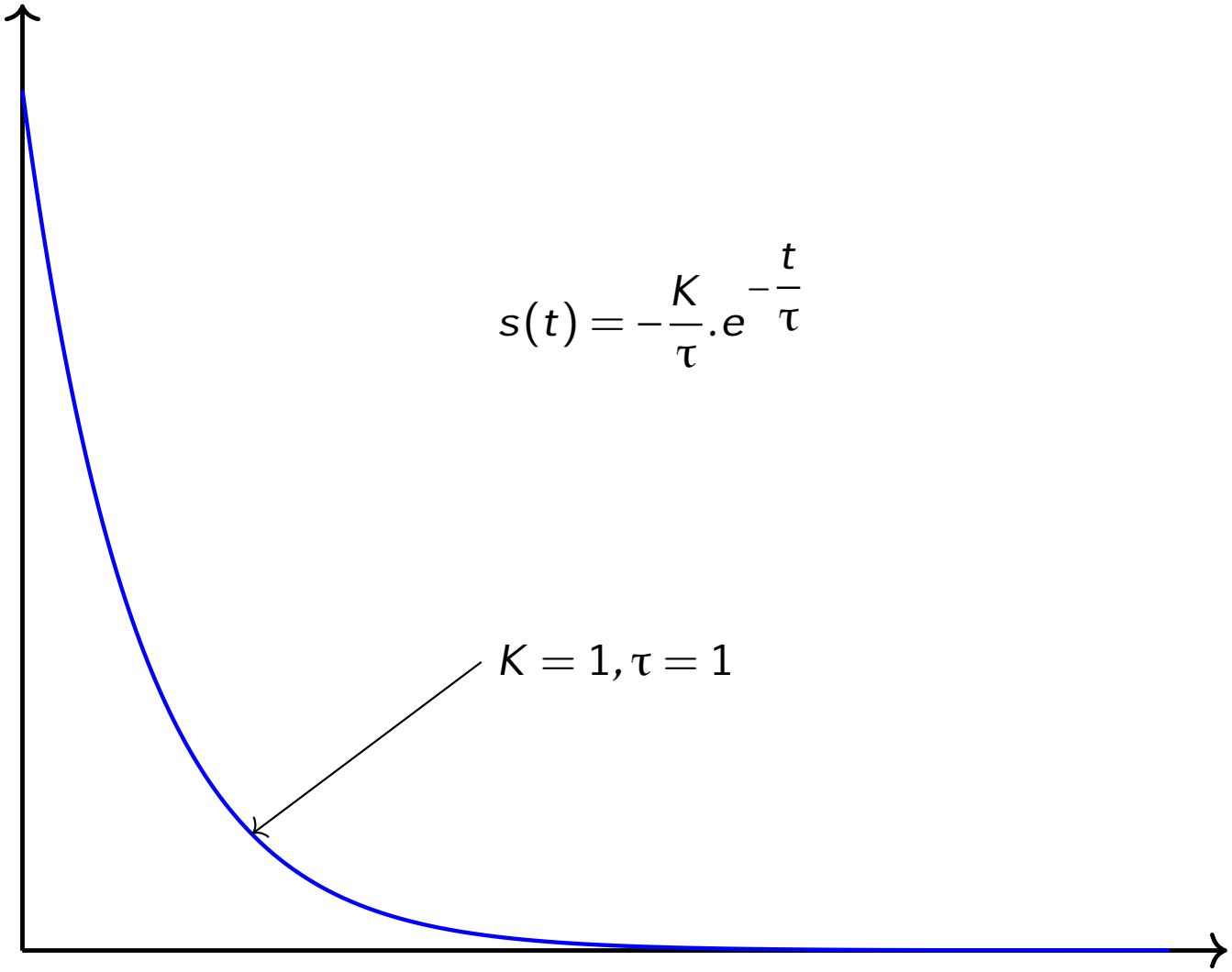
$$\Rightarrow \quad s(t)=\frac{K}{\tau}.e^{-t/\tau}$$

Réponse impulsionnelle

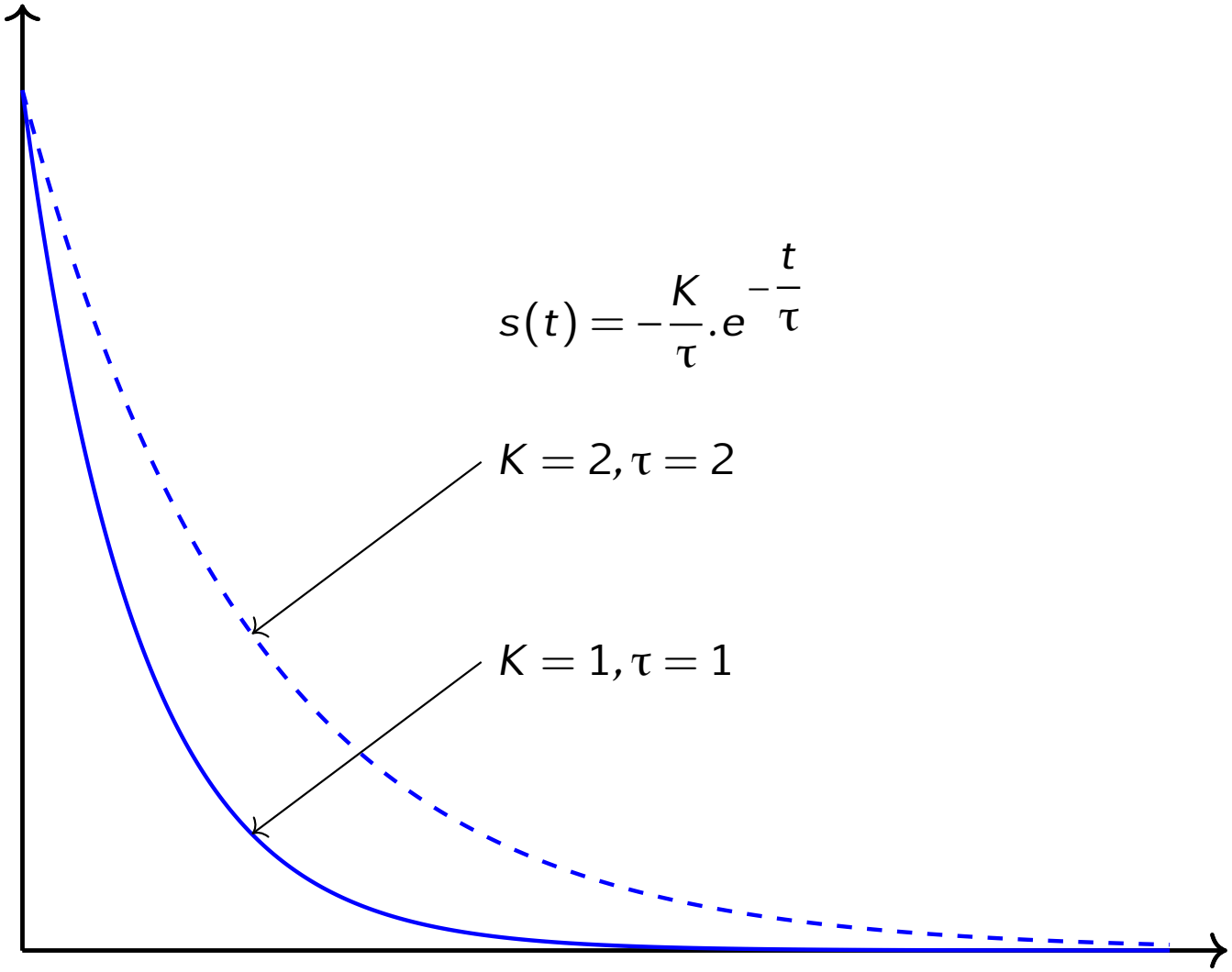


$$s(t) = -\frac{K}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

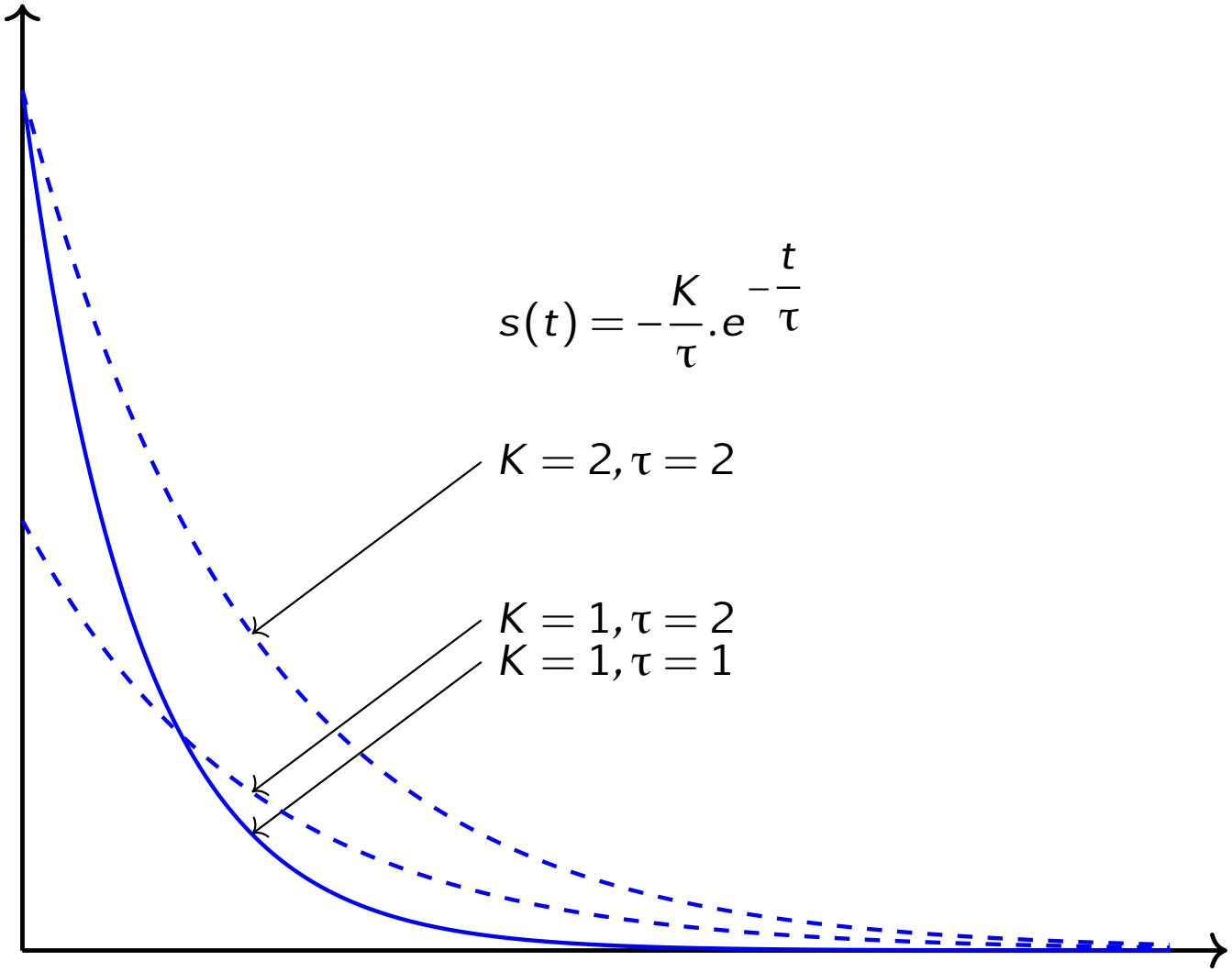
Réponse impulsionnelle



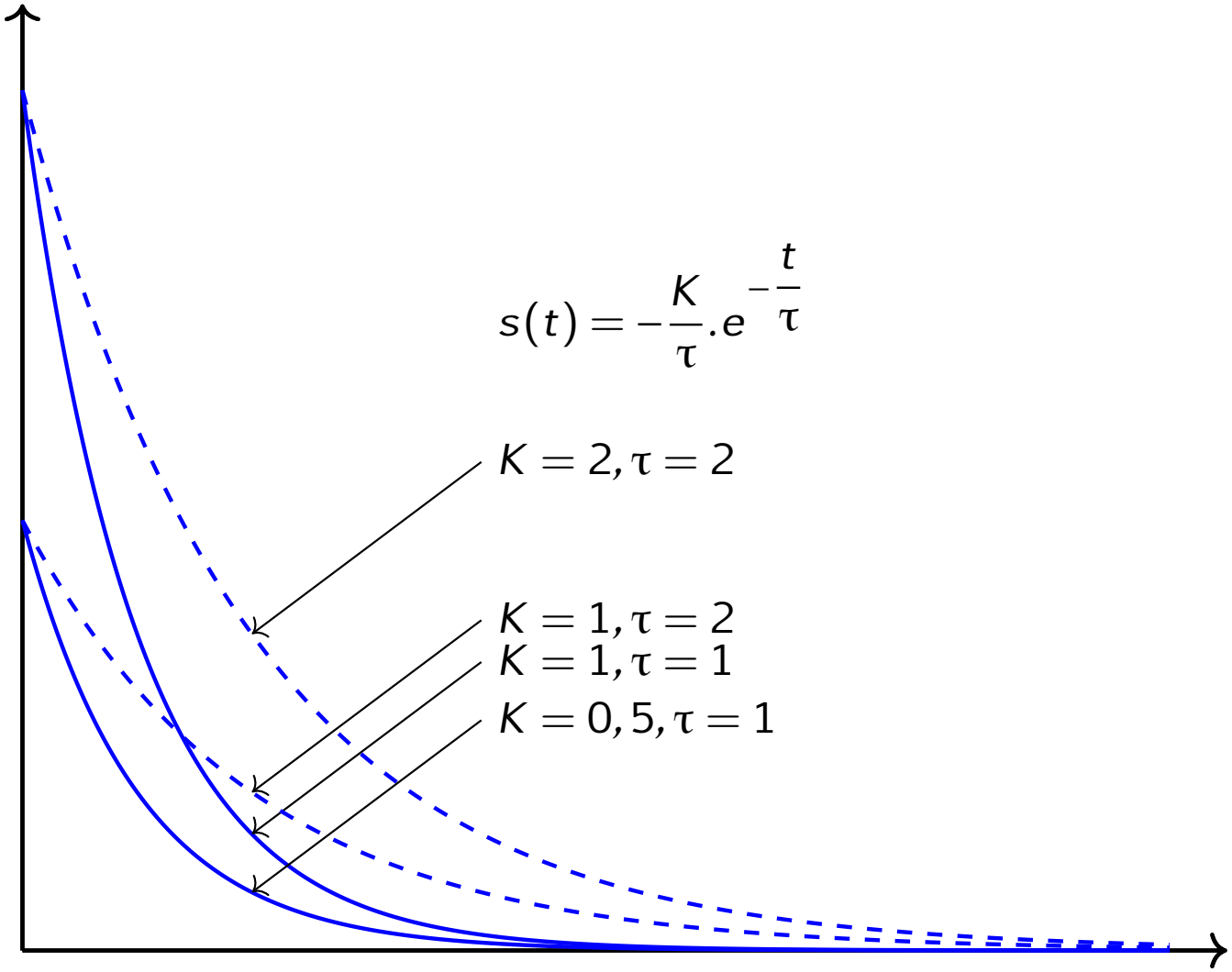
Réponse impulsionnelle



Réponse impulsionnelle



Réponse impulsionnelle



Réponse à un échelon

La réponse à un échelon d'un système est, par définition, la réponse à une sollicitation constante (par exemple d'amplitude E_0) pour $t \geq 0$:

$$e(t) = E_0.u(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau.p}.\frac{E_0}{p} = K.E_0.\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau.p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad s(t) = K.E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad s'(t) = \frac{K.E_0}{\tau}.e^{-t/\tau}$$

Propriétés remarquables

- La valeur à convergence vaut : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} s(t) = K.E_0$ ou $\lim\limits_{p \mapsto 0^+} p.S(p) = K.E_0$

Propriétés remarquables

- La valeur à convergence vaut : $\lim_{t \mapsto +\infty} s(t) = K.E_0$ ou $\lim_{p \mapsto 0^+} p.S(p) = K.E_0$
- Le temps de réponse à 5% est obtenu pour un temps $t = 3.\tau$: $s(3.\tau) \approx 0,95.K.E_0$

Propriétés remarquables

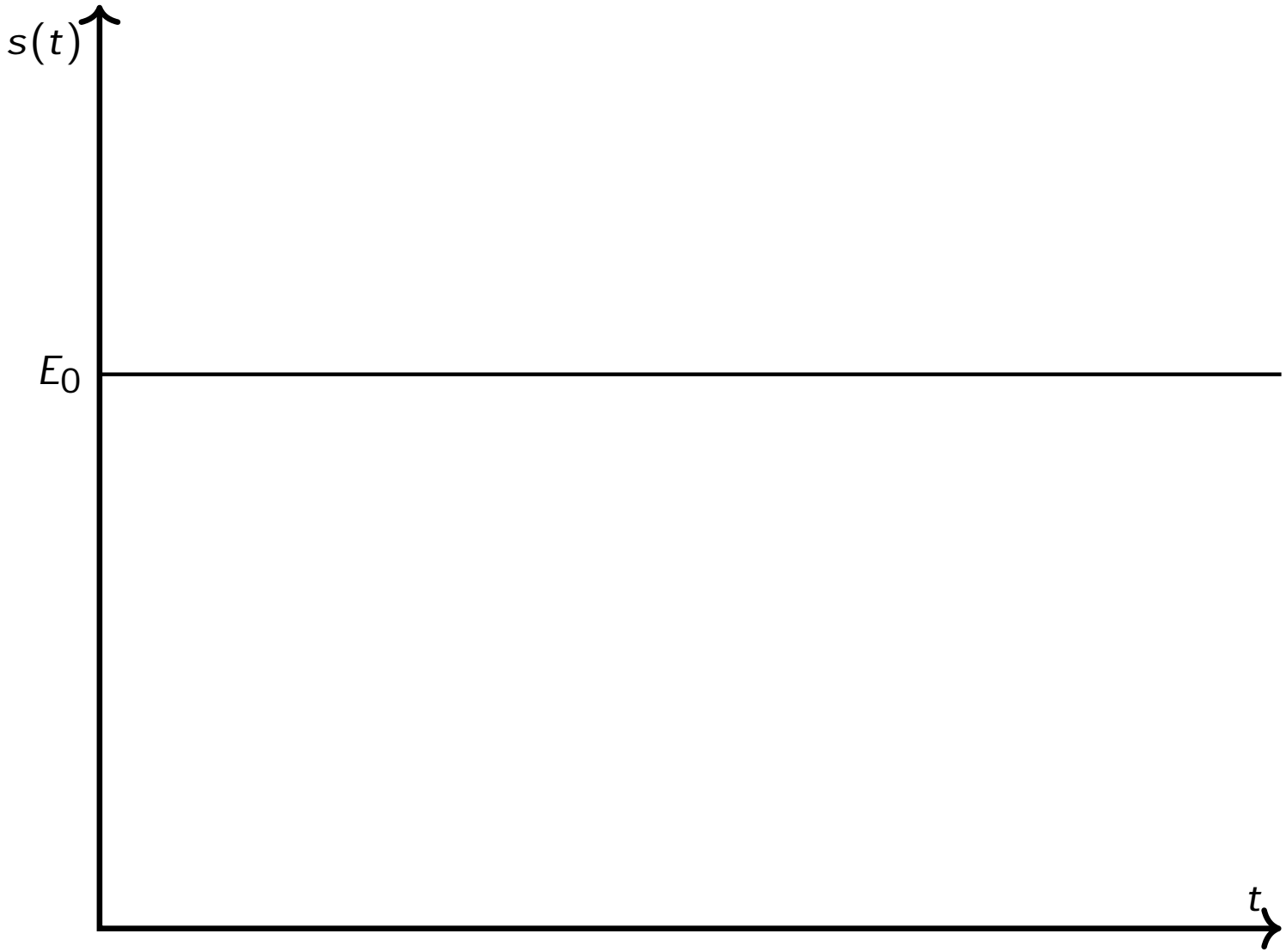
- La valeur à convergence vaut : $\lim_{t \mapsto +\infty} s(t) = K.E_0$ ou $\lim_{p \mapsto 0^+} p.S(p) = K.E_0$
- Le temps de réponse à 5% est obtenu pour un temps $t = 3.\tau$: $s(3.\tau) \approx 0,95.K.E_0$
- Pour le temps $t = \tau$, on obtient : $s(t) = 0,63.K.E_0$

Propriétés remarquables

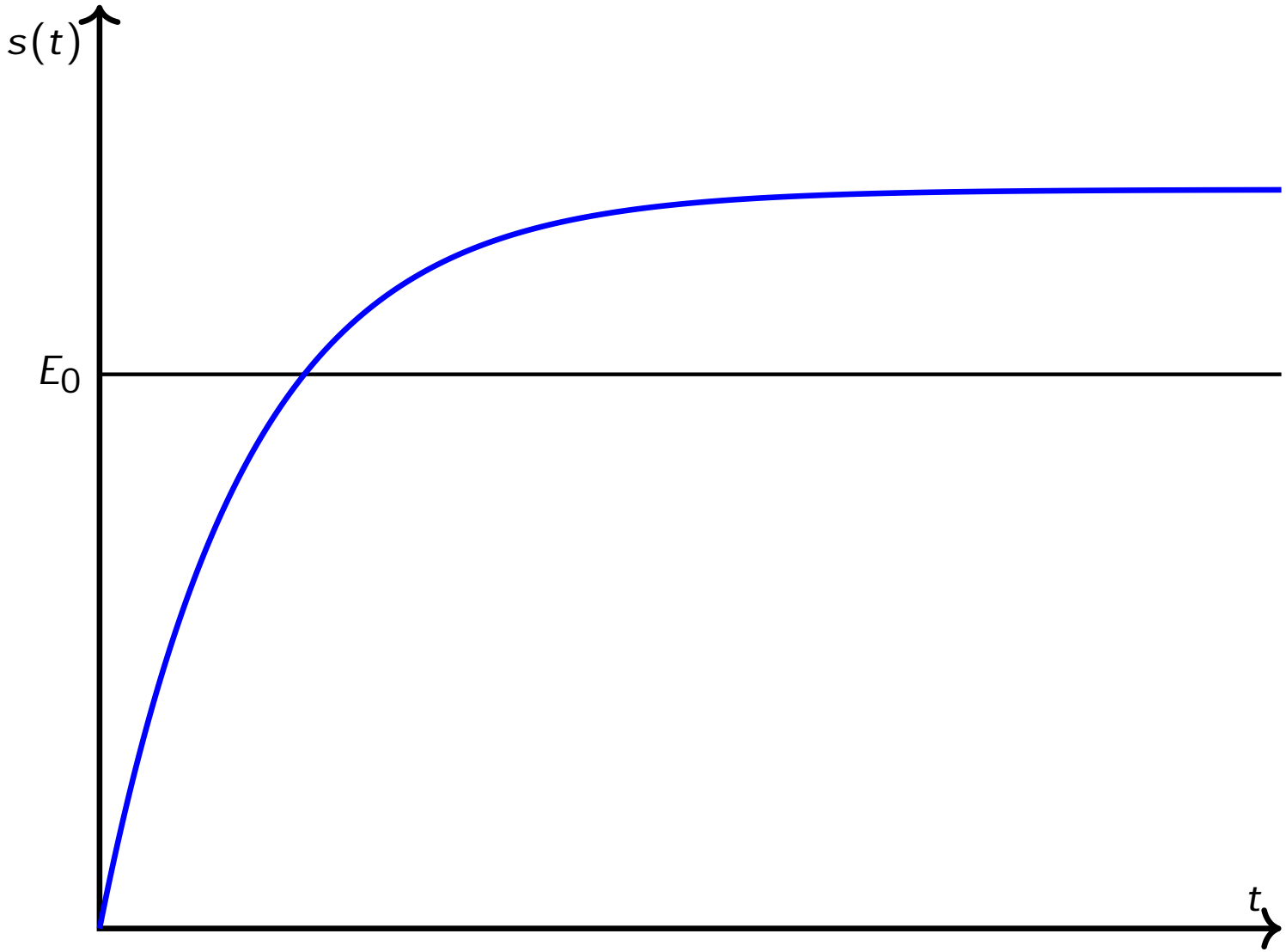
- La valeur à convergence vaut : $\lim_{t \mapsto +\infty} s(t) = K.E_0$ ou $\lim_{p \mapsto 0^+} p.S(p) = K.E_0$
- Le temps de réponse à 5% est obtenu pour un temps $t = 3.\tau$: $s(3.\tau) \approx 0,95.K.E_0$
- Pour le temps $t = \tau$, on obtient : $s(t) = 0,63.K.E_0$
- La pente à l'origine vaut $\dfrac{K.E_0}{\tau}$

Paramètres caractéristiques

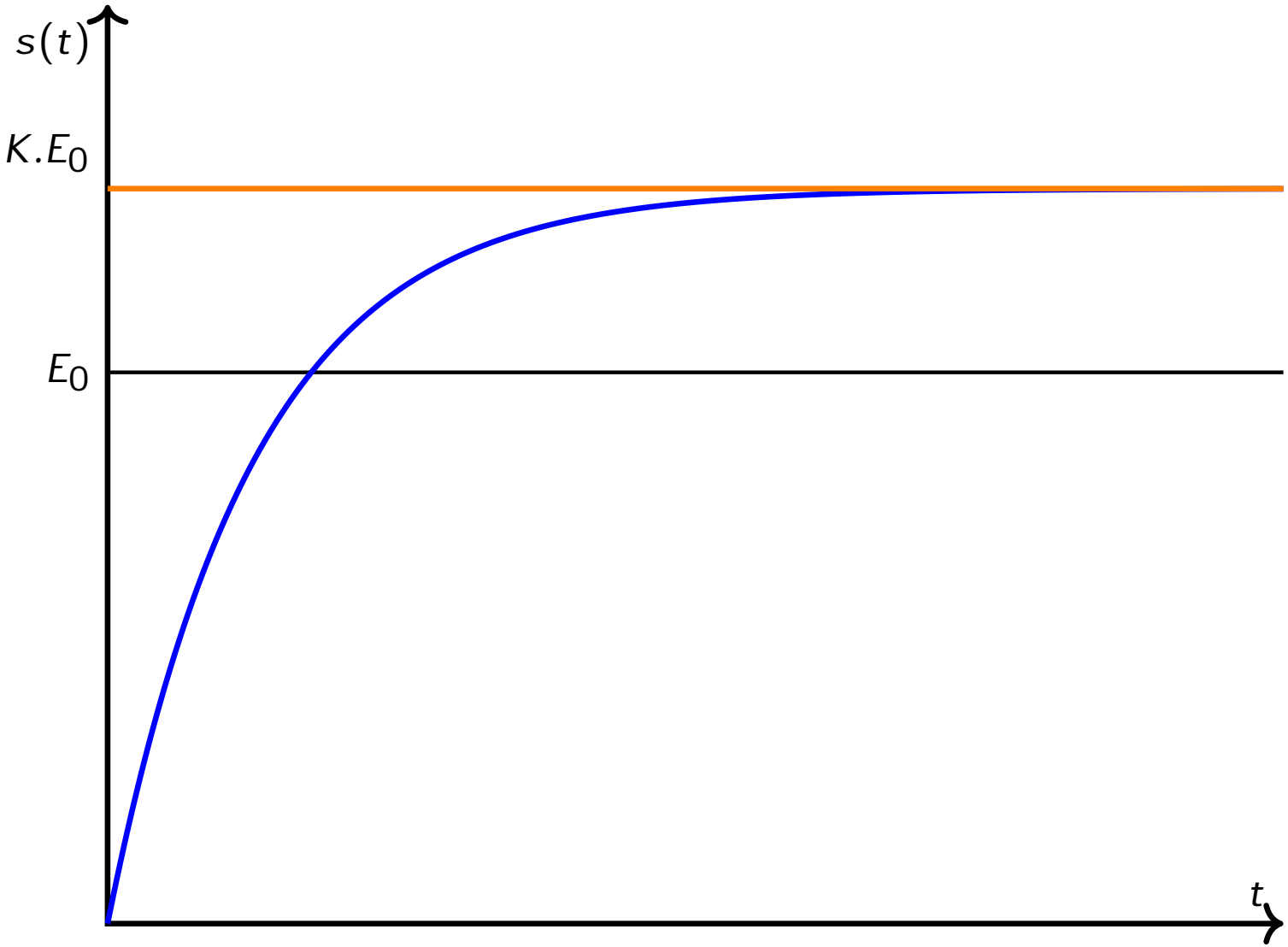
Paramètres caractéristiques



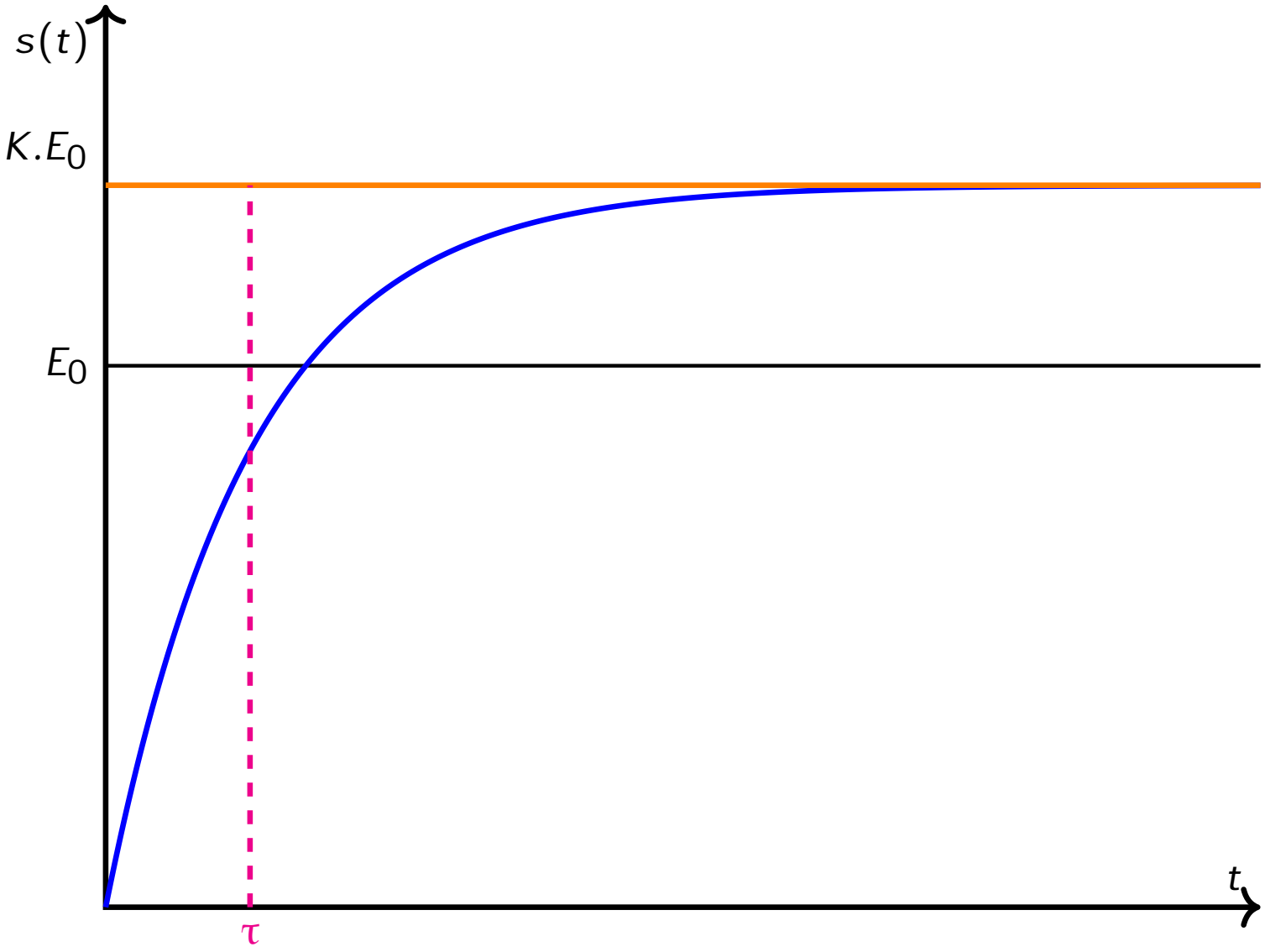
Paramètres caractéristiques



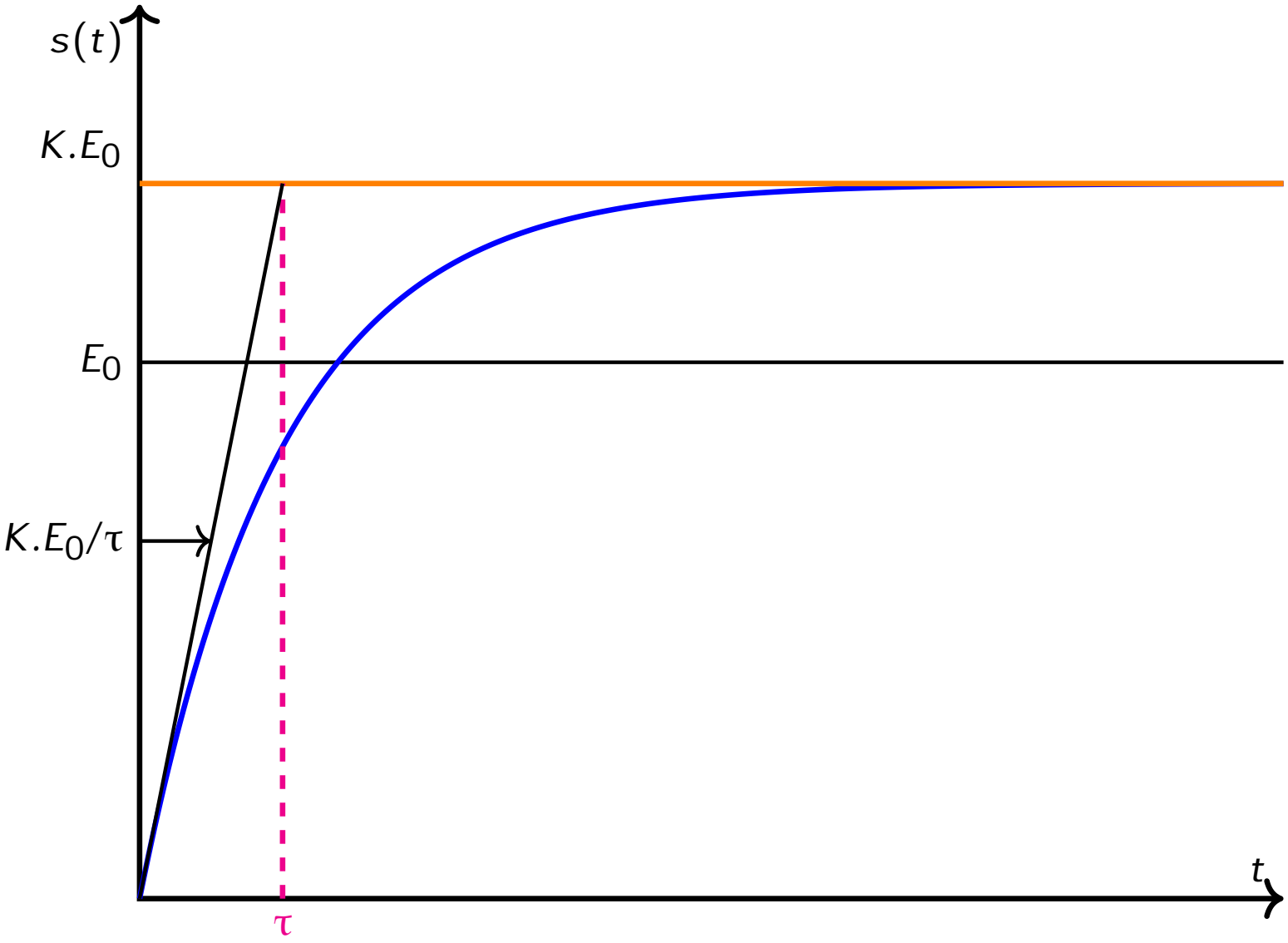
Paramètres caractéristiques



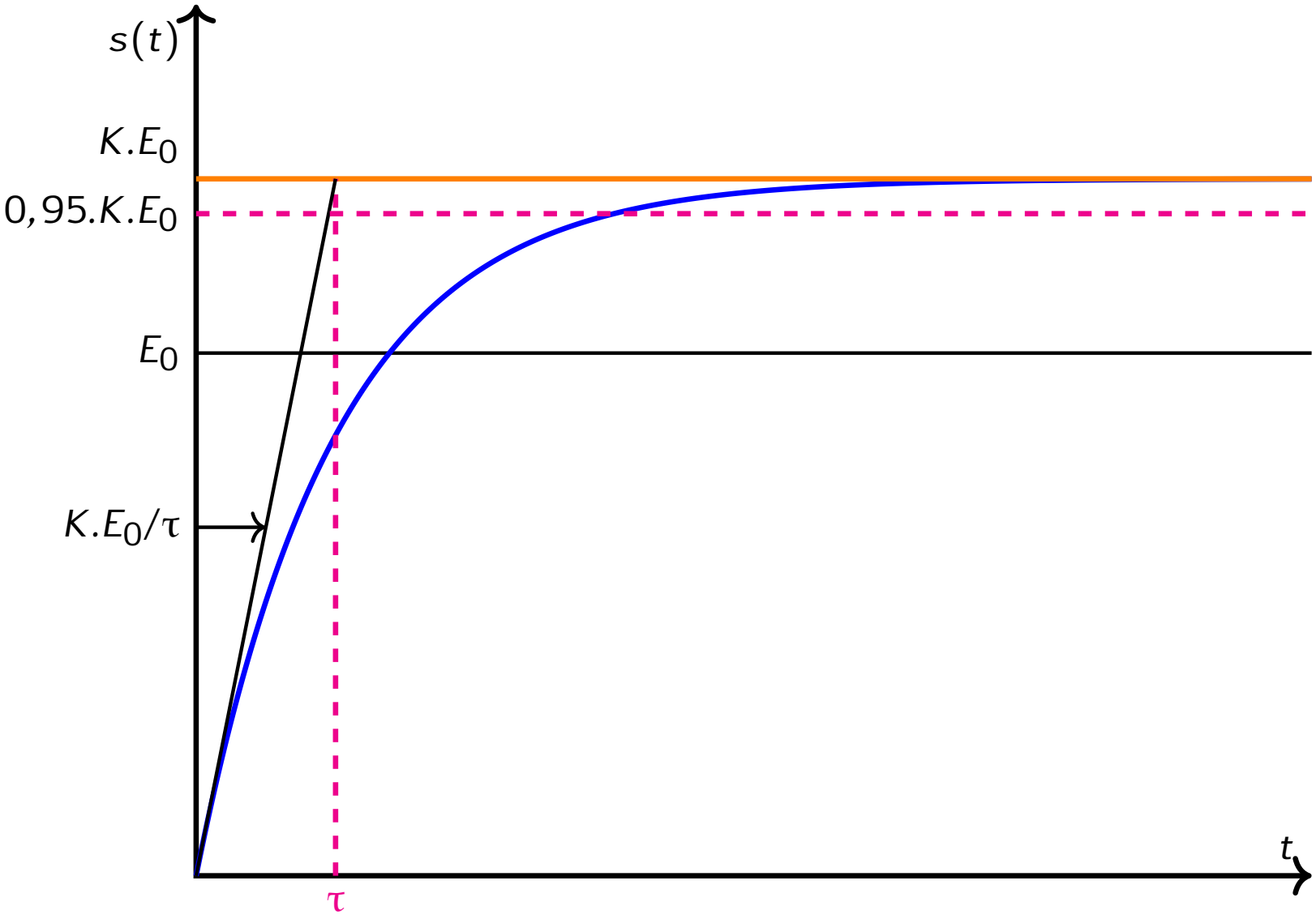
Paramètres caractéristiques



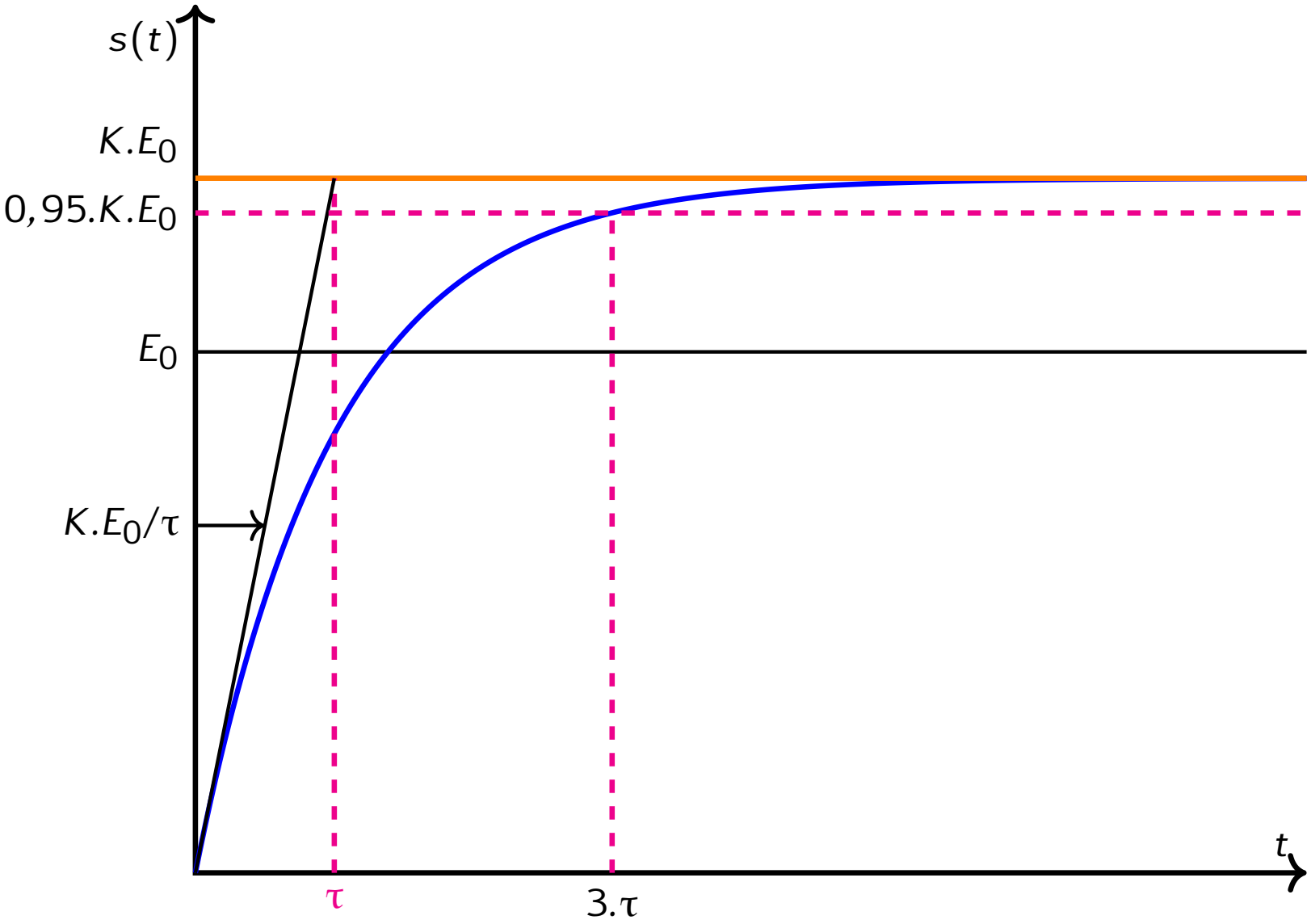
Paramètres caractéristiques



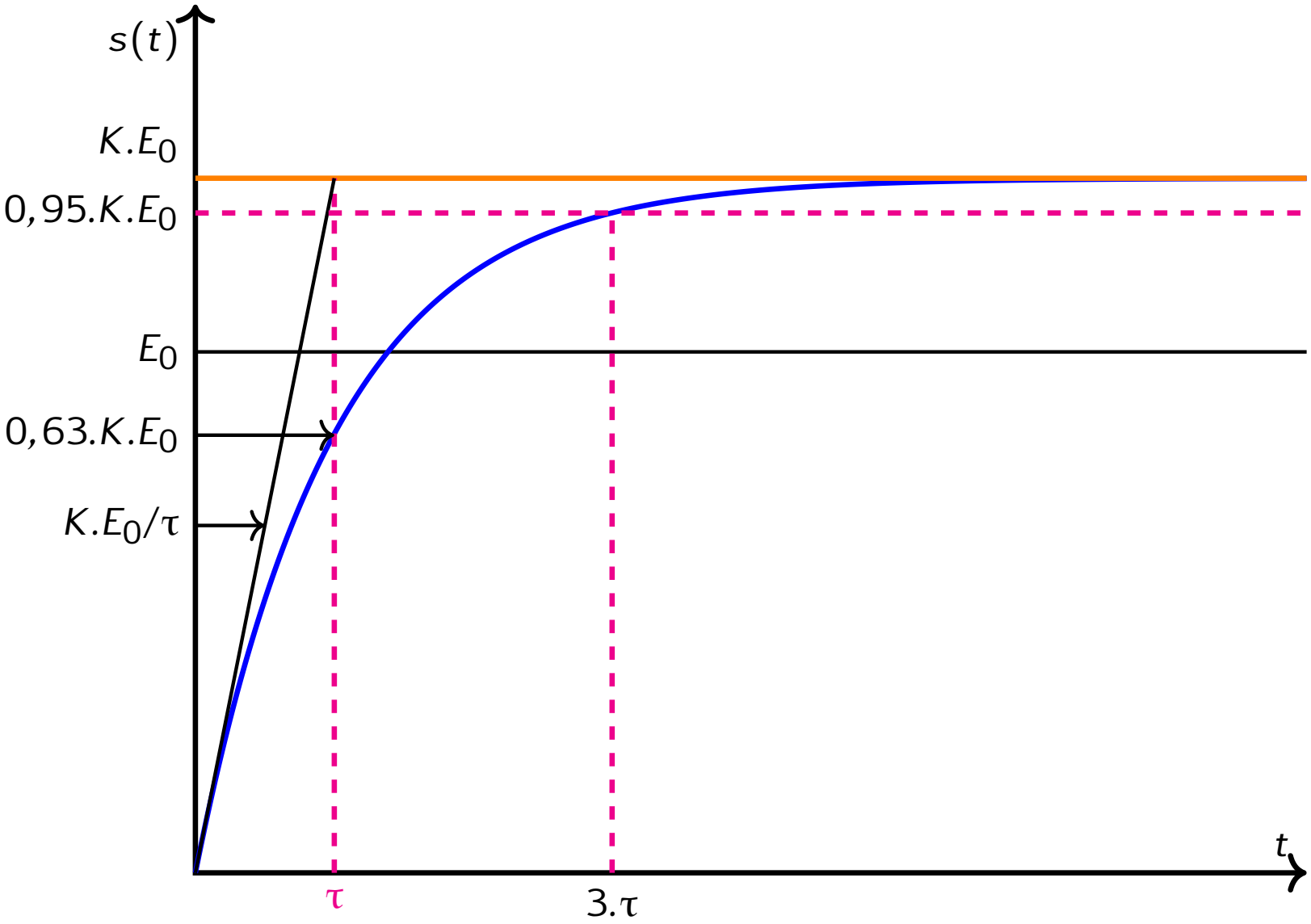
Paramètres caractéristiques



Paramètres caractéristiques

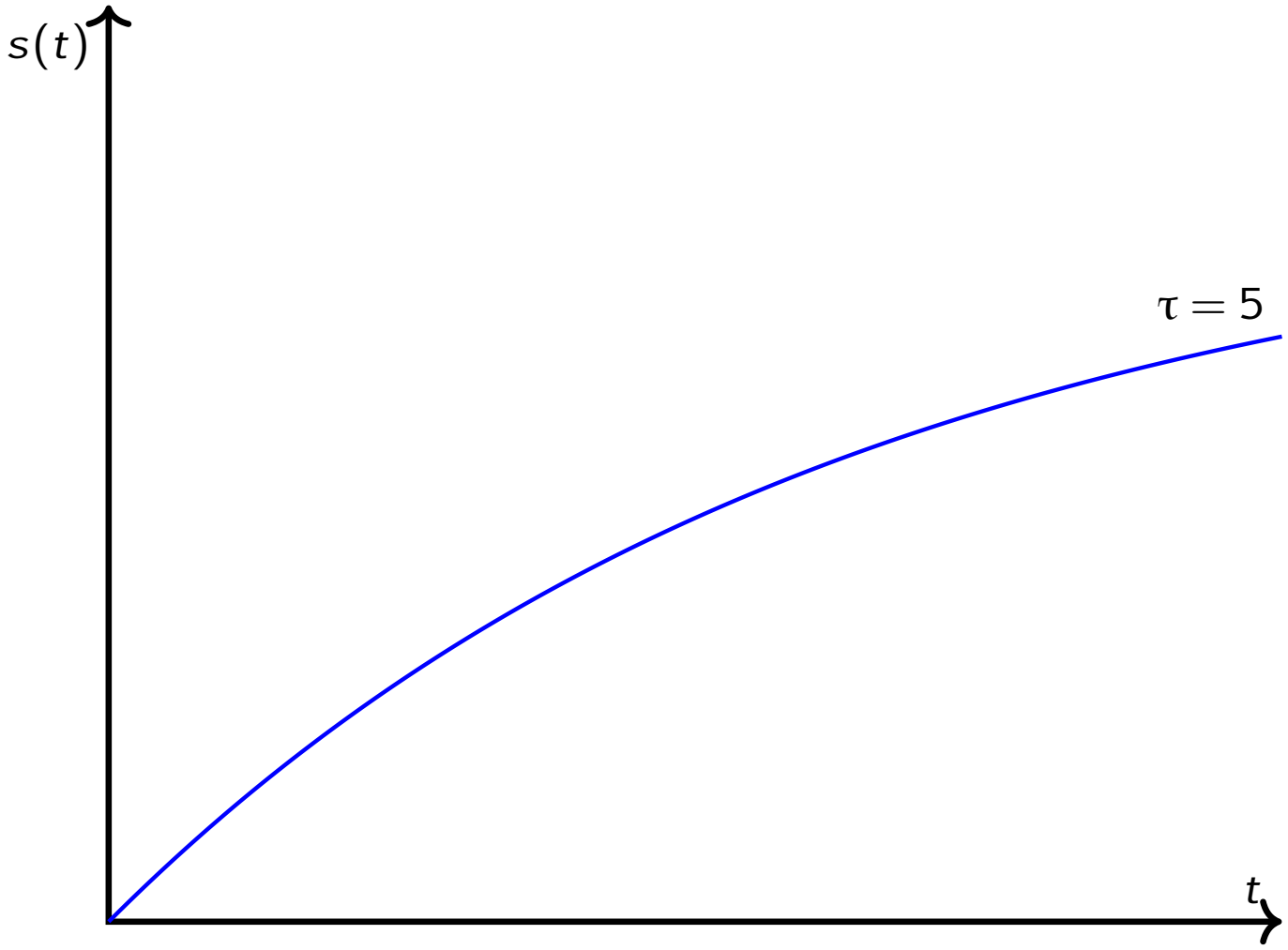


Paramètres caractéristiques

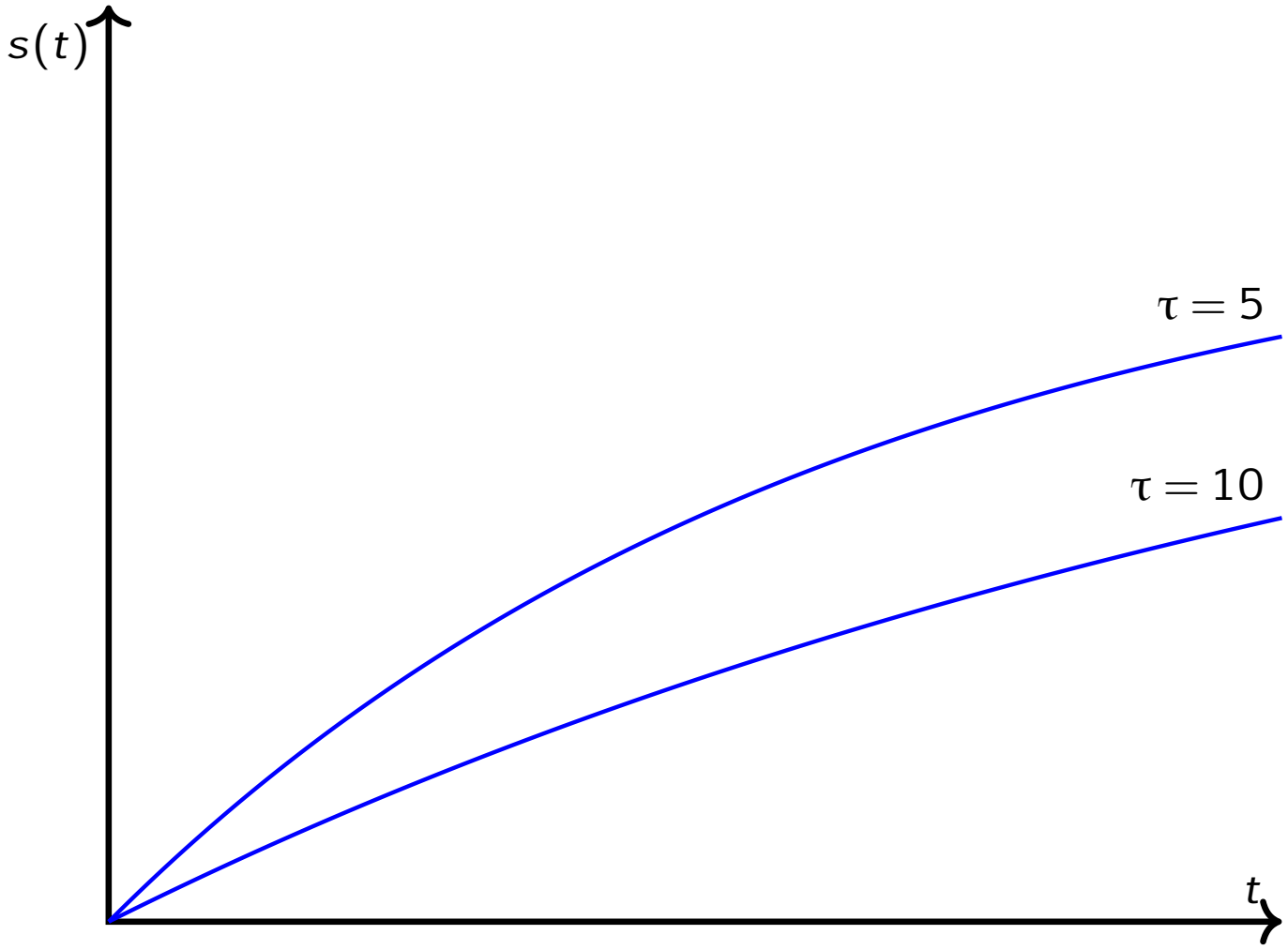


Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle

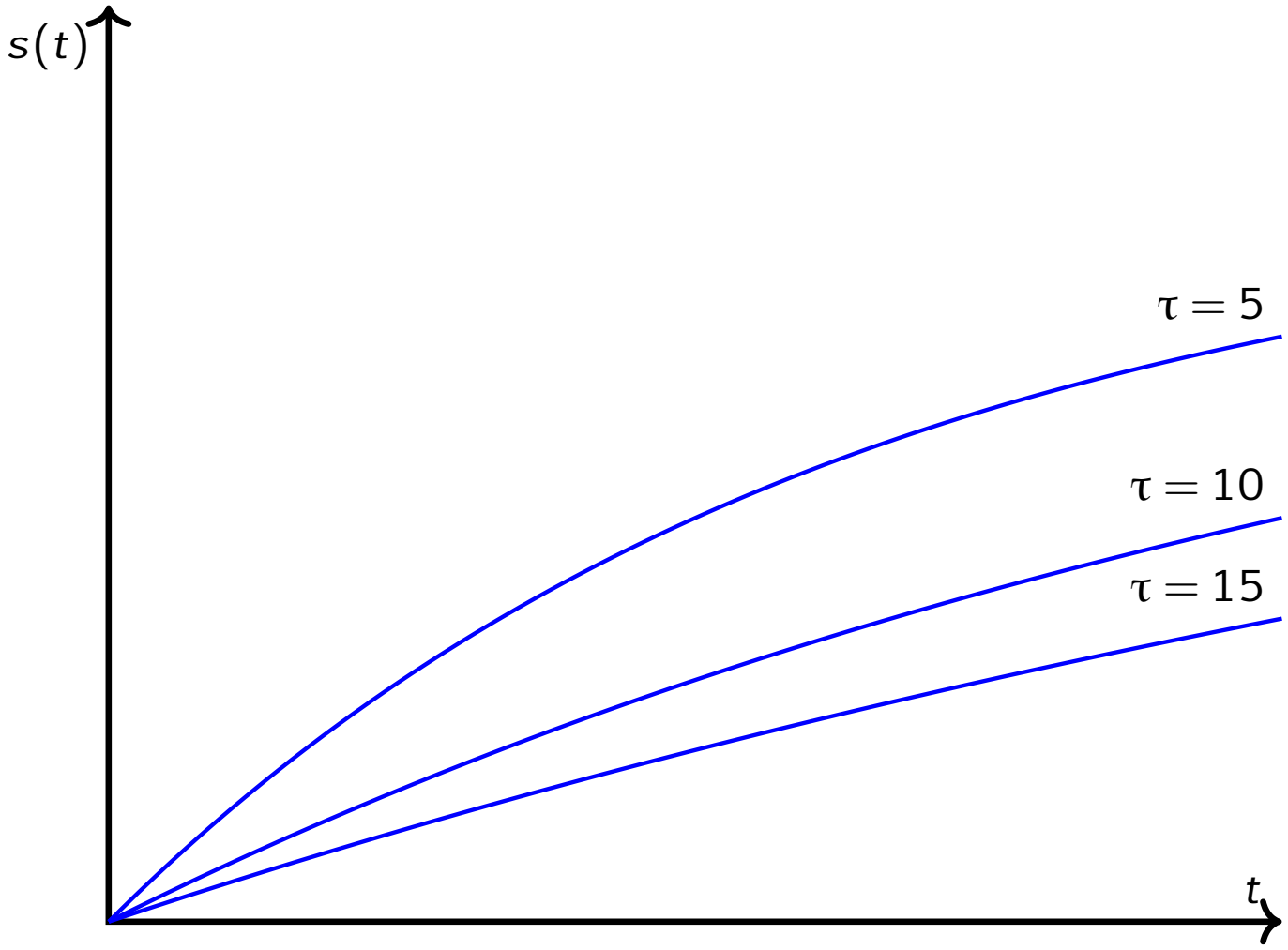
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



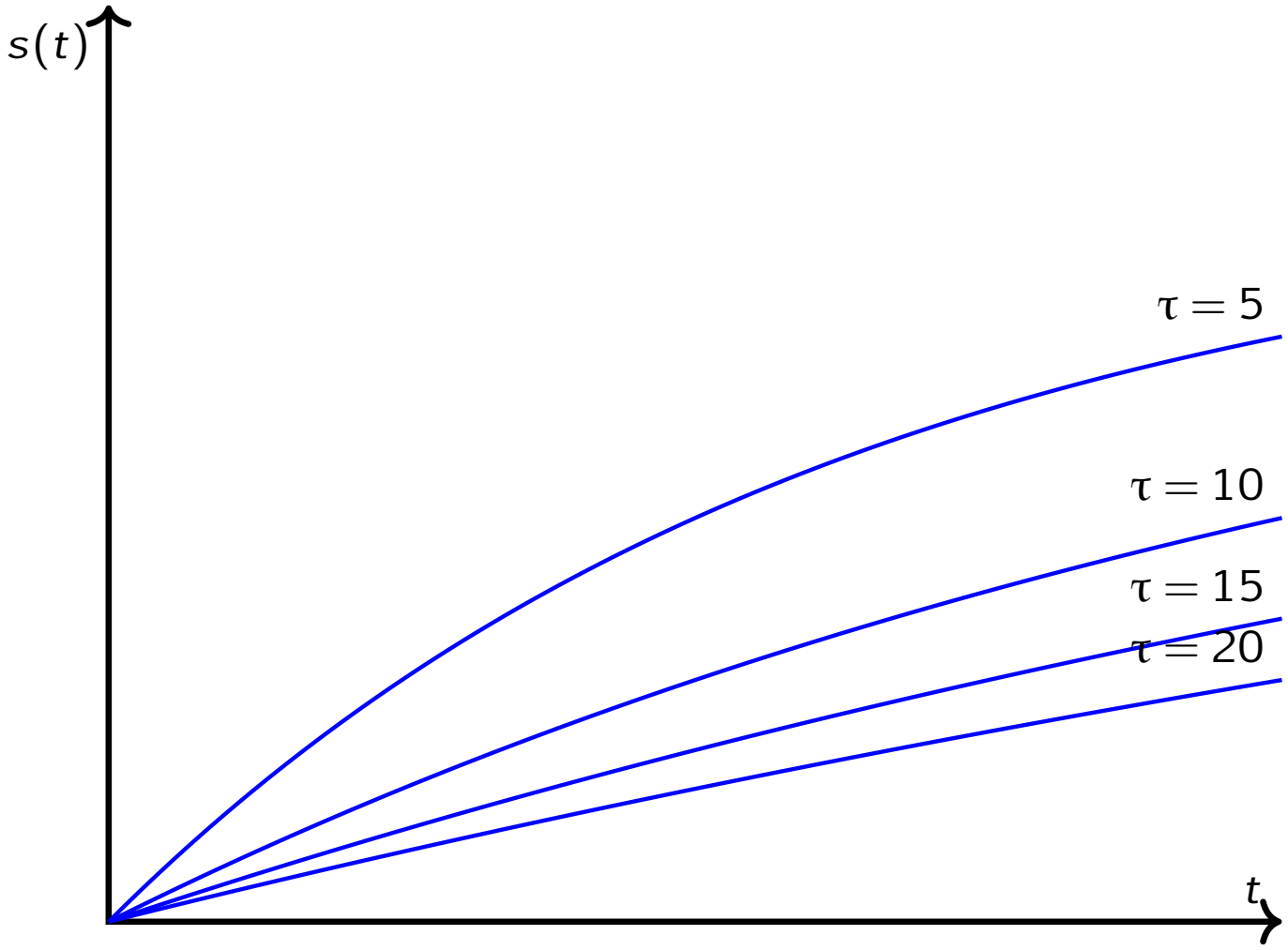
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



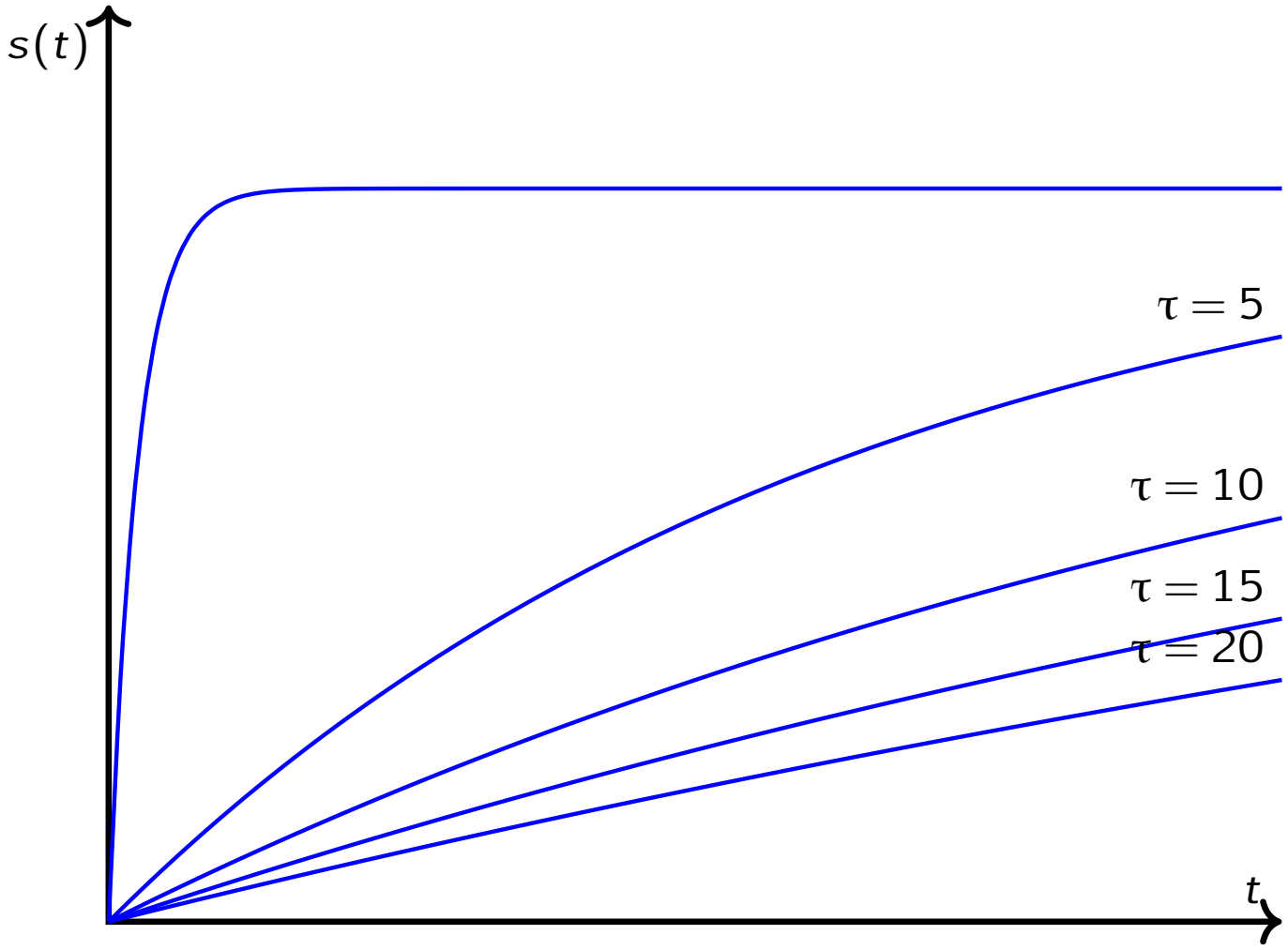
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



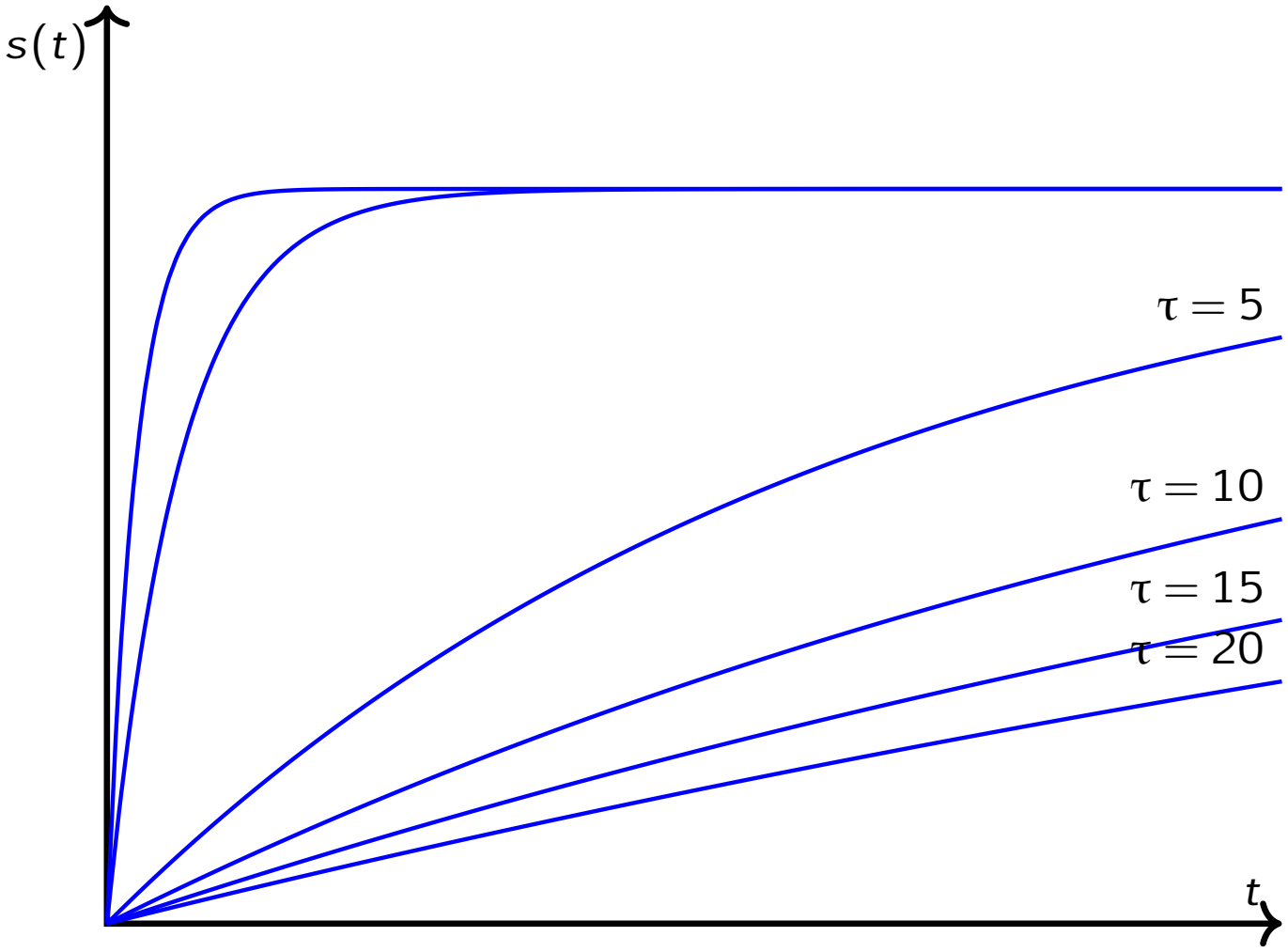
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



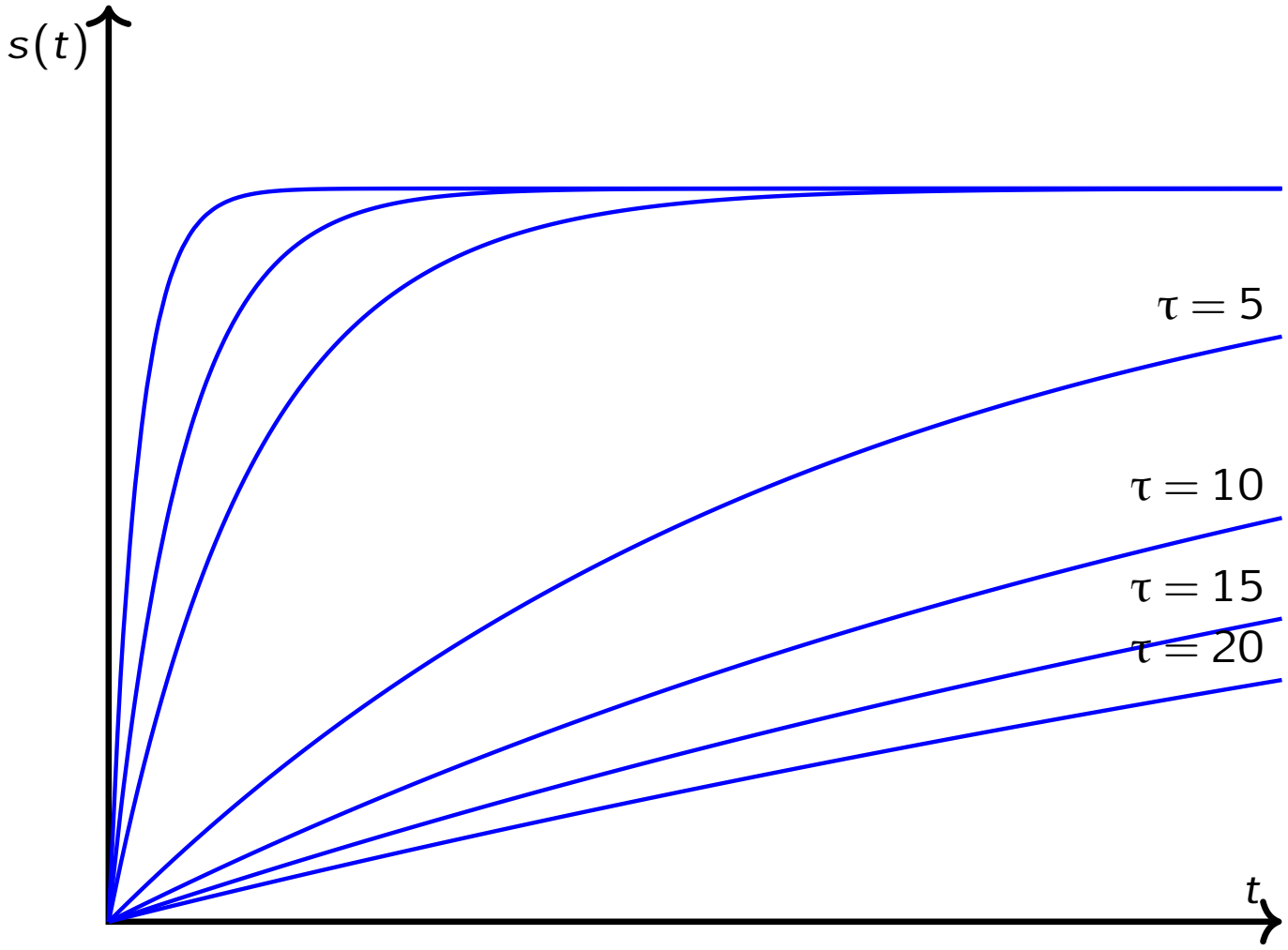
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



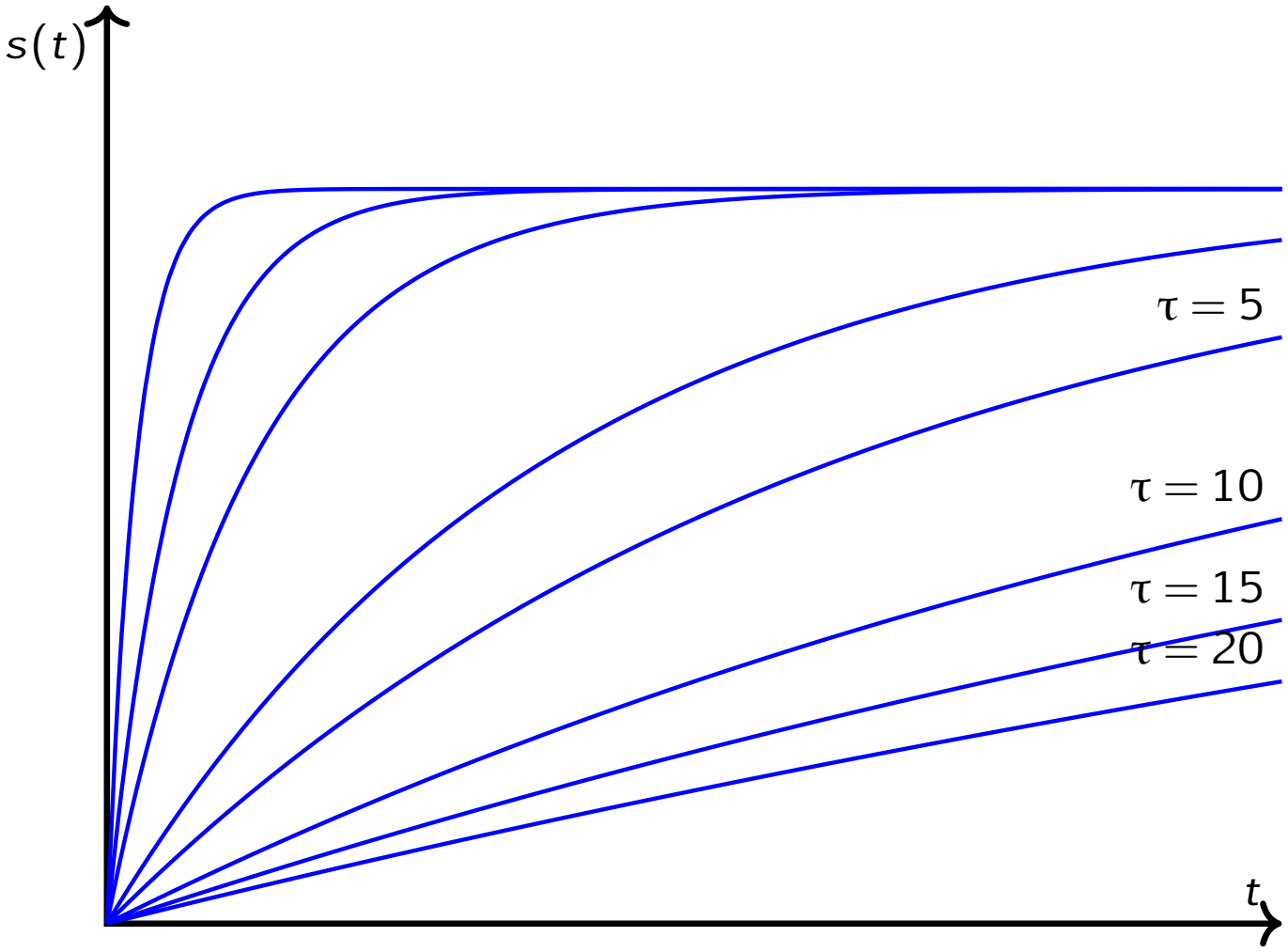
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



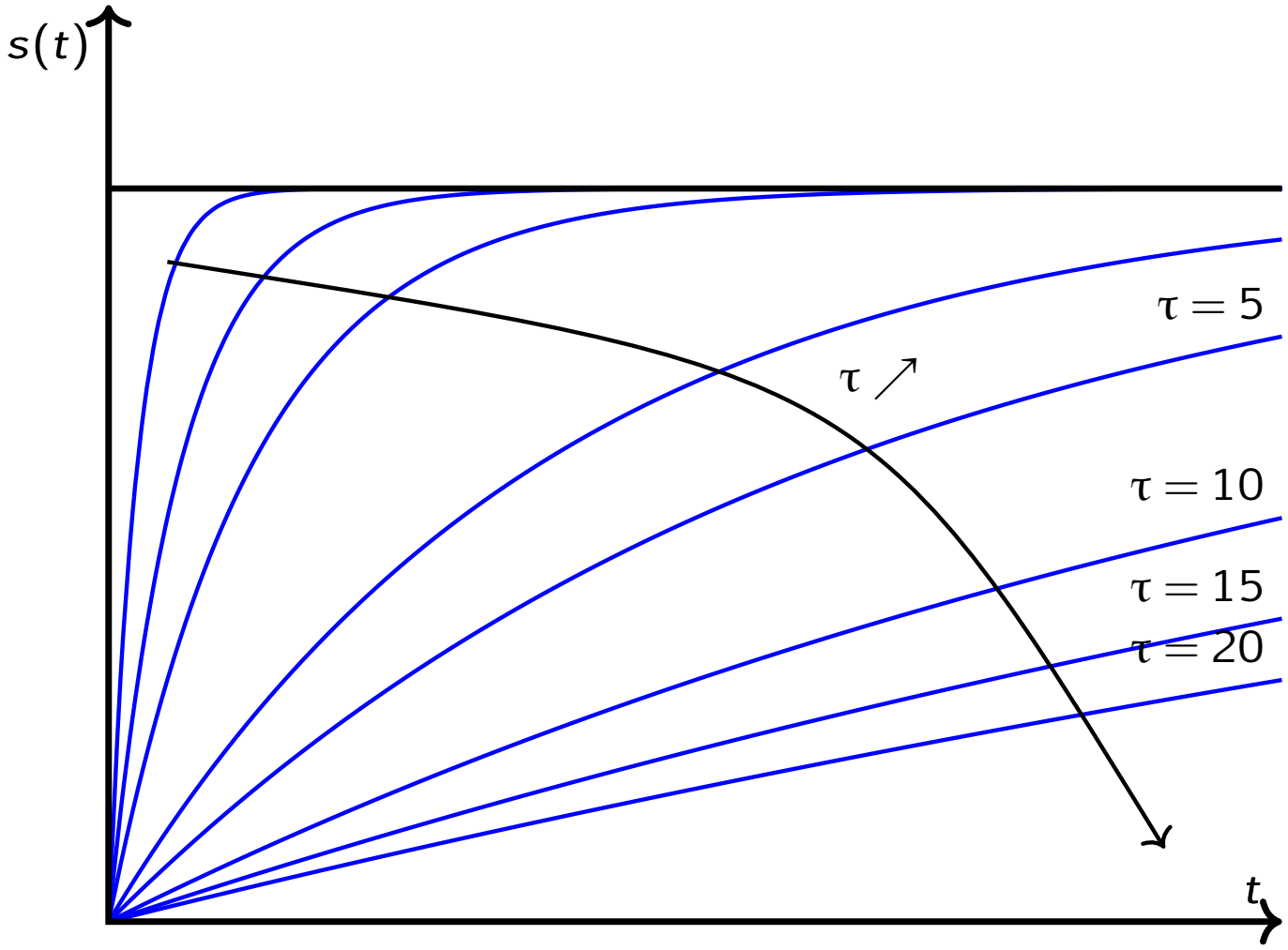
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



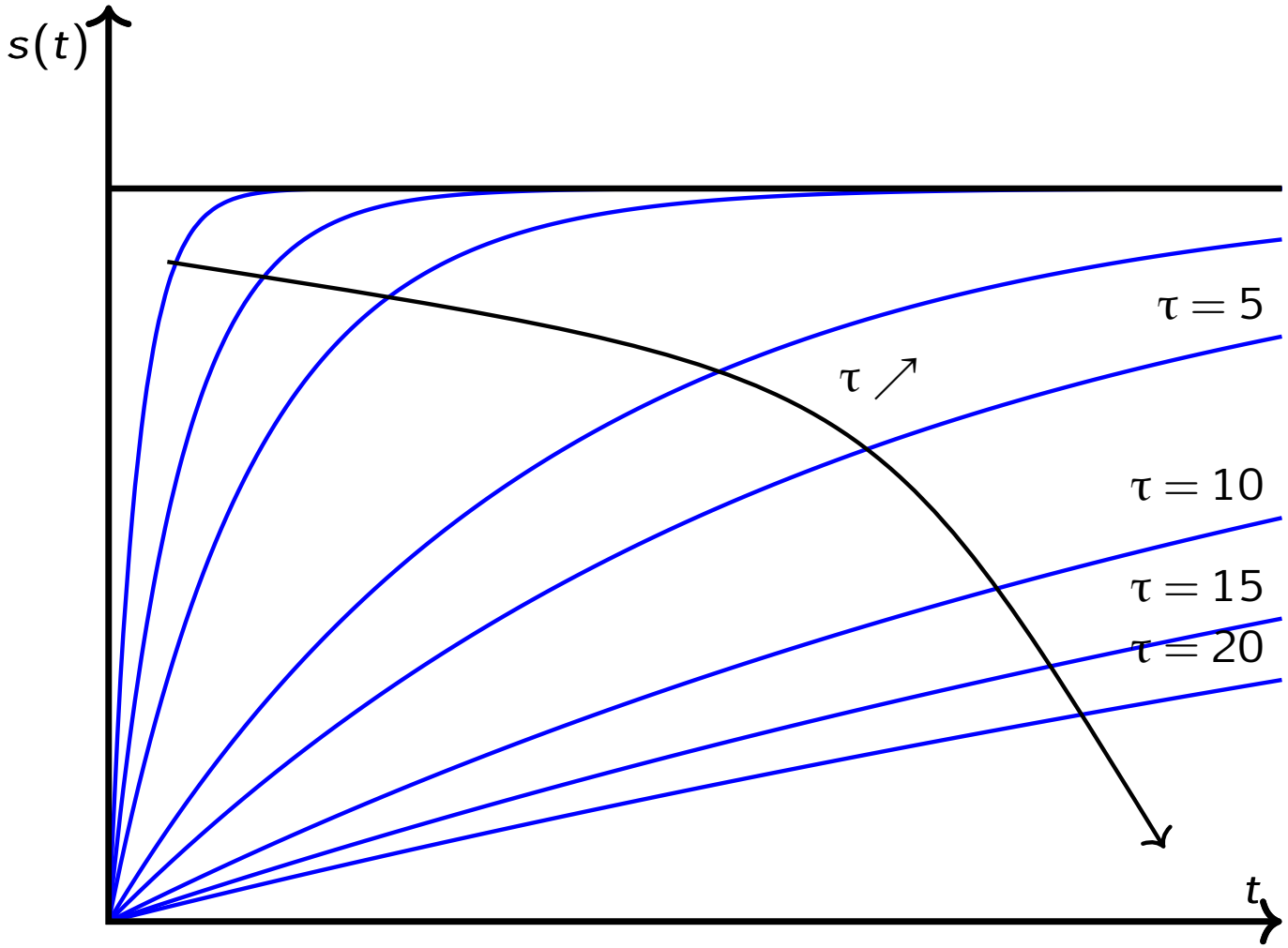
Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle



Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle

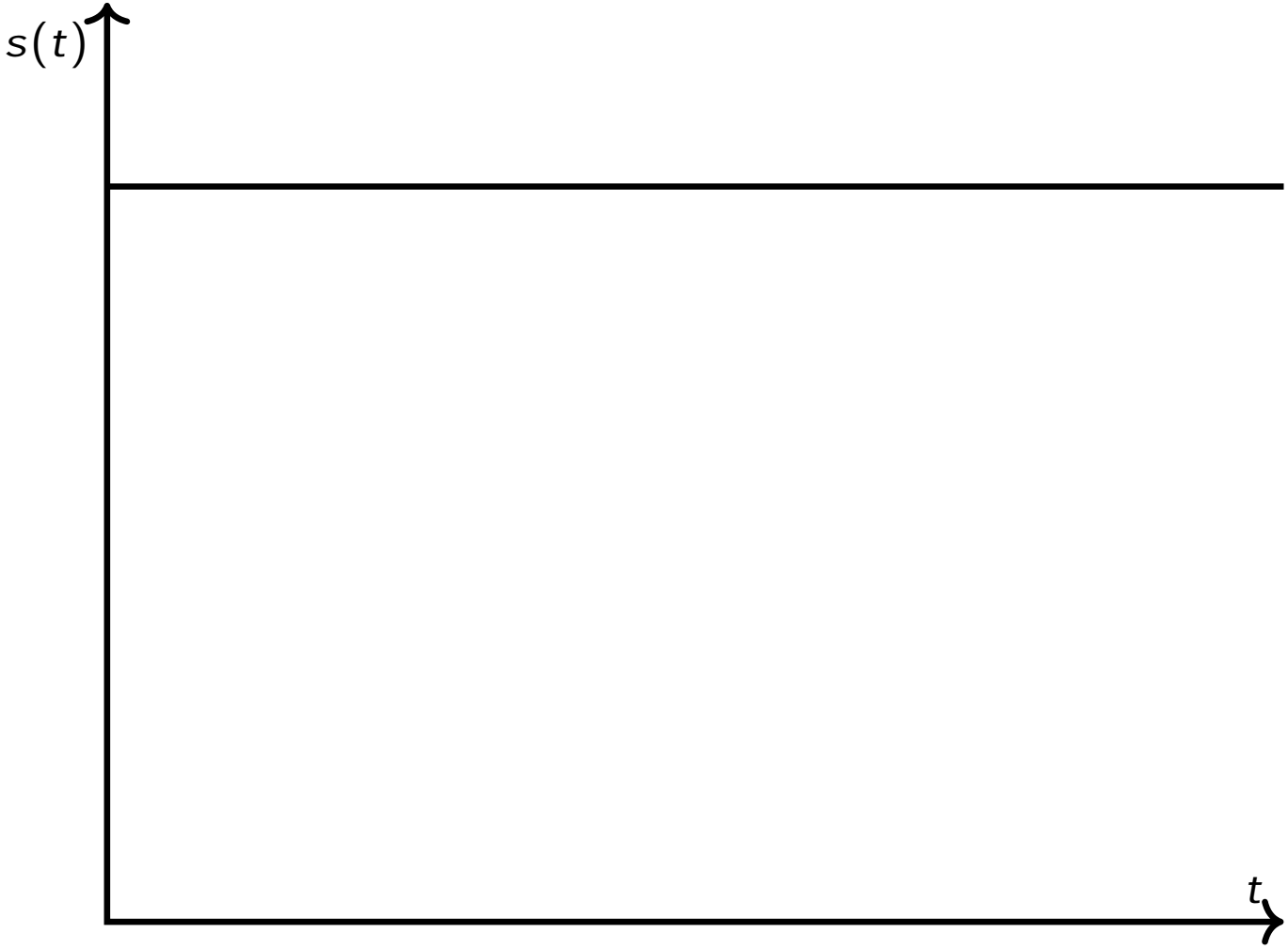


Influence de la constante de temps τ sur la réponse indicielle

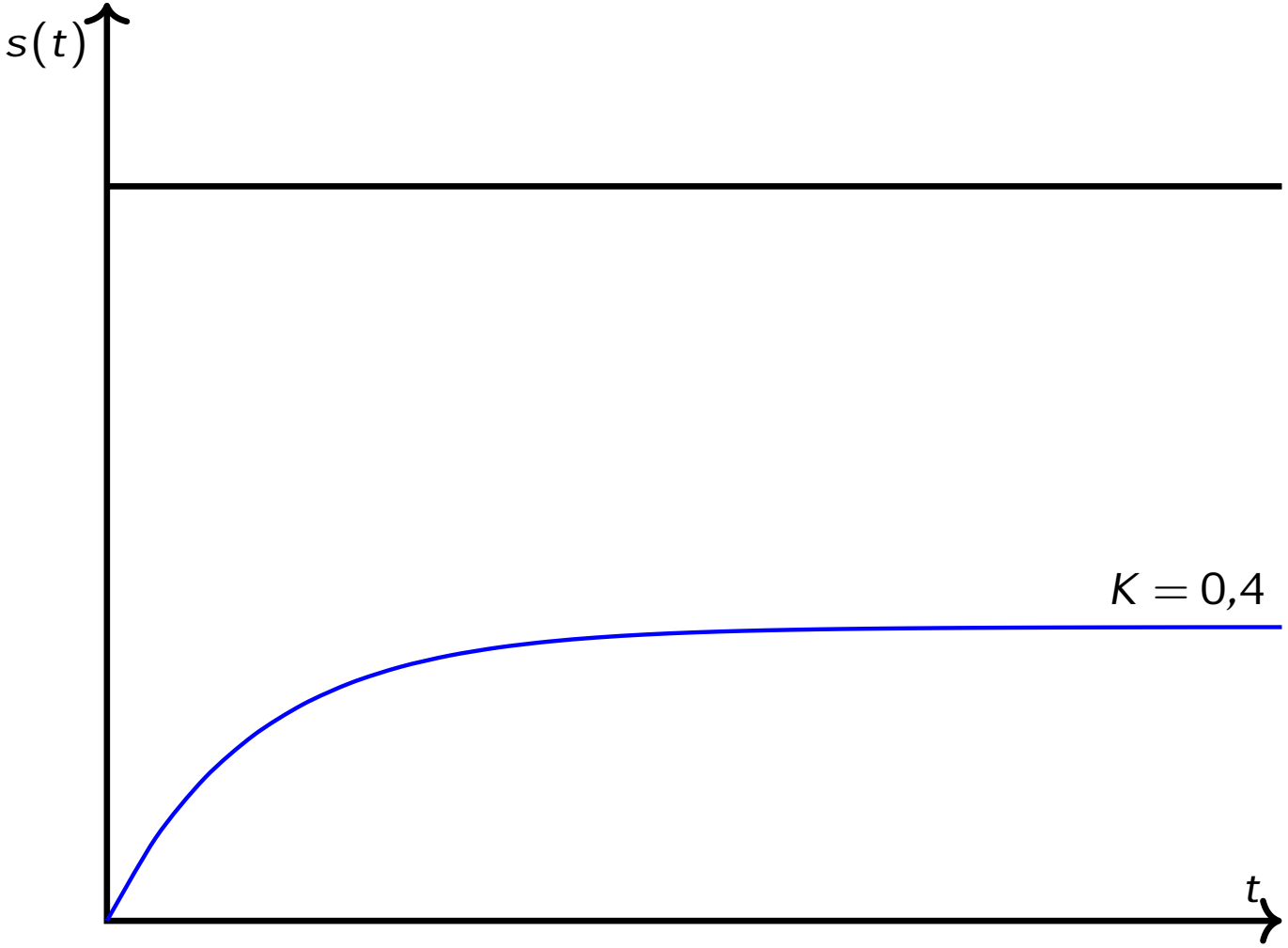


Rappel on appelle réponse indicielle la réponse à un échelon unitaire.

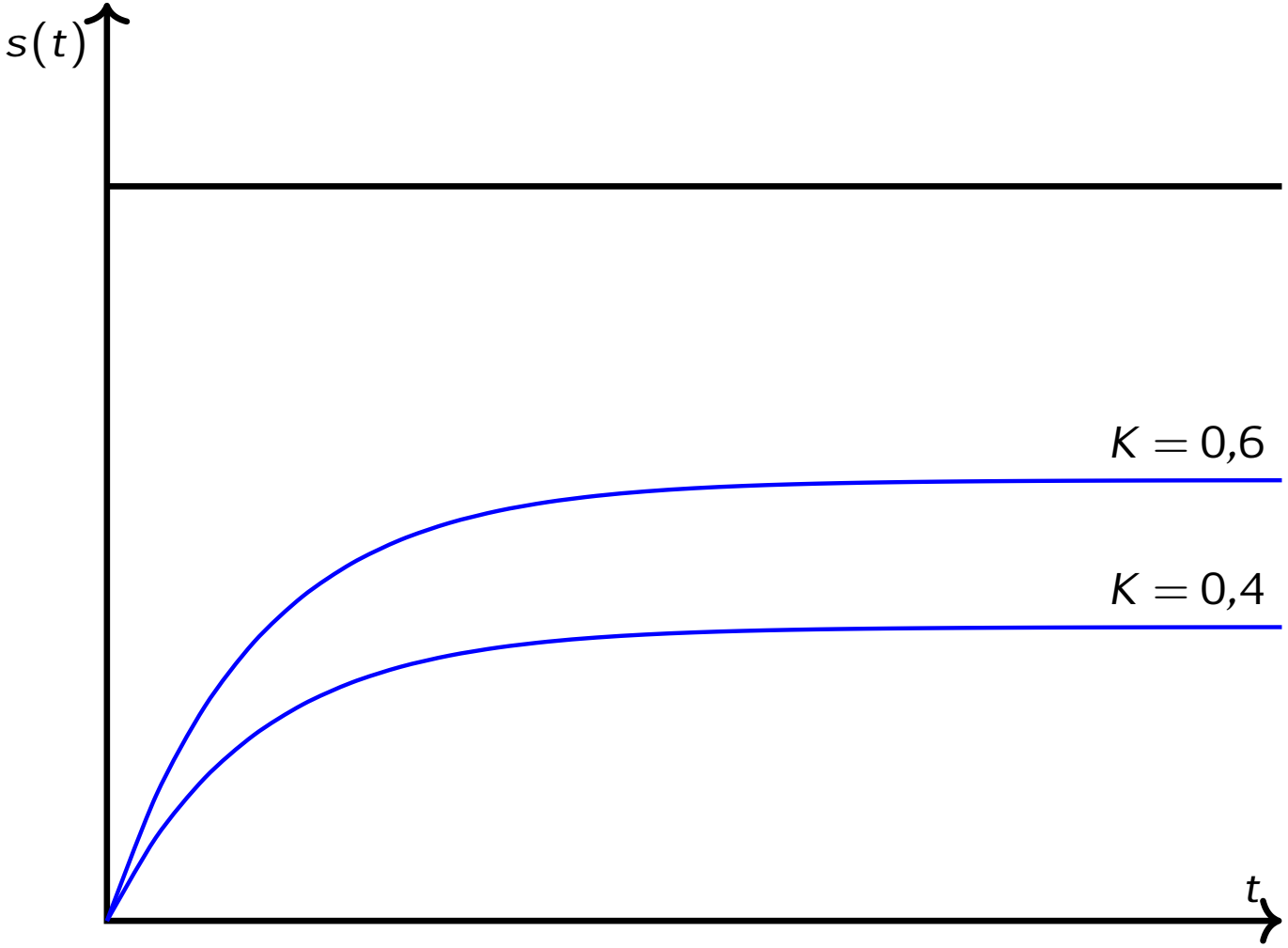
Influence du gain K sur la réponse indicielle



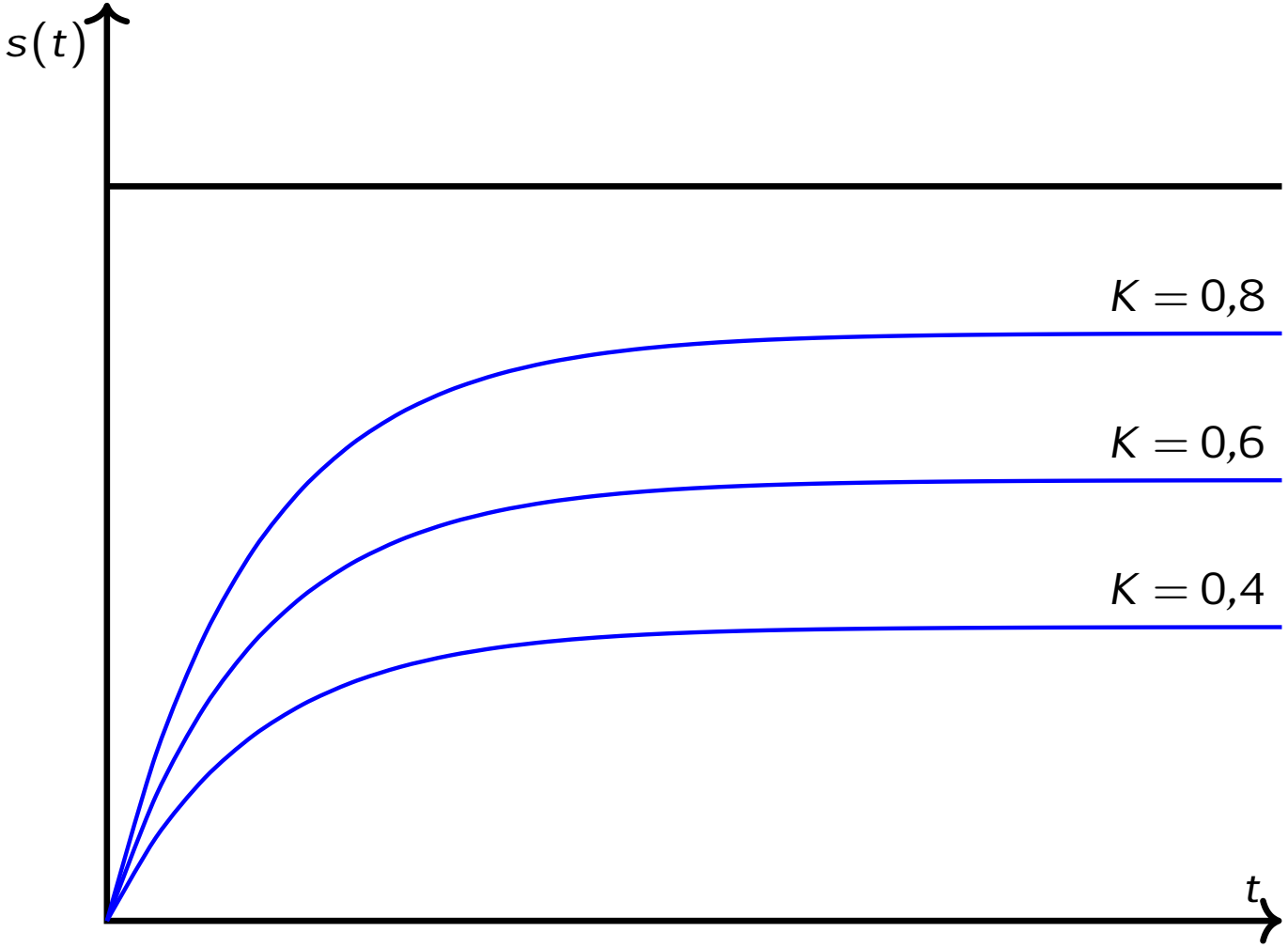
Influence du gain K sur la réponse indicielle



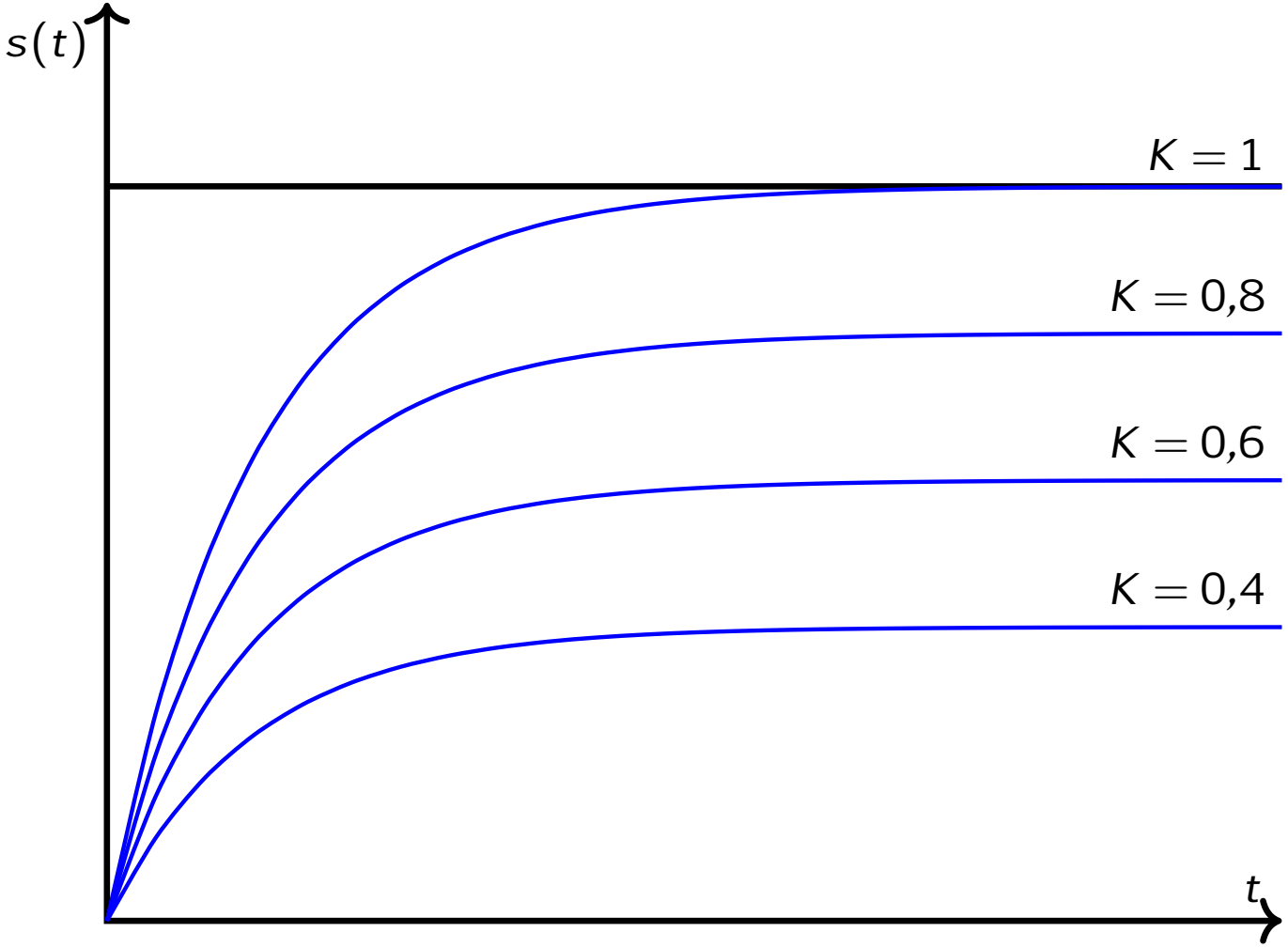
Influence du gain K sur la réponse indicielle



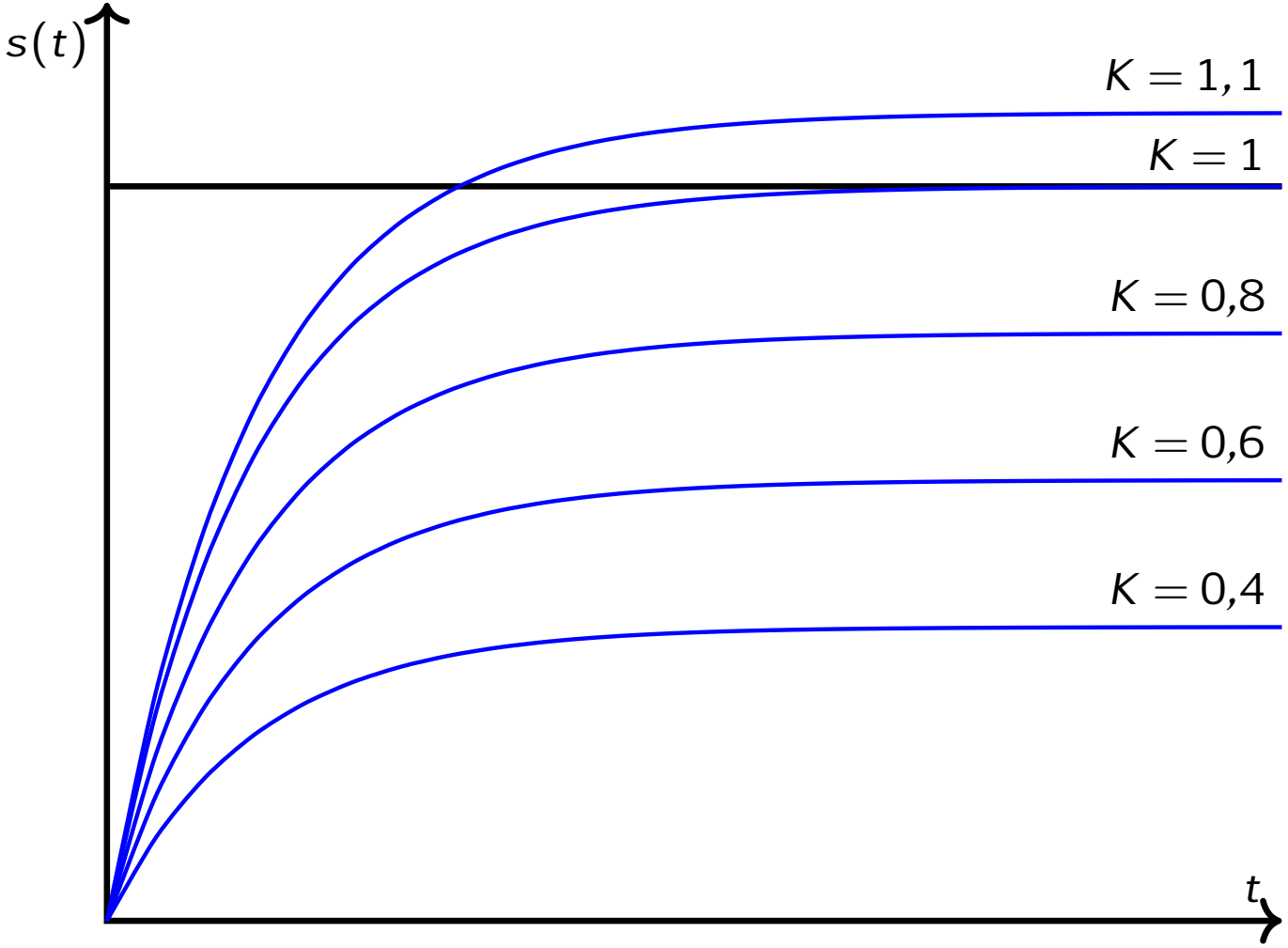
Influence du gain K sur la réponse indicielle



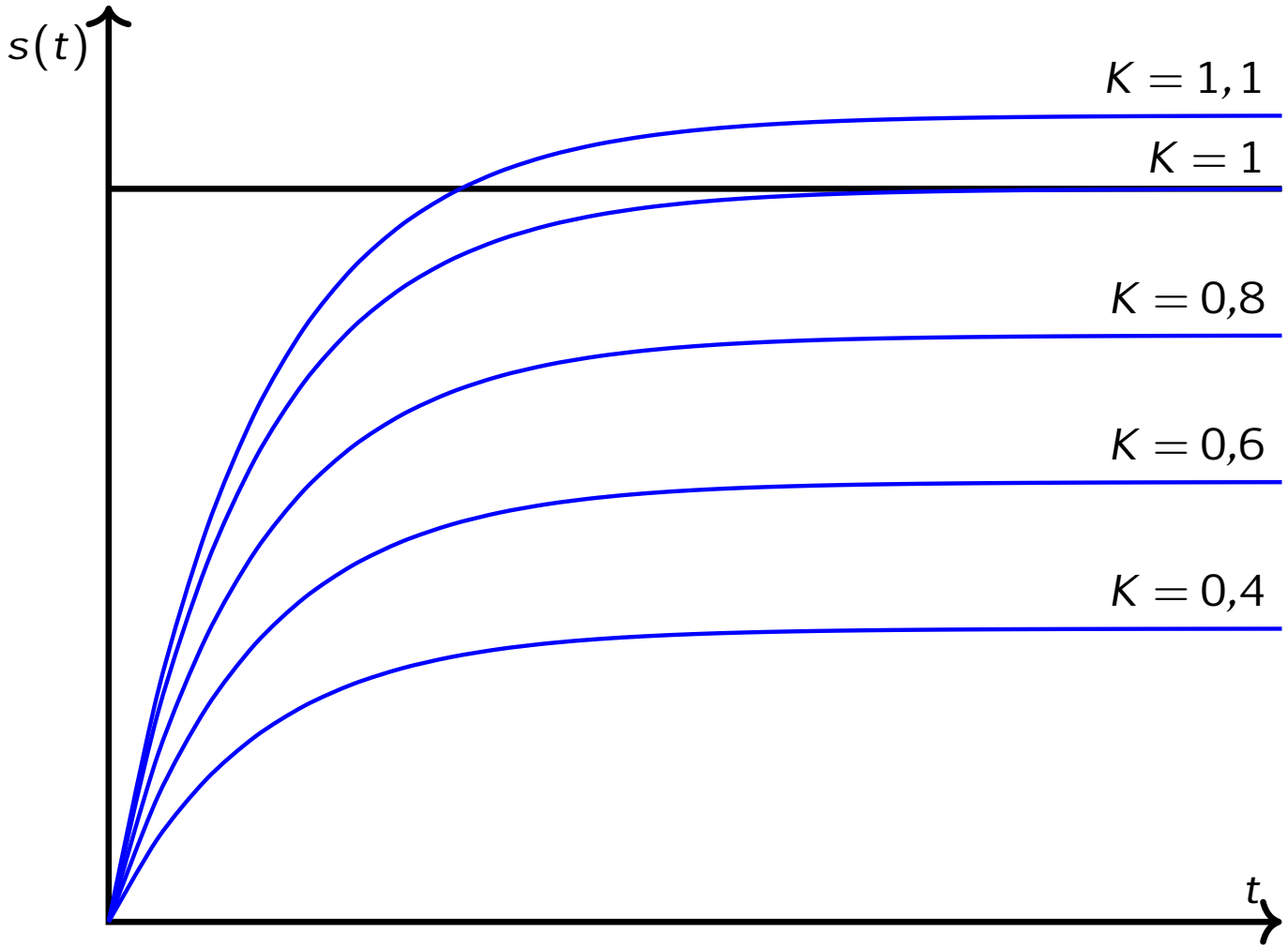
Influence du gain K sur la réponse indicielle



Influence du gain K sur la réponse indicielle



Influence du gain K sur la réponse indicielle



Une augmentation de la constante de temps diminue la rapidité du système (temps de réponse à 5% obtenue pour $t = 3.\tau$). Une augmentation de K agit comme une augmentation de la consigne.

Réponse à une rampe

Rappel on appelle réponse à une rampe de pente V_0 (ou réponse en vitesse), la réponse d'un système à une sollicitation croissant de façon proportionnelle au temps : $e(t) = V_0.t.u(t)$.

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau.p}.\frac{V_0}{p^2} = K.V_0.\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p}\right)$$

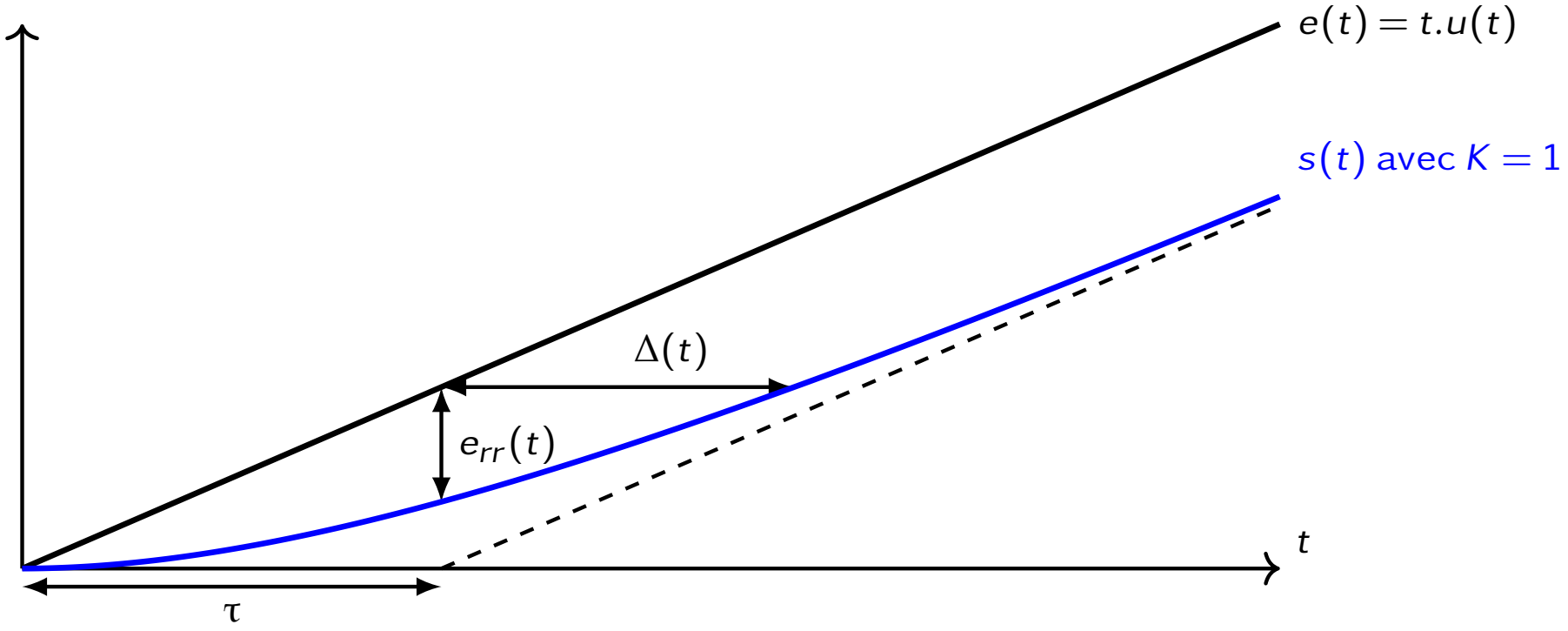
Réponse à une rampe

Rappel on appelle réponse à une rampe de pente V_0 (ou réponse en vitesse), la réponse d'un système à une sollicitation croissant de façon proportionnelle au temps : $e(t) = V_0.t.u(t)$.

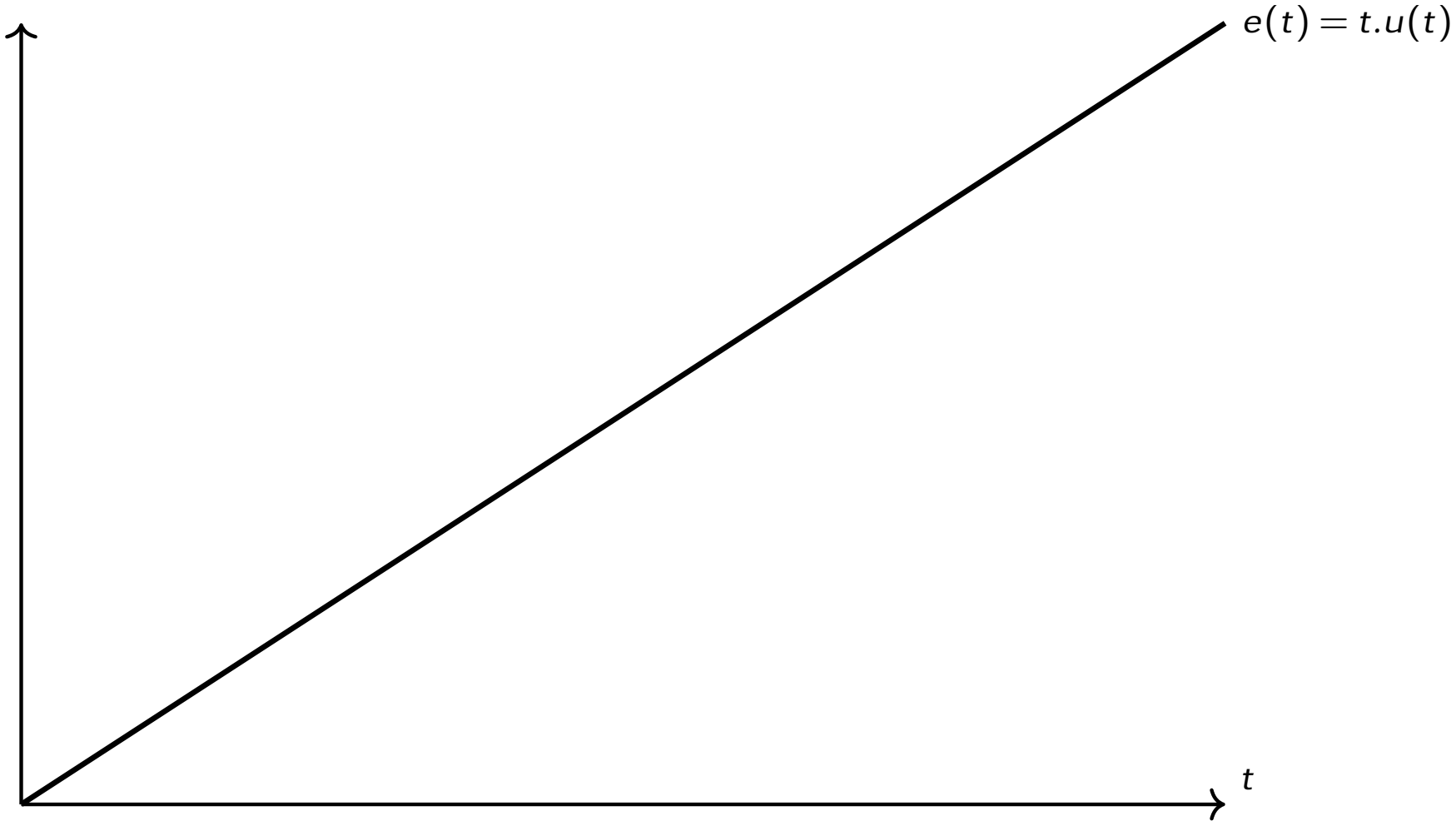
$$\begin{aligned} S(p) &= H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau.p}.\frac{V_0}{p^2} = K.V_0.\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p}\right) \\ \Rightarrow \quad s(t) &= K.V_0.\left(t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

- On appelle erreur en traînage (ou en poursuite ou en vitesse) $e_{rr}(t)$
- On appelle retard en traînage $\Delta(t)$
- s va rejoindre l'asymptote d'équation $y = K.V_0.(t - \tau)$.
  - On trouve τ à son intersection avec l'axe des abscisses.
  - Si $K = 1$ l'asymptote est parallèle à l'évolution de la consigne.

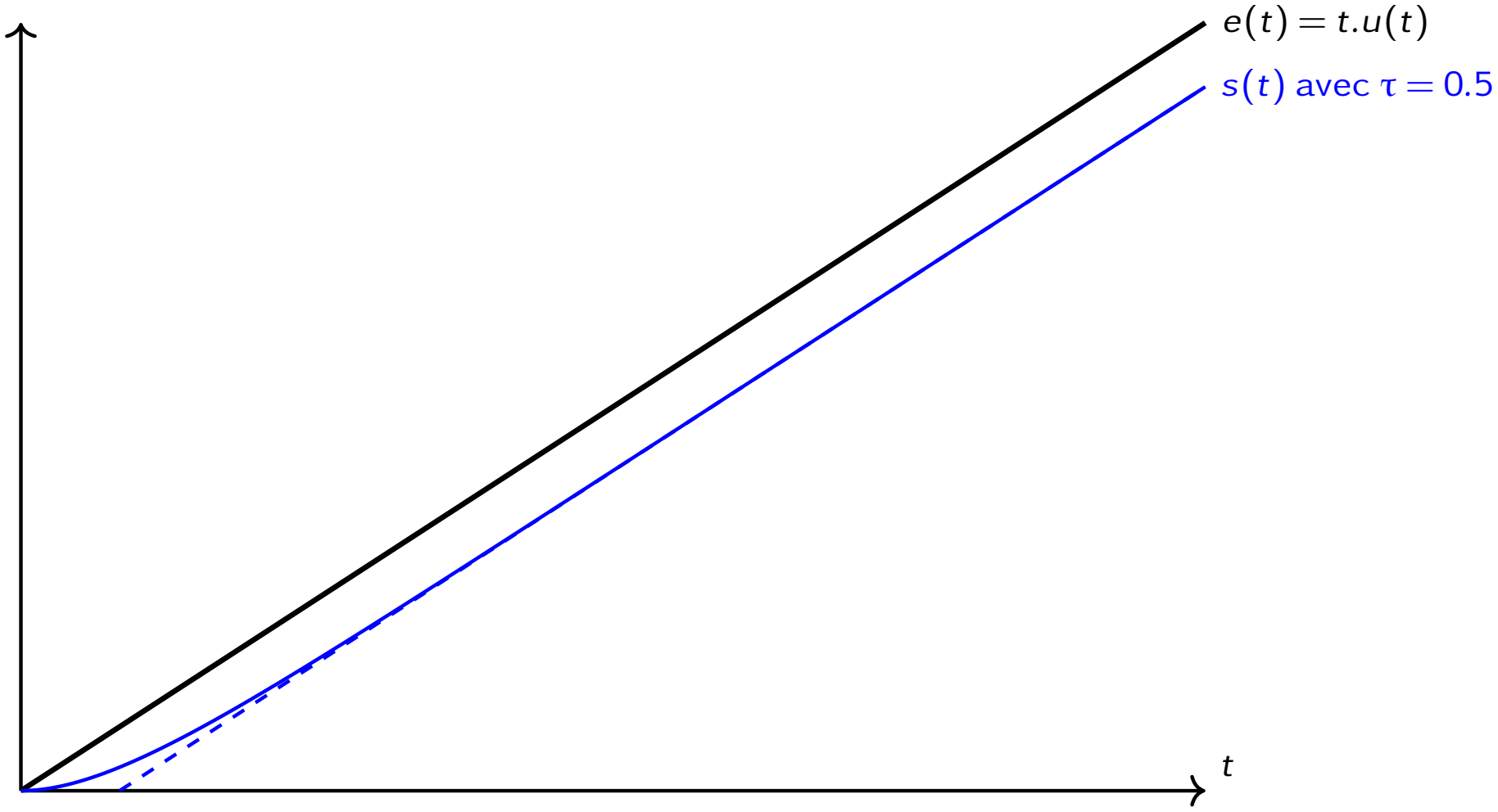
Réponse à une rampe



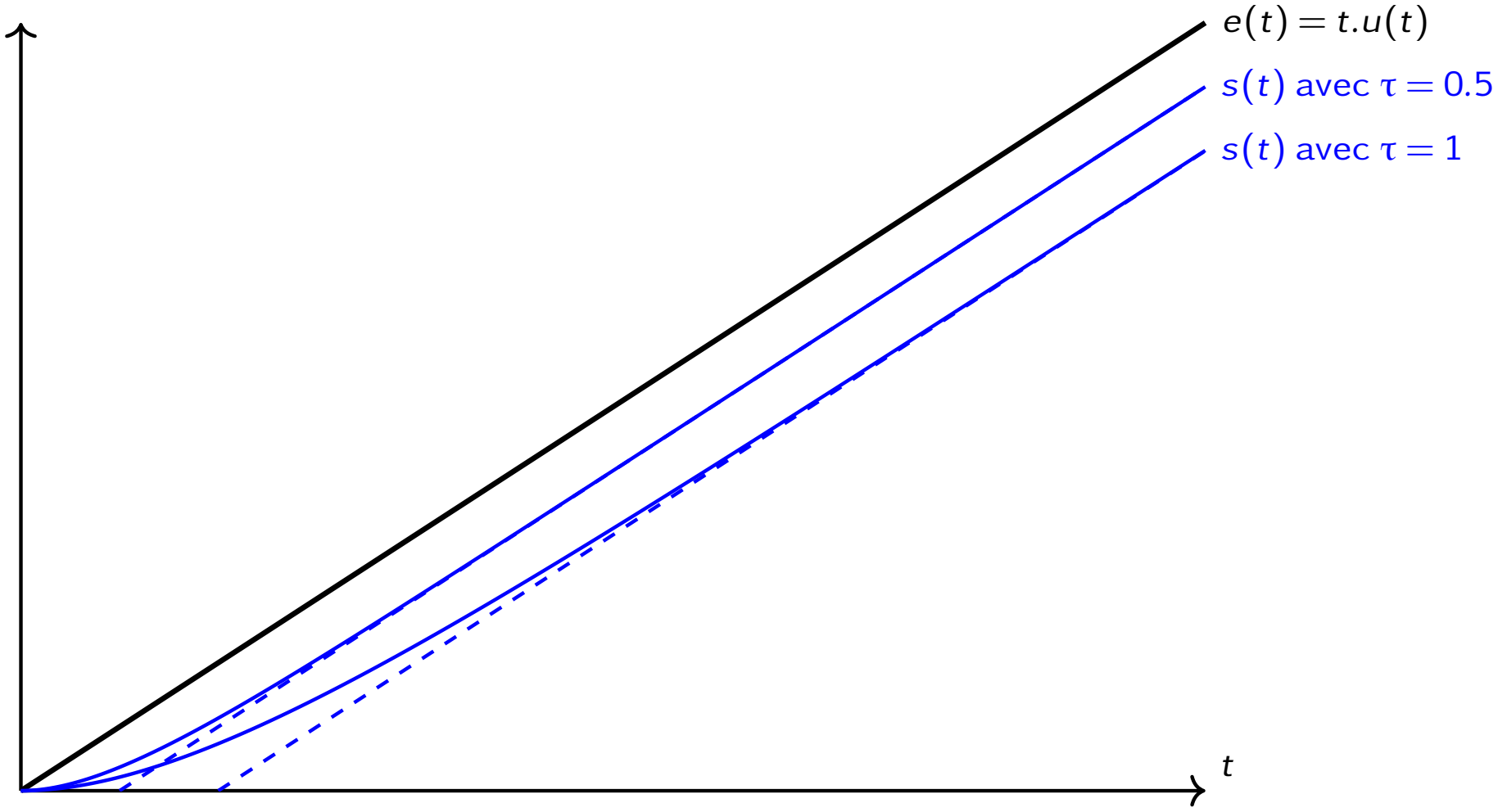
Influence de τ ($K = 1$)



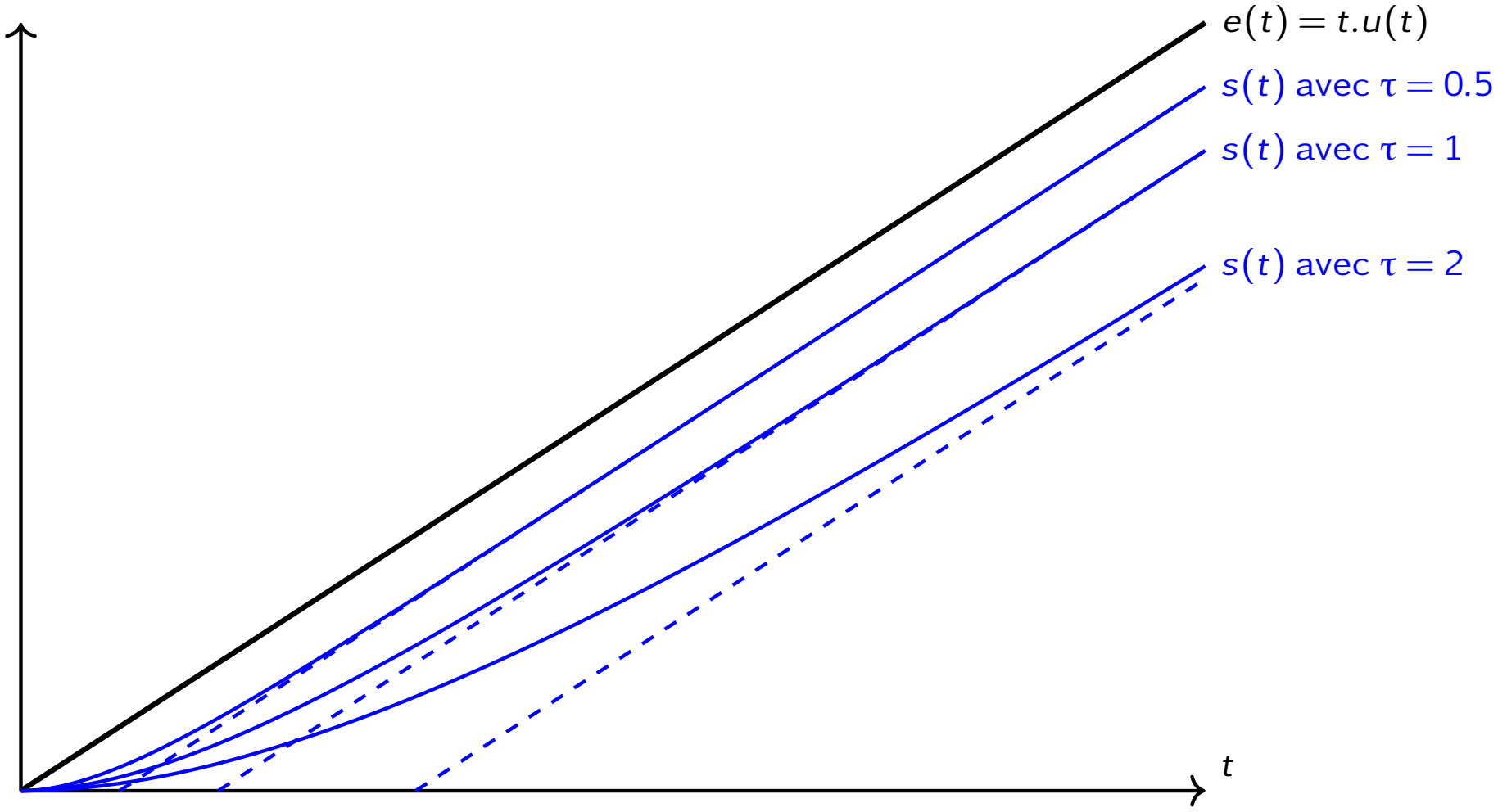
Influence de τ ($K = 1$)



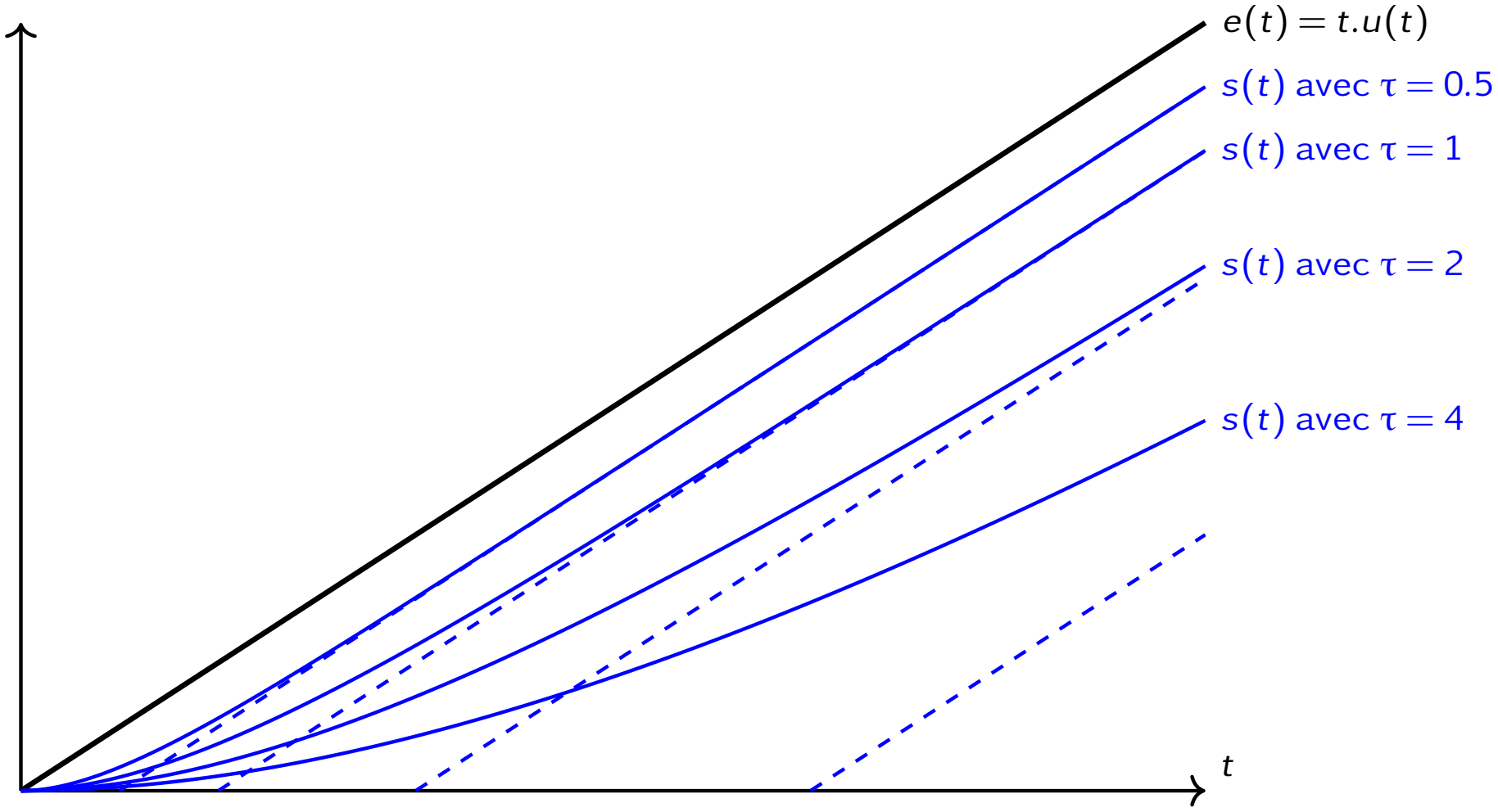
Influence de τ ($K = 1$)



Influence de τ ($K = 1$)



Influence de τ ($K = 1$)



Sommaire

1. Gain pur
2. Système du premier ordre
3. Système du deuxième ordre
   - Définition
   - Réponse indicielle
   - Caractéristique du régime pseudo périodique
   - Influence des paramètres caractéristiques
   - Compléments concernant le régime apériodique
4. Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques

Définition

Définition : Système du second ordre

On appelle système du second ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ un système régi par une équation différentielle de type :

$$\boxed{a_2.\frac{d^2s}{dt^2} + a_1.\frac{ds}{dt} + a_0.s(t) = b_0.e(t)}$$

Les systèmes du second ordre sont généralement caractérisés à partir des coefficients :

Le gain statique : K

$$\boxed{K = \frac{b_0}{a_0}}$$

La pulsation propre du système non amorti : ω_0

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}}$$

Le facteur d'amortissement : ξ

$$\boxed{\xi = \frac{a_1}{2.\sqrt{a_0.a_2}}}$$

Expression

Dans les systèmes réels à dissipation d'énergie $\xi \geq 0$.

La fonction de transfert $H(p) = S(p)/E(p)$ devient avec les conditions d'Heaviside $(s(0^-) = e(0^-) = 0)$:

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2.\xi}{\omega_0}.\frac{ds}{dt} + s(t) = K.e(t)}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\text{ou encore } H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2}$$

Expression

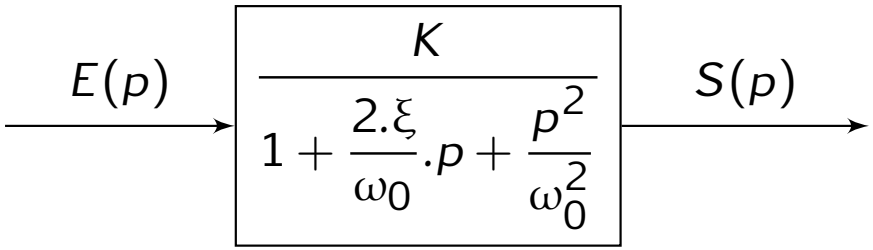
Dans les systèmes réels à dissipation d'énergie $\xi \geq 0$.

La fonction de transfert $H(p) = S(p)/E(p)$ devient avec les conditions d'Heaviside $(s(0^-) = e(0^-) = 0)$:

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2.\xi}{\omega_0}.\frac{ds}{dt} + s(t) = K.e(t)}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\text{ou encore } H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2}$$



Régime permanent

Étude de régime établi.

$$\left.\begin{array}{l} e(t) = E_0.u(t) \\ S(p) = H(p).E(p) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} . \frac{E_0}{p}$$

En appliquant le théorème de la valeur initiale et celui de la valeur finale, il vient:

$$\begin{aligned} s(0^+) &= \lim_{p \mapsto +\infty} p.S(p) = 0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{(0^+)} &= \lim_{p \mapsto +\infty} p.(p.S(p) - s(0^+)) = 0 \\ \lim_{t \to \infty} s(t) &= \lim_{p \mapsto 0} p.S(p) = K.E_0 \end{aligned}$$

Remarques

- Le régime établi ne dépend que de $K.E_0$ donc du gain statique. En revanche, ξ et ω_0 n'influence pas le régime définitif.
- La tangente à l'origine est de pente nulle (c'est lié aux conditions d'Heaviside)

Régime transitoire

Le calcul du régime transitoire impose de décomposer $S(p)$ en fractions rationnelles. Il convient donc de connaître les pôles de la fonction de transfert. L'équation caractéristique est alors définie par :

$$\boxed{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = (2.\xi.\omega_0)^2 - 4.\omega_0^2 = 4.\omega^2.\left(\xi^2 - 1\right)}$$

En fonction des valeurs du coefficient d'amortissement ξ, on distingue 3 cas :

- ⋆ Régime pseudo périodique $\xi < 1$
- ⋆ Régime apériodique critique $\xi = 1$
- ⋆ Régime apériodique $\xi > 1$

Régime transitoire

Régime apériodique $\xi > 1$

L'équation caractéristique présente deux racines réelles p_1 et p_2:

$$\boxed{p_1 = -\xi.\omega_0 - \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad p_2 = -\xi.\omega_0 + \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

On introduit alors les valeurs τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 = -p_1^{-1}$ et $\tau_2 = -p_2^{-1}$ qui conduisent ainsi à l'expression de $S(p)$ suivante :

$$S(p) = \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{E_0}{p}$$

Régime transitoire

Régime apériodique $\xi > 1$

$$
\begin{aligned}
S(p) &= \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{E_0}{p} = \frac{K\omega_0^2}{p_1.p_2.(-p.\tau_1-1)(-p.\tau_2-1)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2.\left(\xi^2-(\xi^2-1)\right)(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p}
\end{aligned}
$$

Régime transitoire

Régime apériodique $\xi > 1$

$$
\begin{aligned}
S(p) &= \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{E_0}{p} = \frac{K\omega_0^2}{p_1.p_2.(-p.\tau_1-1)(-p.\tau_2-1)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2.\left(\xi^2-(\xi^2-1)\right)(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\
&= K.E_0.\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_2}}\right)
\end{aligned}
$$

Régime transitoire

Régime apériodique $\xi > 1$

$$
\begin{aligned}
S(p) &= \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.\frac{E_0}{p} = \frac{K\omega_0^2}{p_1.p_2.(-p.\tau_1-1)(-p.\tau_2-1)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2.\left(\xi^2-(\xi^2-1)\right)(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\
&= \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}.\frac{E_0}{p} \\
&= K.E_0.\left(\frac{1}{p}+\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_1}}-\frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_2}}\right) \\
\Rightarrow & \boxed{s(t) = K.E_0.\left(1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}.\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1}-\tau_2.e^{-t/\tau_2}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

Régime transitoire

Régime apériodique critique $\xi = 1$

L'équation caractéristique présente une racine double $p_0 = -\omega_0$. Posons $\tau = \omega_0^{-1}$

$$\boxed{S(p) = \frac{1}{p}.\frac{K.E_0}{(1+\tau.p)^2} \qquad \Rightarrow \qquad s(t) = K.E_0.\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right).e^{-t/\tau}\right]}$$

Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

L'équation caractéristique présente deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$:

Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

L'équation caractéristique présente deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$:

$$\boxed{z = -\xi.\omega_0 \pm j.\underbrace{\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)}_{\omega_p}}$$

Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

L'équation caractéristique présente deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$:

$$\boxed{z = -\xi.\omega_0 \pm j.\underbrace{\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)}_{\omega_p}}$$

Pour éviter toutes confusions avec l'intensité, j est la variable complexe $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et non la racine troisième de l'unité $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On note $\omega_p = \omega_0.\sqrt{1-\xi^2}$ la pulsation propre du système.

Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

$$
\begin{aligned}
S(p) &= \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p-z)(p-\bar{z})} \\
&= \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{\left[(p+\xi.\omega_0)+j\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]\left[(p+\xi.\omega_0)-j\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]} \\
&= \frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} \\
&= K.\frac{E_0}{p}-\frac{K.E_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.\left(\sqrt{1-\xi^2}\frac{(p+\xi.\omega_0)}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2}+\xi.\frac{\omega_p}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2}\right)
\end{aligned}
$$

Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

$$
\begin{aligned}
s(t) &= K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\sqrt{1-\xi^2}.\cos(\omega_p t) + \xi.\sin(\omega_p t)\right)\right] \\
&= K.E_0\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_p.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

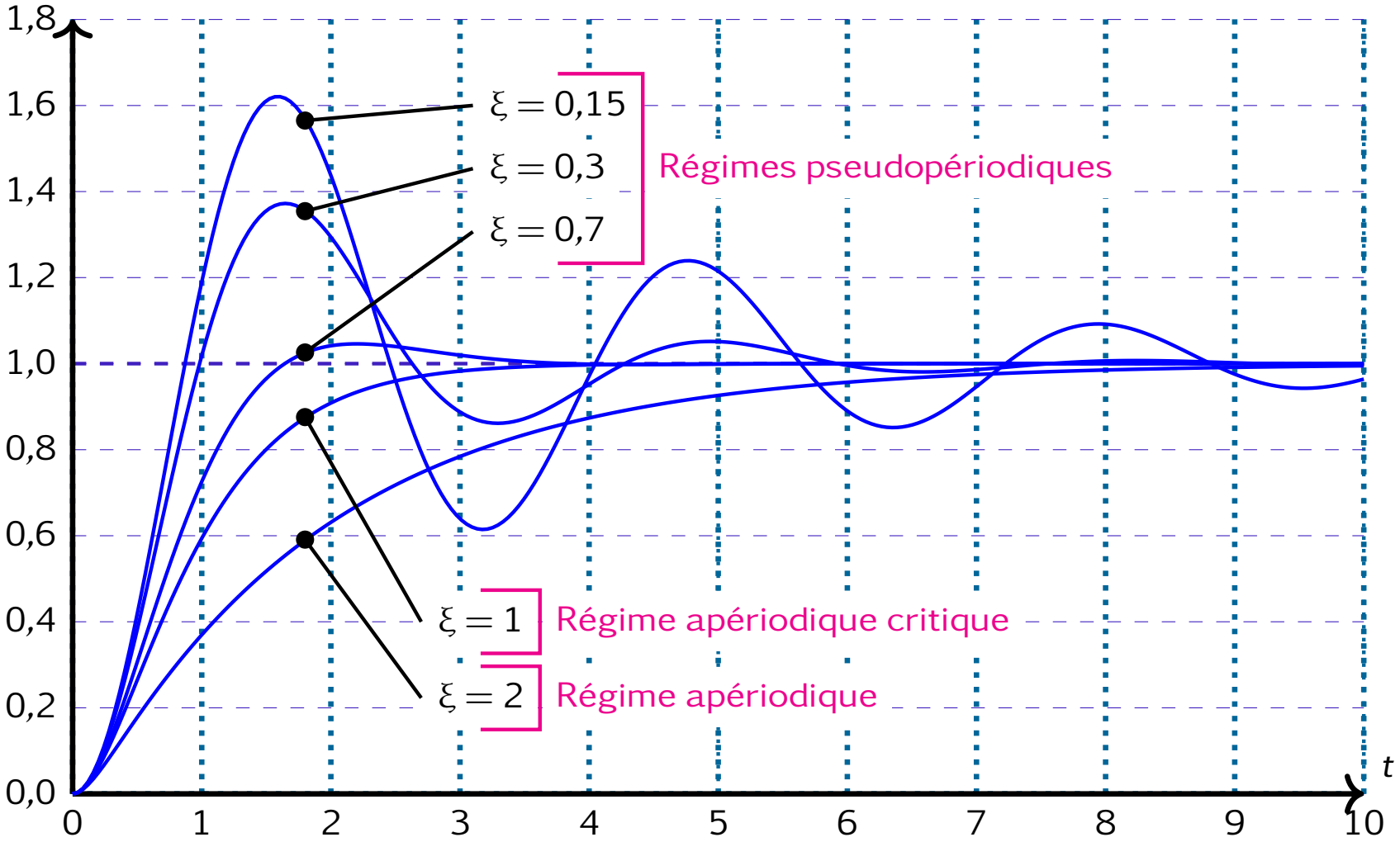
Régime transitoire

Régime pseudopériodique $\xi < 1$

$$
\begin{aligned}
s(t) &= K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\sqrt{1-\xi^2}.\cos(\omega_p t) + \xi.\sin(\omega_p t)\right)\right] \\
&= K.E_0\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_p.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{s(t) = K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]}
$$

Réponse indicielle en fonction de ξ

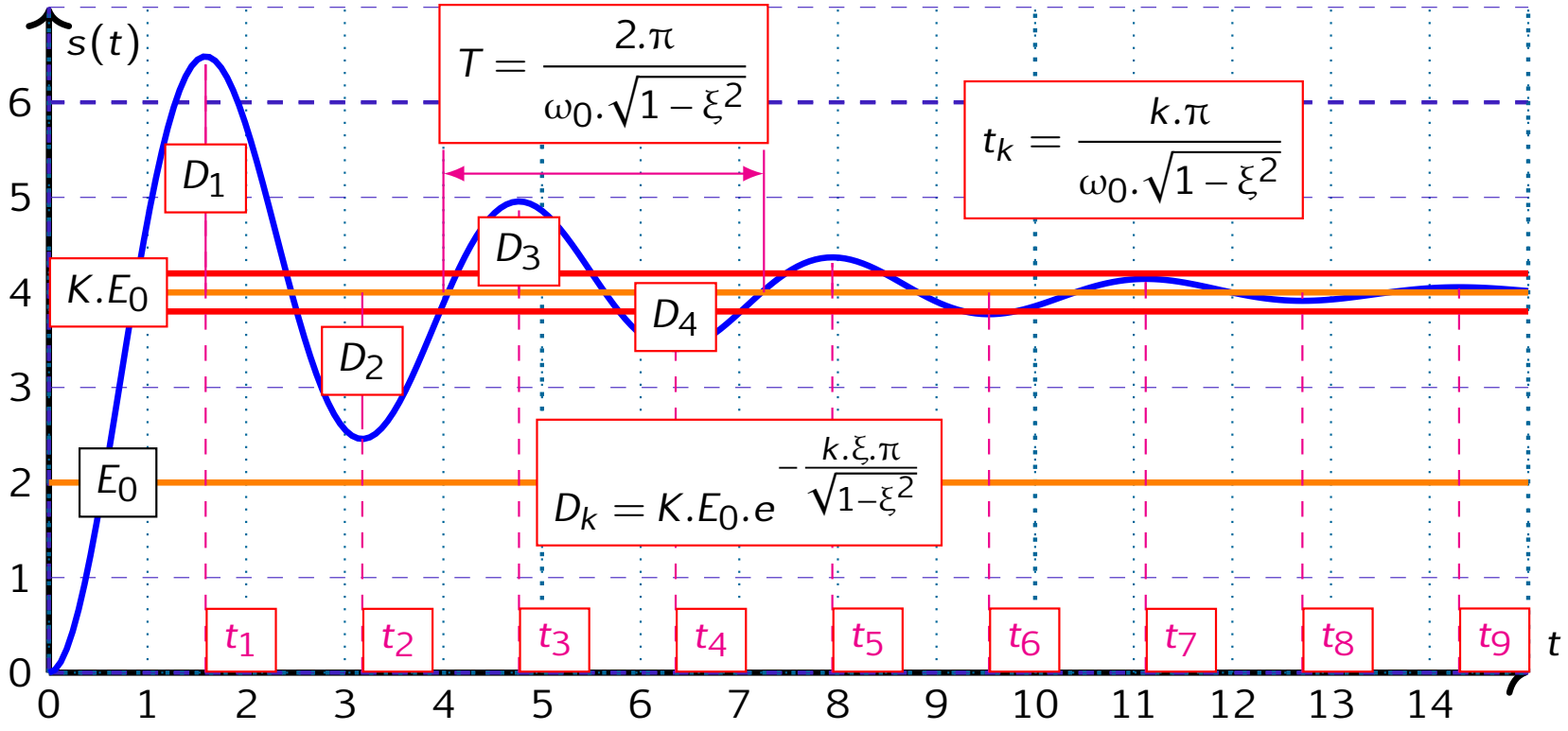


Dépassements

Les dépassements dépendent des valeurs du coefficient d'amortissement ξ

- Les réponses des systèmes du second ordre peuvent présenter des dépassements dont l'amplitude peut être comparable à celle de l'échelon lui-même.
- Le temps de réponse à 5% varie suivant la valeur du coefficient d'amortissement ξ:
  - $\xi \ll 1$: l'amortissement est faible ($\xi = 0,1$ par exemple), les oscillations sont mal amorties, le temps de réponse est grand.
  - $\xi = 0,7$: le système présente un dépassement faible de 5%, avec le temps de réponse le plus faible.
  - $\xi = 1$: le système ne présente pas de dépassement au sens mathématique. Il ne correspond pas au minimum absolu du temps de réponse mais il s'agit cependant du système sans dépassement le plus rapide.
  - $\xi \gg 1$: il n'y a pas de dépassement, mais le système est lent, donc le temps de réponse est grand.

Relation entre les amplitudes des dépassements et le coefficient d'amortissement



Un système du second ordre soumis à un échelon ne présente de dépassement que pour $\xi < 1$. Cherchons la relation entre les dates t_i des maxima et minima locaux, les amplitudes D_i des dépassements et le coefficient d'amortissement ξ.

Recherche des t_i

Pour chercher les t_i, on cherche quand la dérivée de $s(t)$ s'annule:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[s'(t)\right] &= p.S(p) - s(0) = p.\frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} - 0 = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2} \\
s'(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2}\right] \\
&= K.E_0.\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\sin(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t)
\end{aligned}$$

Recherche des t_i

Pour chercher les t_i, on cherche quand la dérivée de $s(t)$ s'annule:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[s'(t)\right] &= p.S(p) - s(0) = p.\frac{E_0}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p+\xi.\omega_0)^2+\omega_p^2} - 0 = \frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2} \\
s'(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K.E_0.\omega_0^2}{p^2+2.\xi.\omega_0.p+\omega_0^2}\right] \\
&= K.E_0.\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\sin(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t)
\end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule pour :

- $t \mapsto \infty$, ce qui correspond au régime établi
- $t = 0$, tangente horizontale en 0
- $\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t = k.\pi$.

Le $n^{\text{ième}}$ maximum D_n est atteint en :

$$\boxed{t_n = \frac{(2.n-1).\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le $m^{\text{ième}}$ minimum relatif pour $k = 2.m$ en :

$$\boxed{t_m = \frac{2.m.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Recherche des D_i

Le dépassement est donnée par $D_i = s(t_{2.i-1}) - \lim_{t \mapsto \infty} s(t)$:

$$\begin{aligned}
D_i &= K.E_0.\left[1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t_{2.i-1} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] - K.E_0 \\
&= -K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.\frac{(2.i-1).\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] \\
&= -K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left((2i-1).\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right] \\
&= K.E_0.\left[\frac{e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

or

$$\frac{\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi} = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \sin^2\phi$$

Recherche des D_i

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

Recherche des D_i

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

et comme $\sqrt{1-\xi^2} \geq 0$ et $\xi \geq 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Recherche des D_i

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

et comme $\sqrt{1-\xi^2} \geq 0$ et $\xi \geq 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ce qui implique:

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$

Recherche des D_i

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

et comme $\sqrt{1-\xi^2} \geq 0$ et $\xi \geq 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ce qui implique:

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$

Il vient alors pour D_i :

$$\boxed{D_i = K.E_0.e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}} = K.E_0.e^{-\left[(2.i-1)\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]}}$$

Recherche des D_i

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)^2} = 1-\xi^2$$

et comme $\sqrt{1-\xi^2} \geq 0$ et $\xi \geq 0$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ce qui implique:

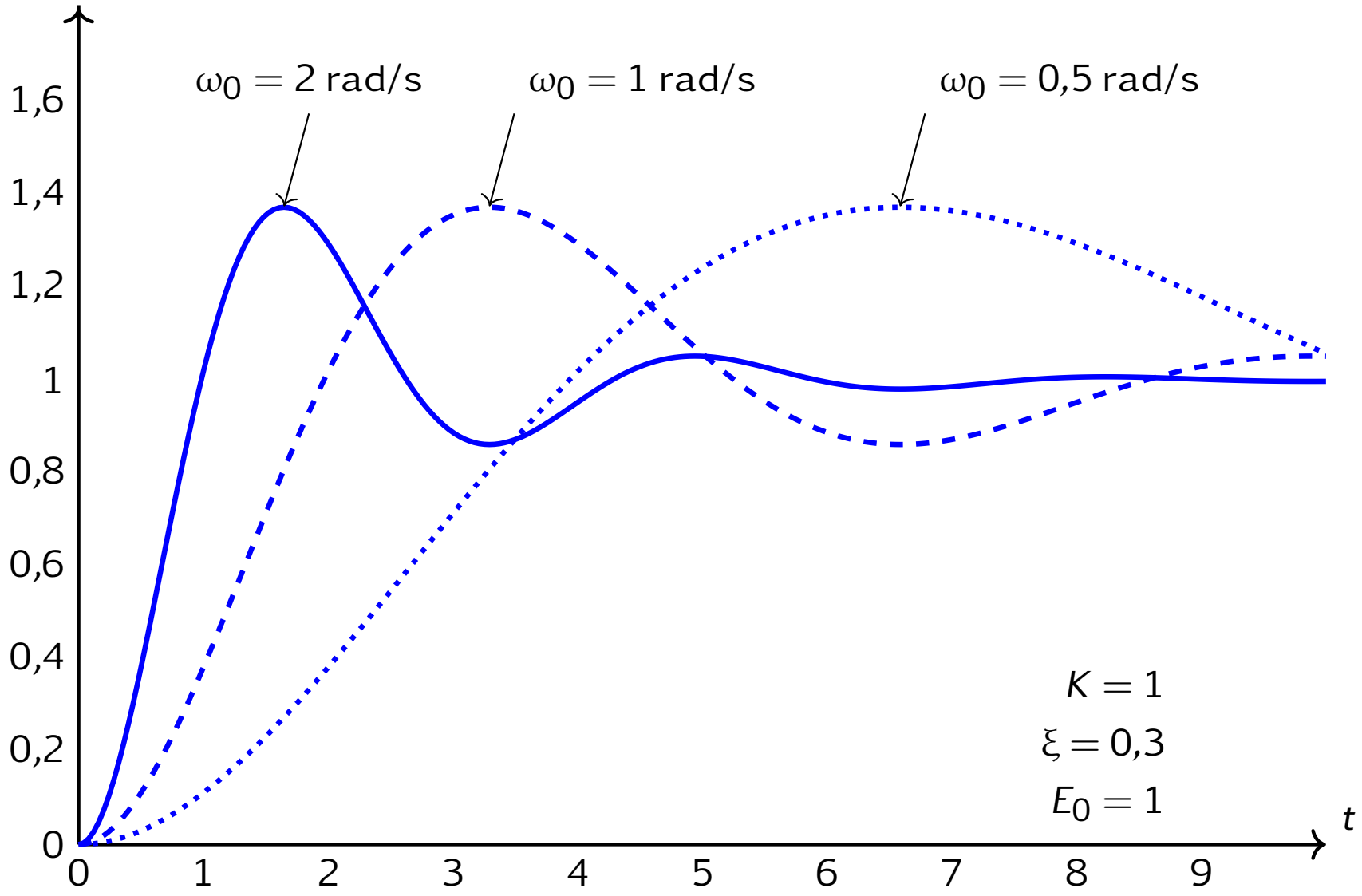
$$\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \sqrt{1-\xi^2}$$

Il vient alors pour D_i :

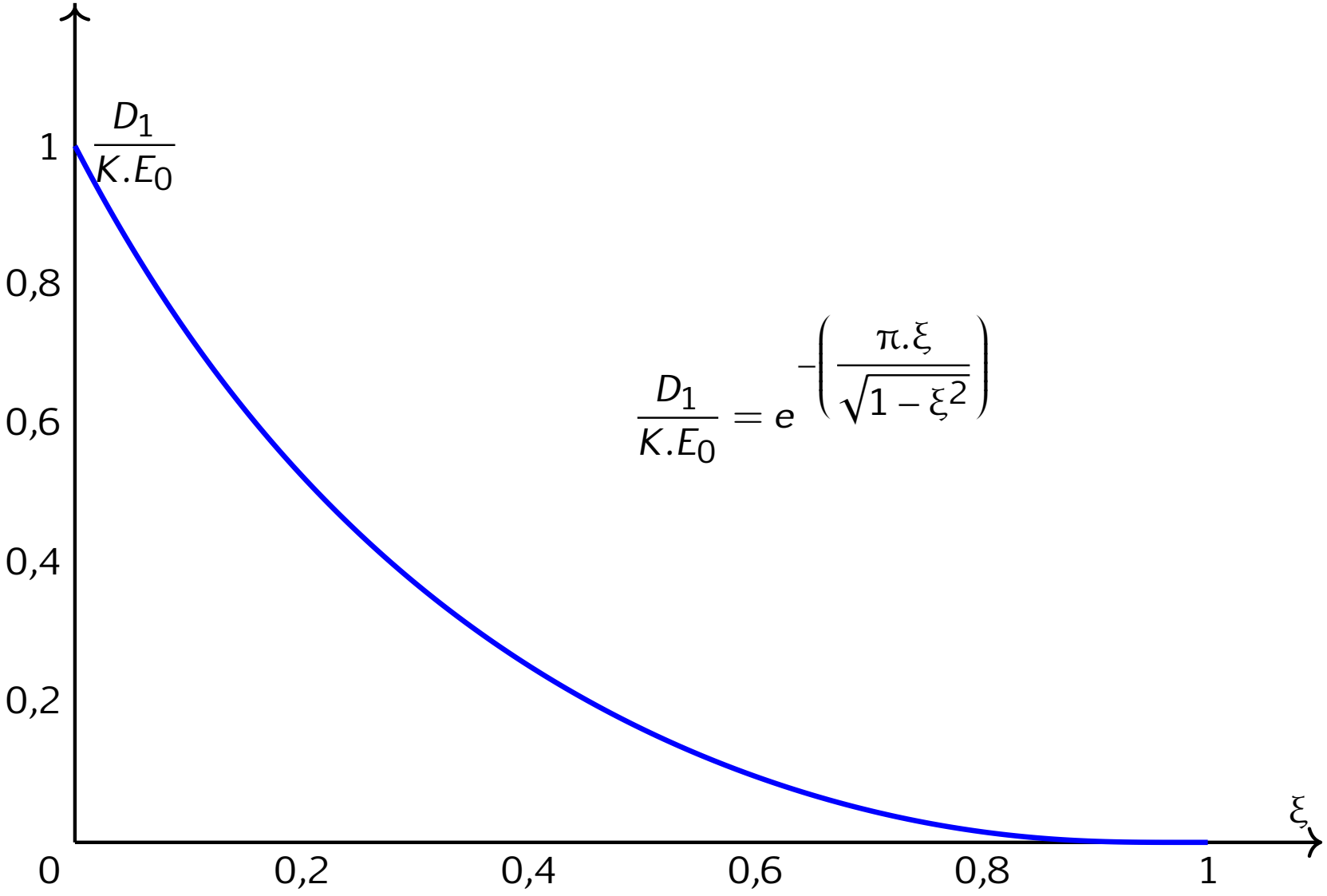
$$\boxed{D_i = K.E_0.e^{-\xi.\omega_0.t_{2.i-1}} = K.E_0.e^{-\left[(2.i-1)\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]}}$$

Remarque : La pulsation ω_0 ne modifie pas l'amplitude des dépassements

Influence de la pulsation propre



Évolution du premier dépassement en fonction de ξ



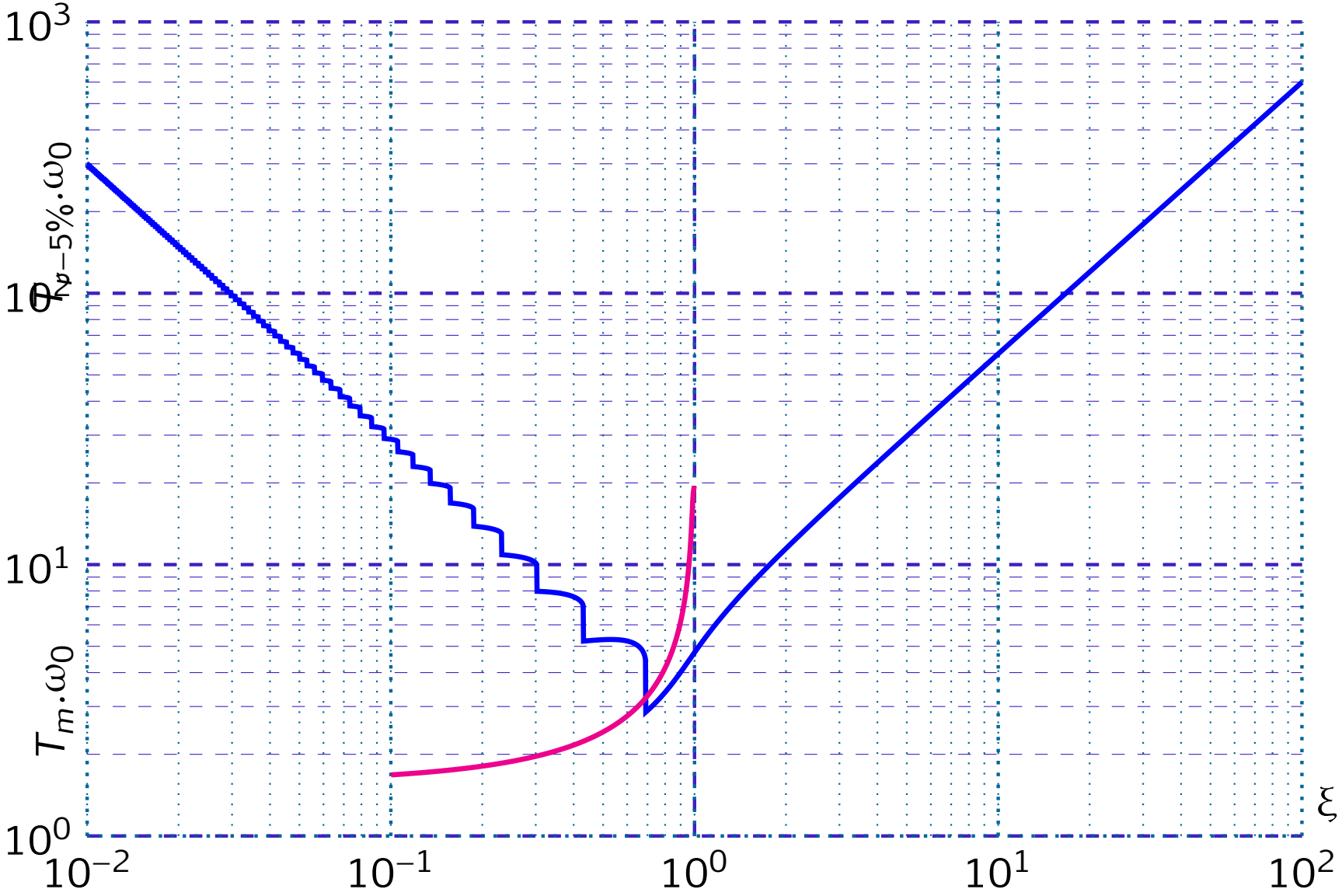
$$\frac{D_1}{K.E_0} = e^{-\left(\frac{\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

Influence des paramètres caractéristiques

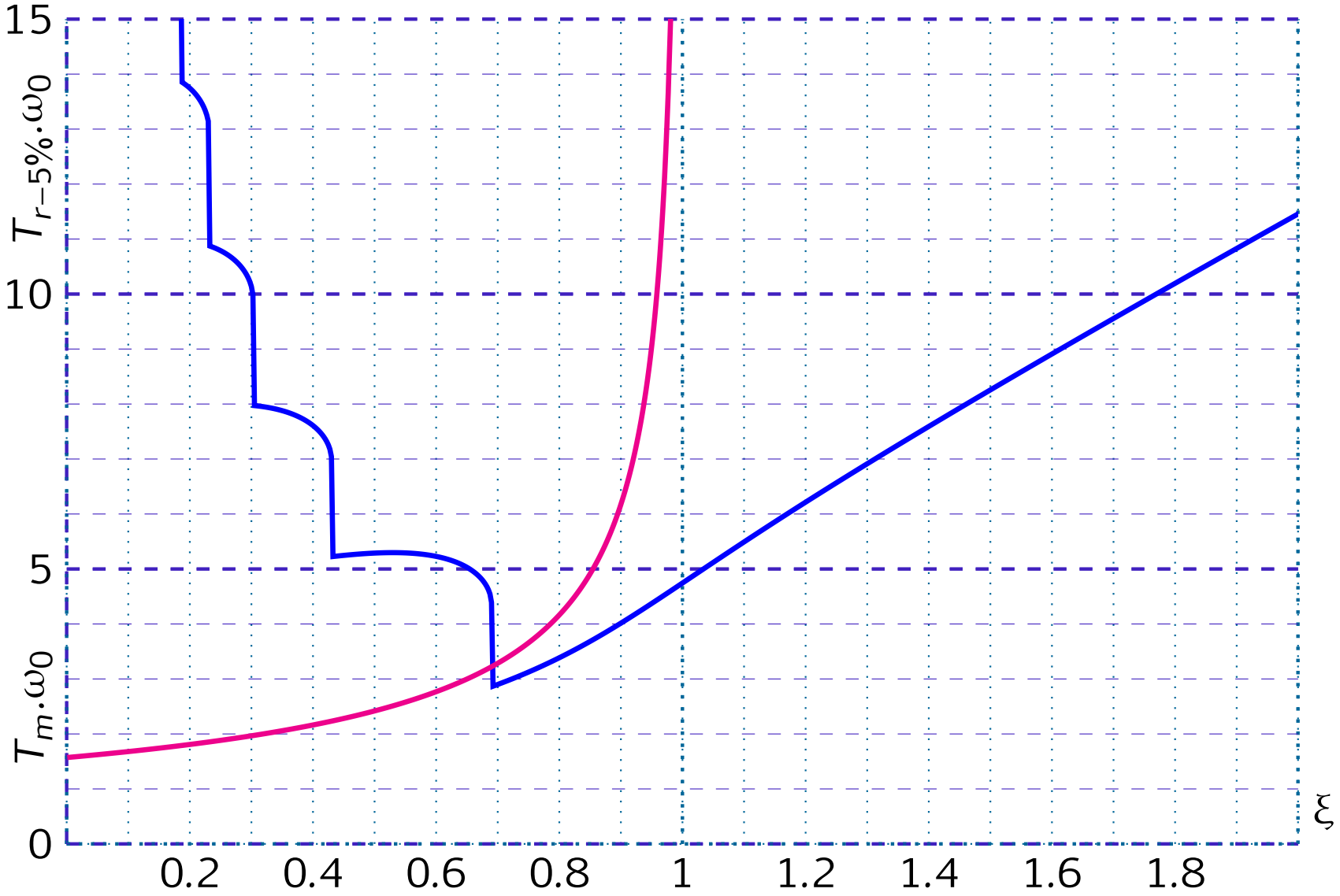
Les courbes suivante représentent les produits du temps de réponse à 5% t_r par la pulsation propre ω_0, et du temps de montée t_m par la pulsation propre ω_0, Ces produits sont tracés en fonction du coefficient d'amortissement ξ. Le temps de montée correspond au temps de la première intersection de la réponse avec l'asymptote $K.E_0$.

Le temps de réponse minimum (réponse indicielle) est atteint pour 0,7. Au delà de cette valeur, la courbe est régulière car il n'y a plus de dépassement. Les bosses de la partie gauche de la courbe sont dues aux sauts d'un extremum à un autre du temps de réponse. Le temps de montée devient infinie pour $\xi \geq 1$ puisqu'il n'y a plus de dépassement.

Temps de réponse à 5% et temps de monté



Temps de réponse à 5% et temps de monté

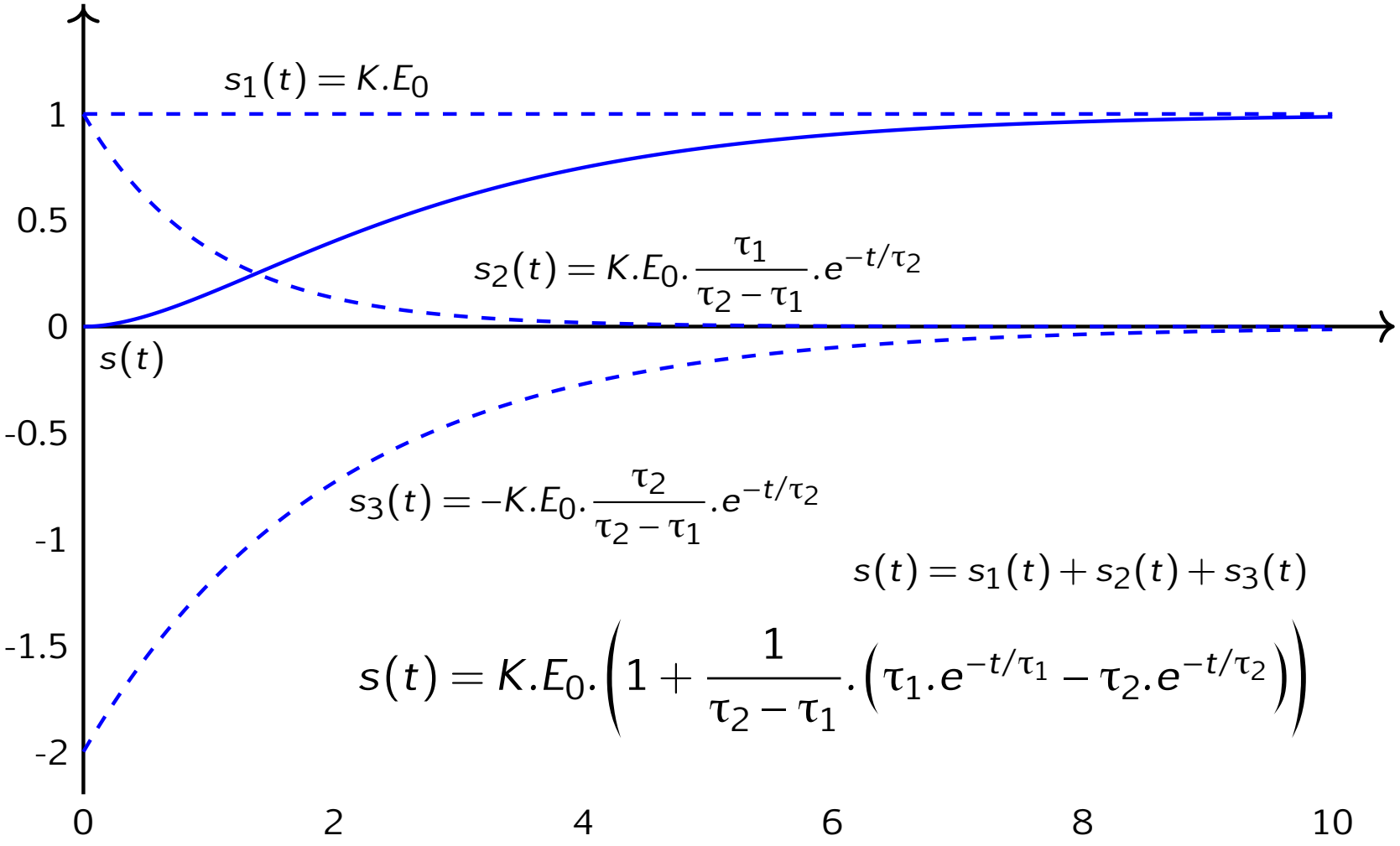


Compléments concernant le régime apériodique

La réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique ($\xi > 1$ avec deux pôles réels) est la somme d'un échelon (représentant la réponse permanente) et de deux exponentielles amorties de constantes de temps différentes (représentant la partie transitoire de la réponse). Les pentes à l'origine sont exactement opposées ce qui conduit à une tangente horizontale pour la somme.

Lorsque un système du second ordre en régime amorti présente deux pôles réels p_1 et p_2 très différents ($|p_2| \ll |p_1|$), le pôle p_2 de norme la plus petite (donc la constante de temps τ_2 est la plus grande) est dit dominant. Le système peut être assimilé à un premier ordre, éventuellement retardé de la valeur de la constante de temps τ_1.

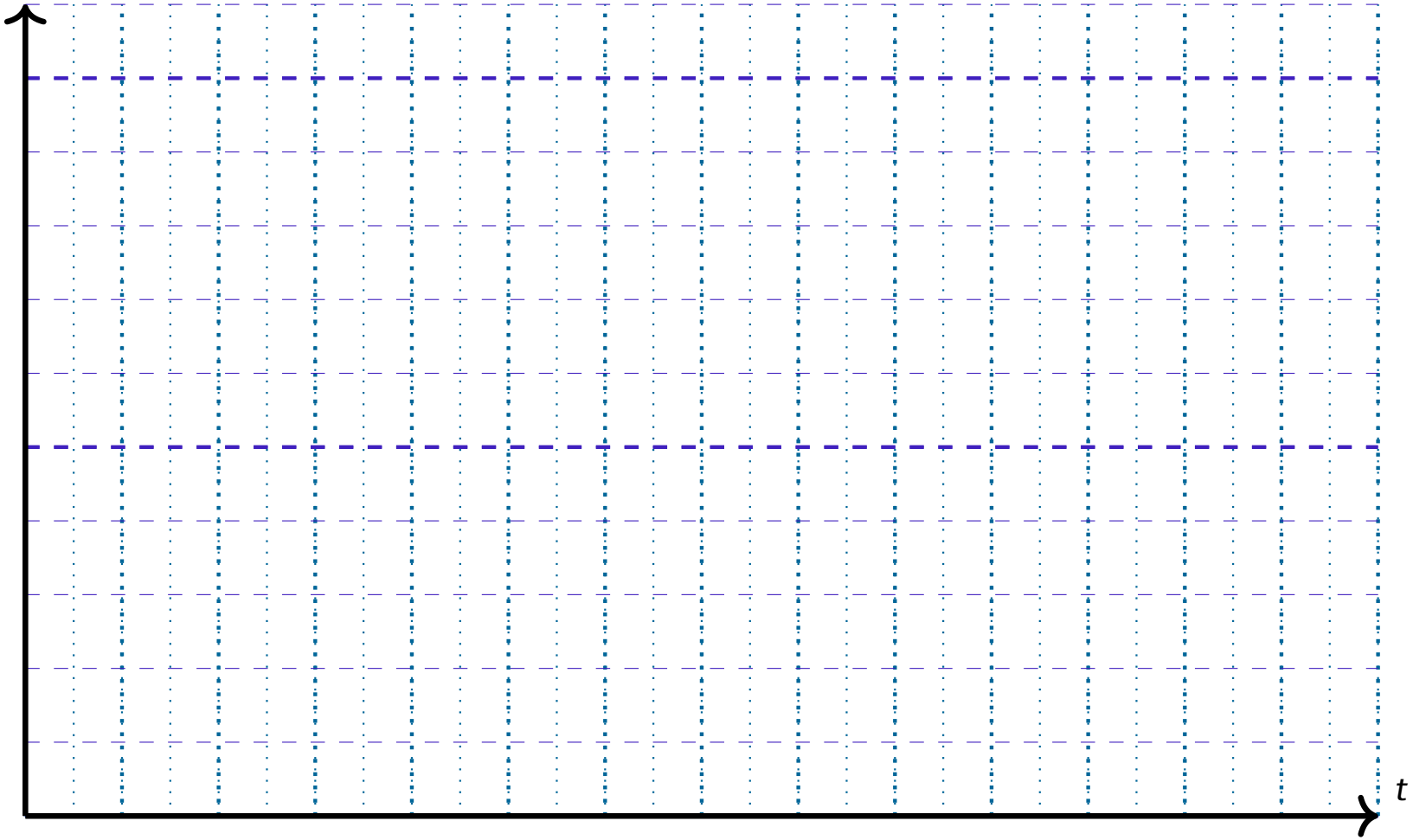
Compléments concernant le régime apériodique



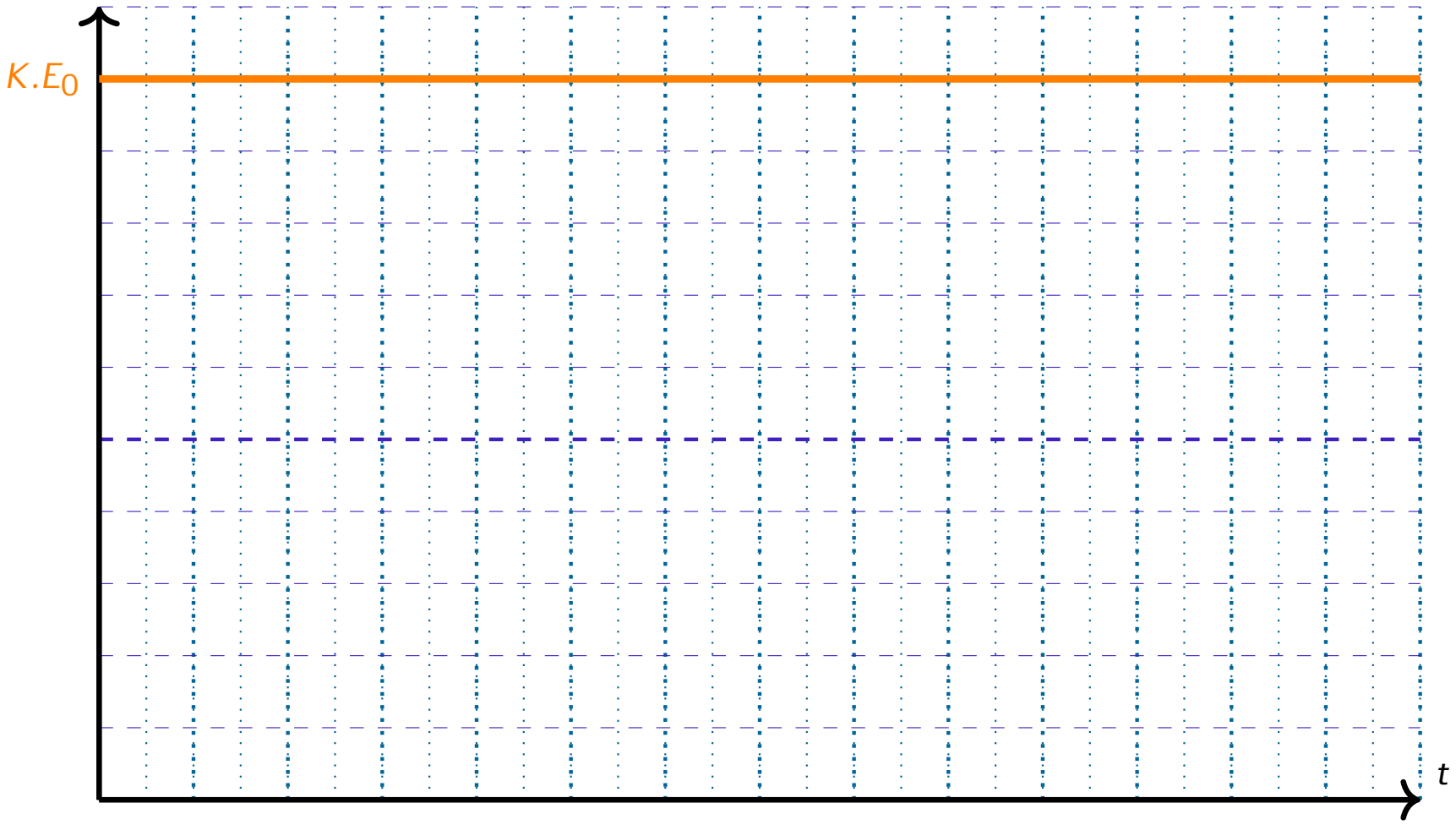
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$$

$$s(t) = K.E_0.\left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}.\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1} - \tau_2.e^{-t/\tau_2}\right)\right)$$

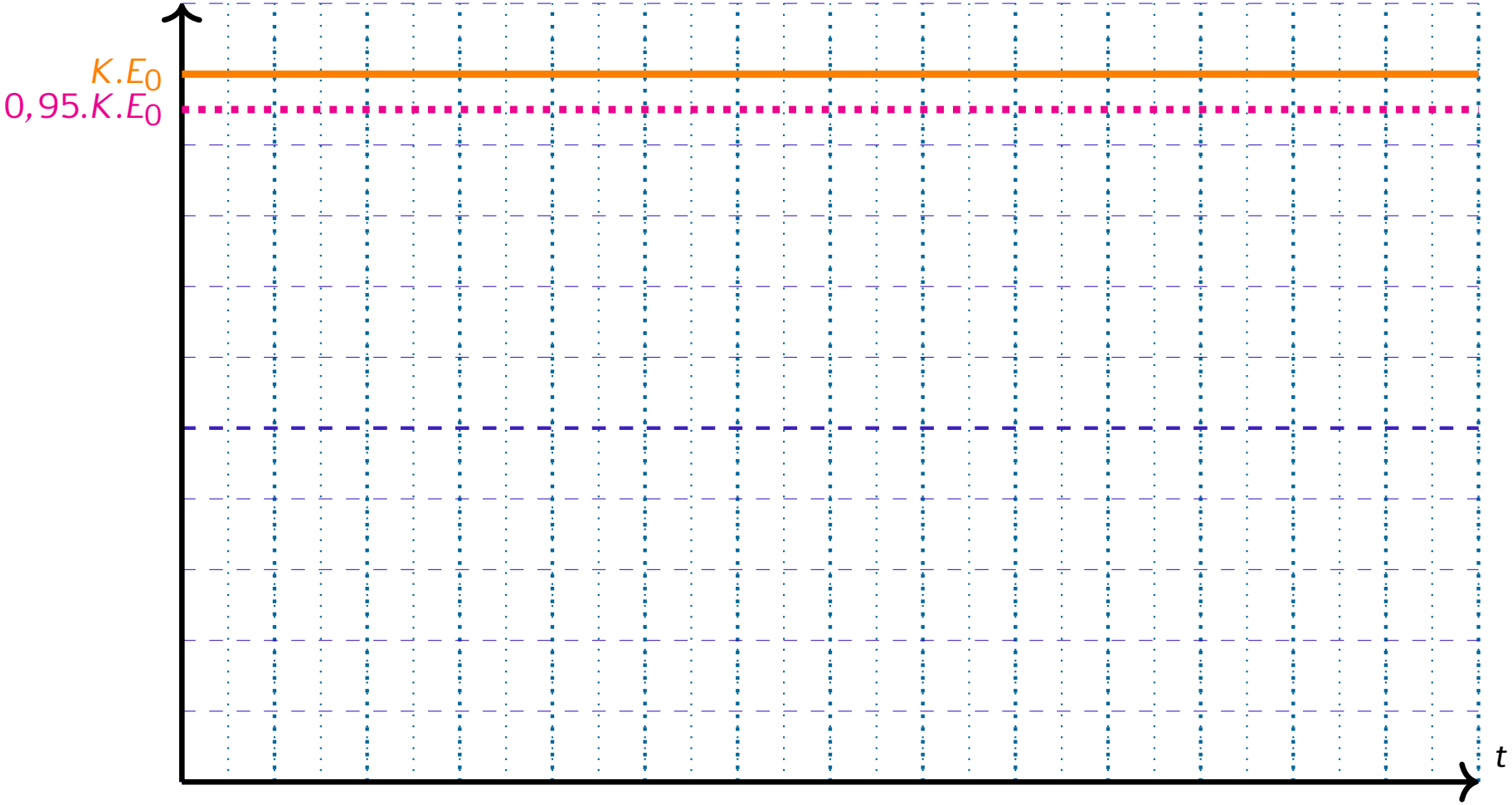
Compléments concernant le régime apériodique



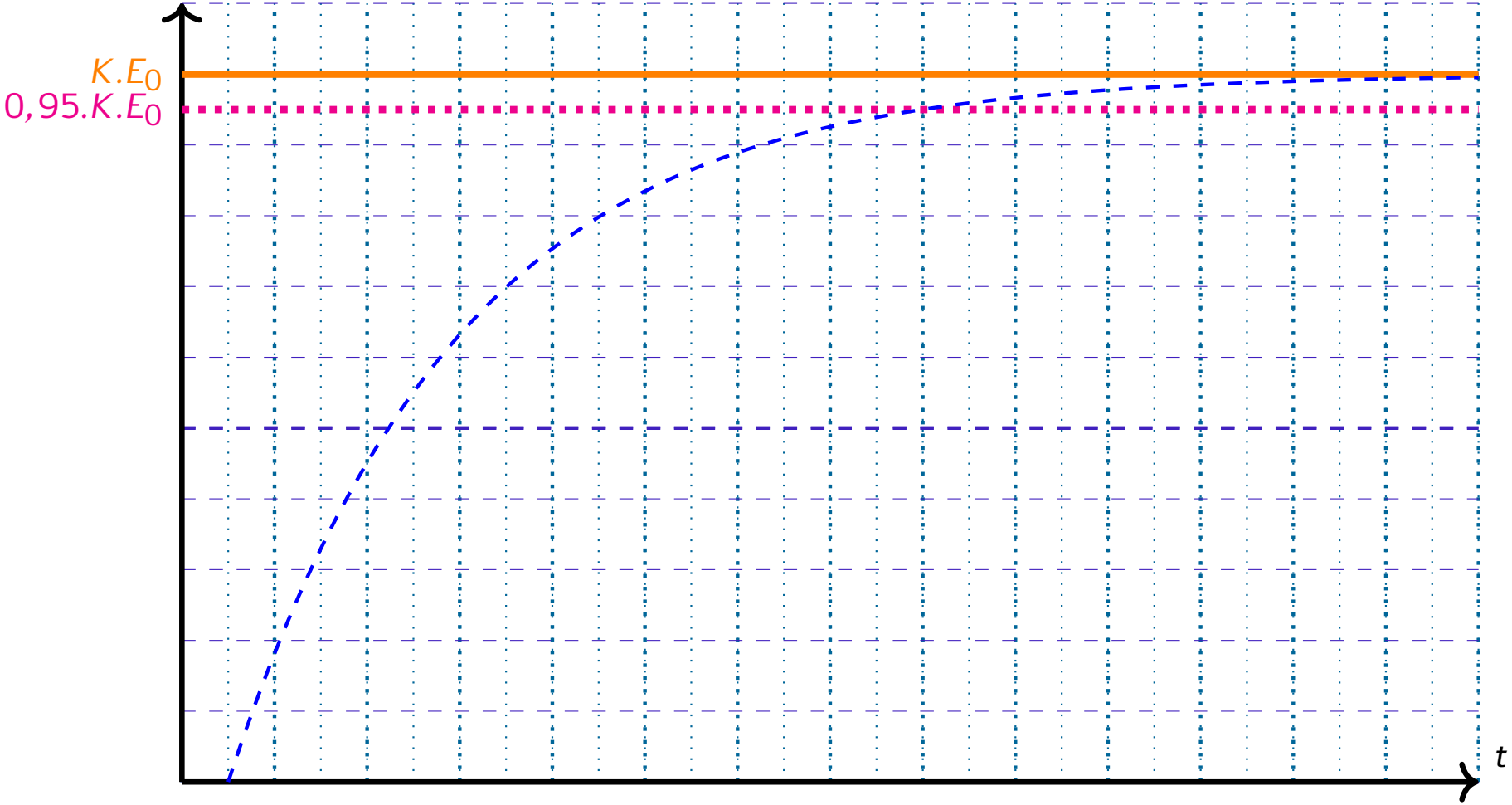
Compléments concernant le régime apériodique



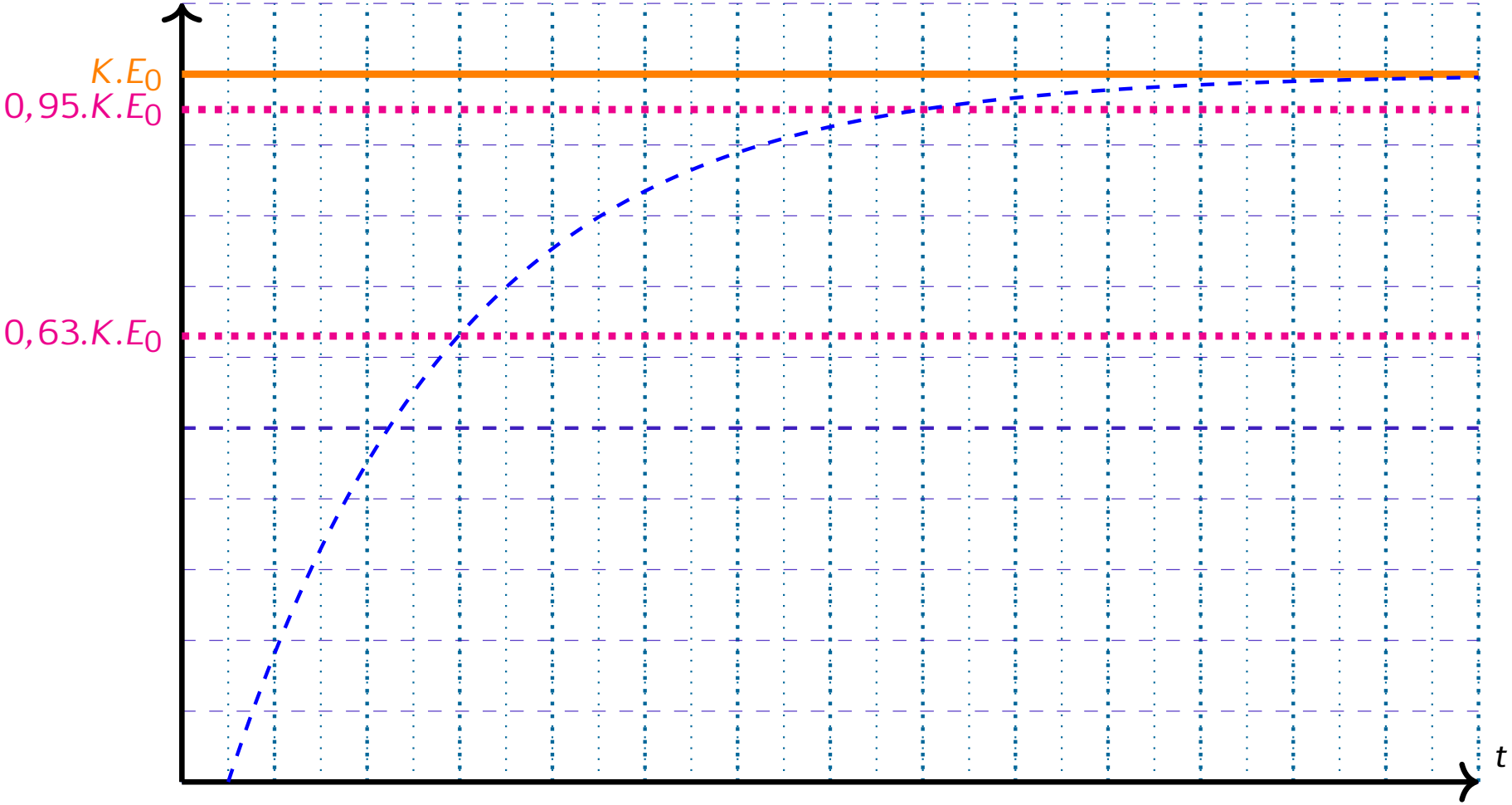
Compléments concernant le régime apériodique



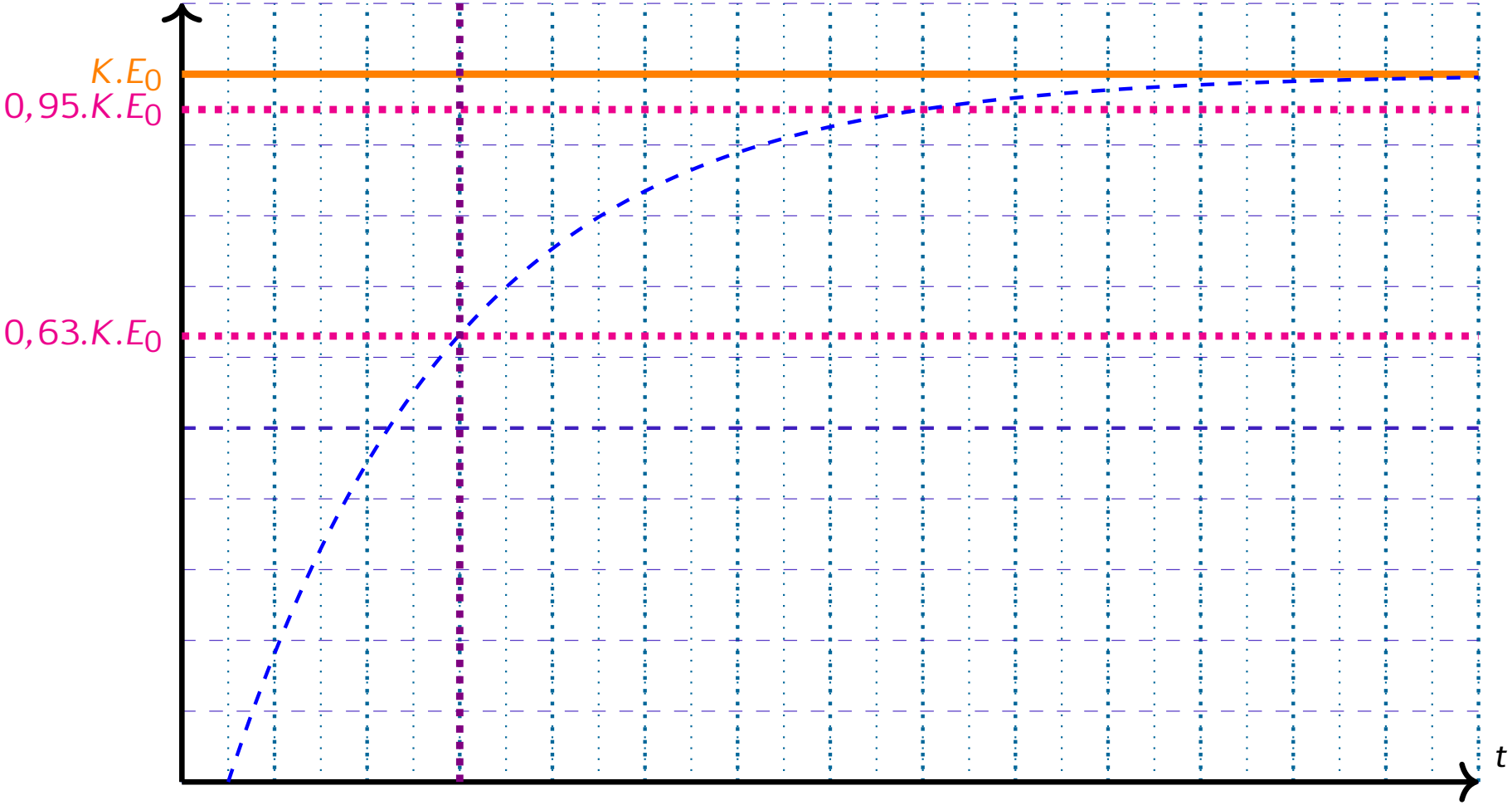
Compléments concernant le régime apériodique



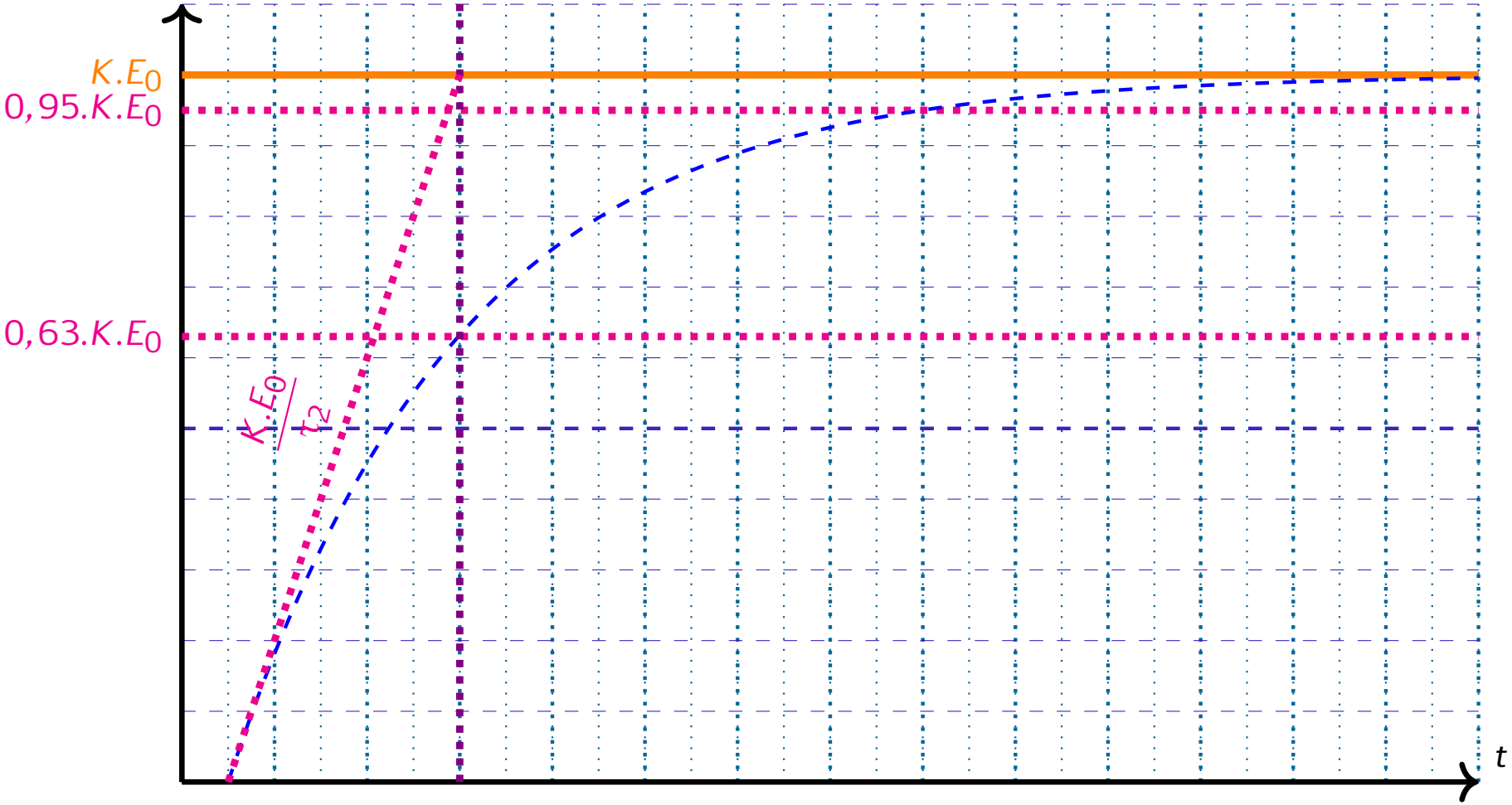
Compléments concernant le régime apériodique



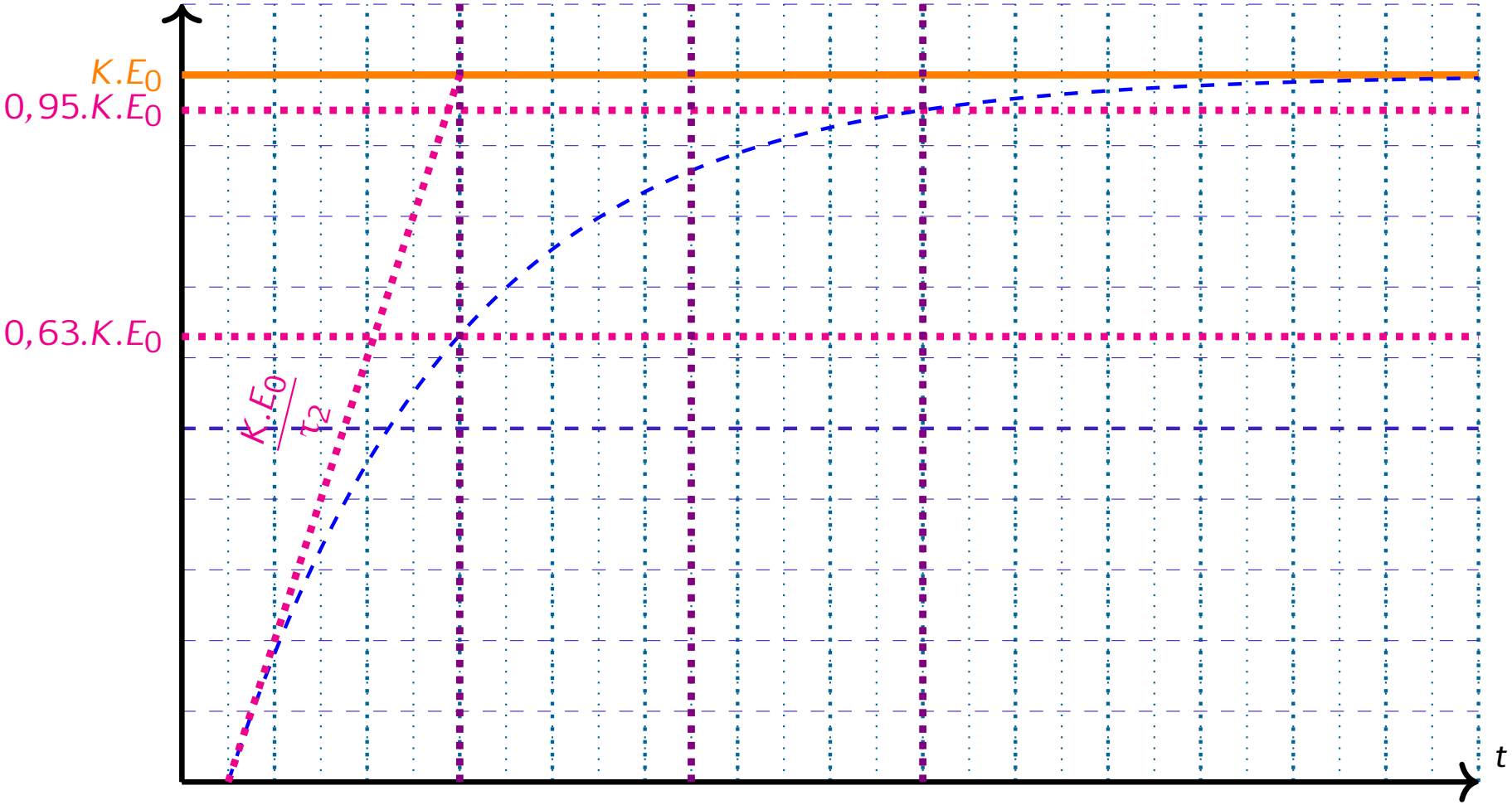
Compléments concernant le régime apériodique



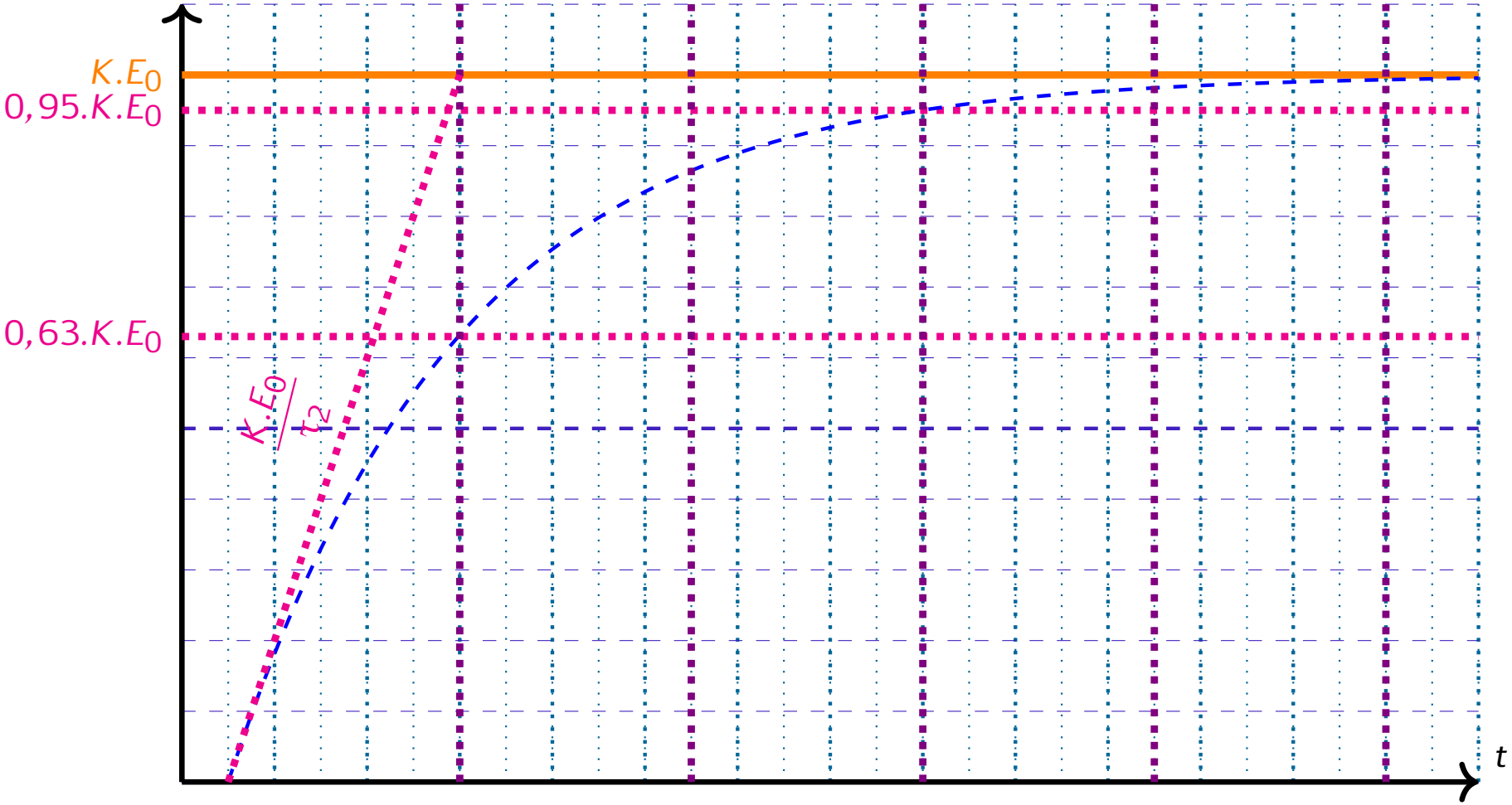
Compléments concernant le régime apériodique



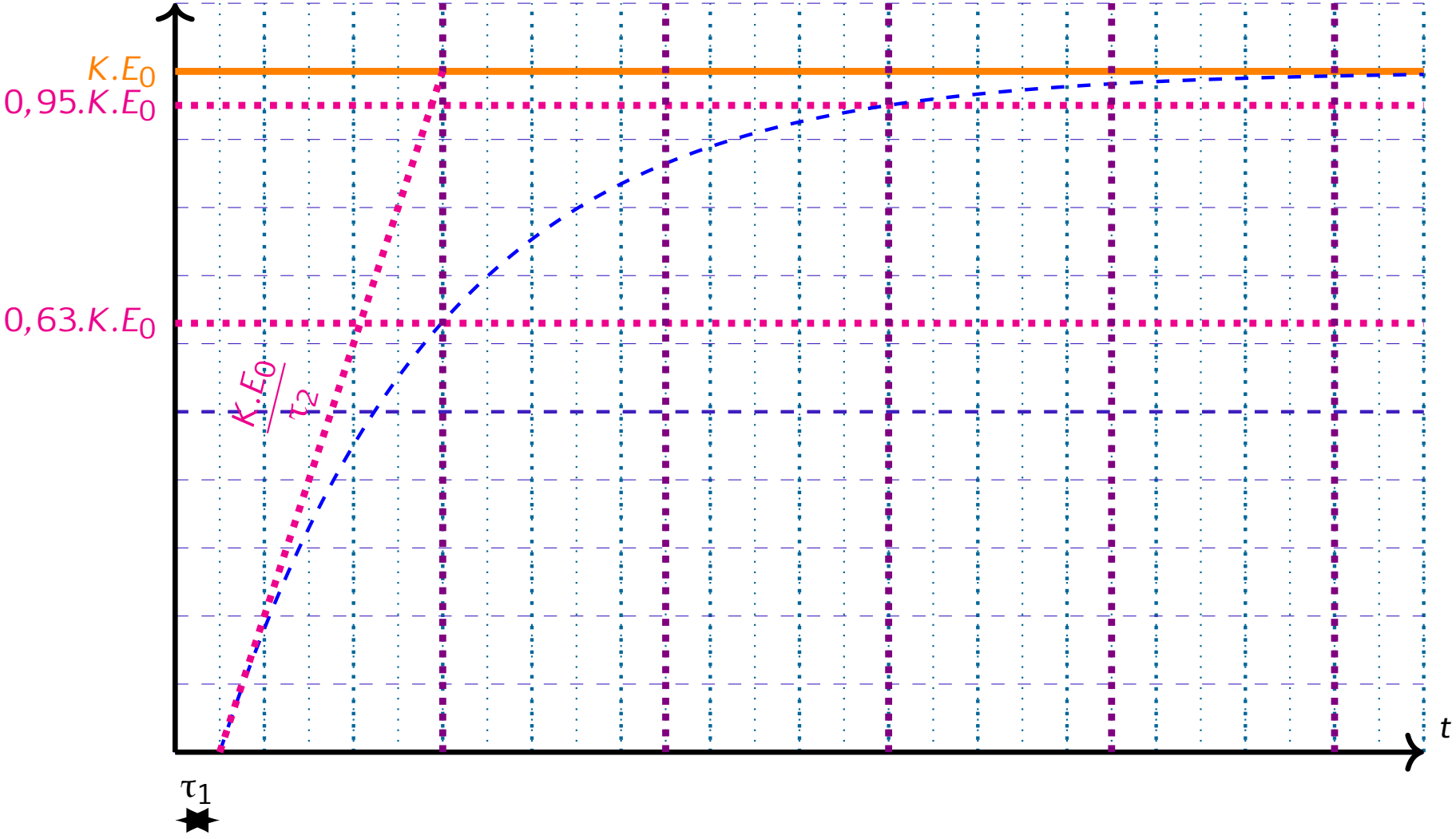
Compléments concernant le régime apériodique



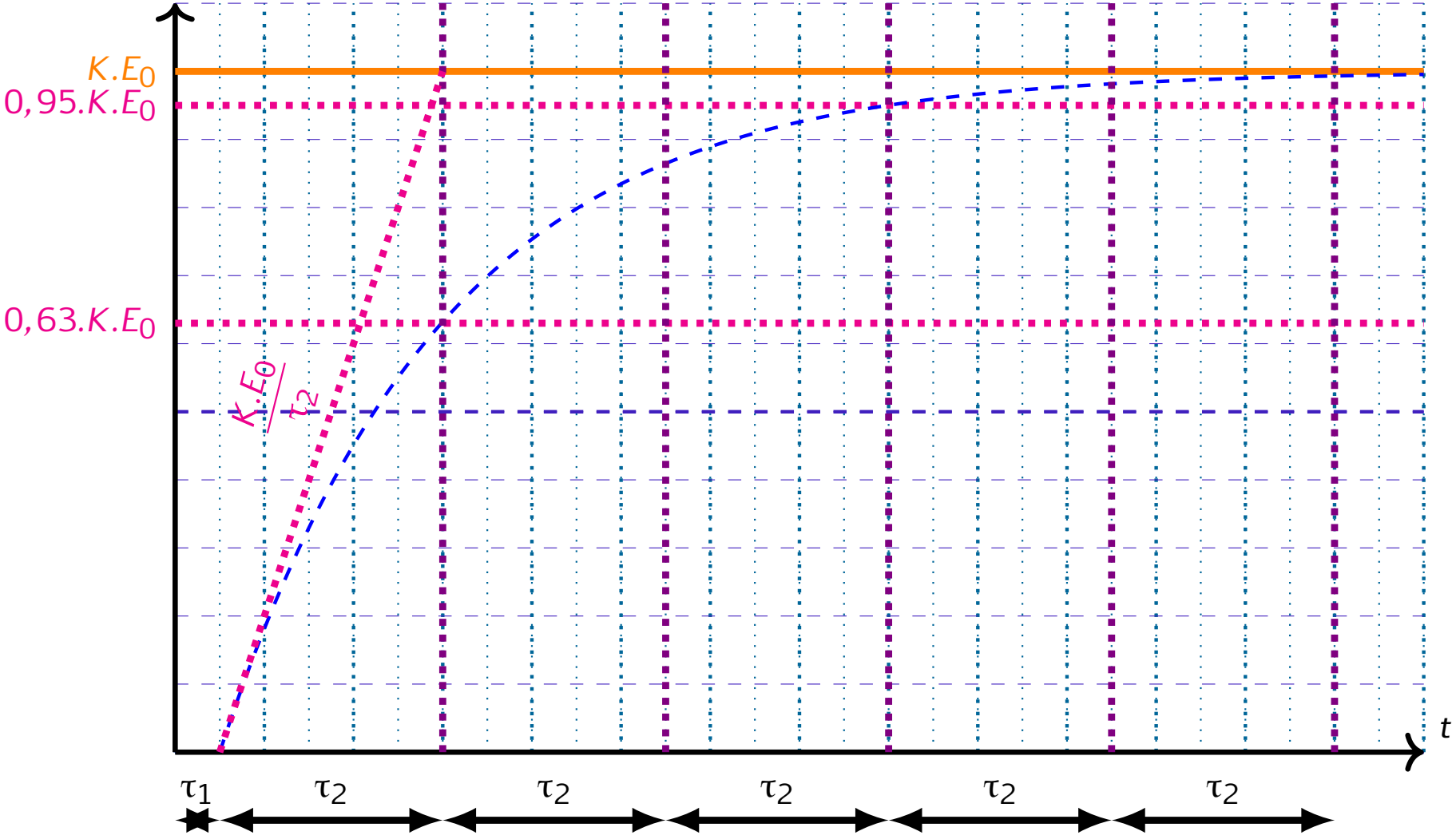
Compléments concernant le régime apériodique



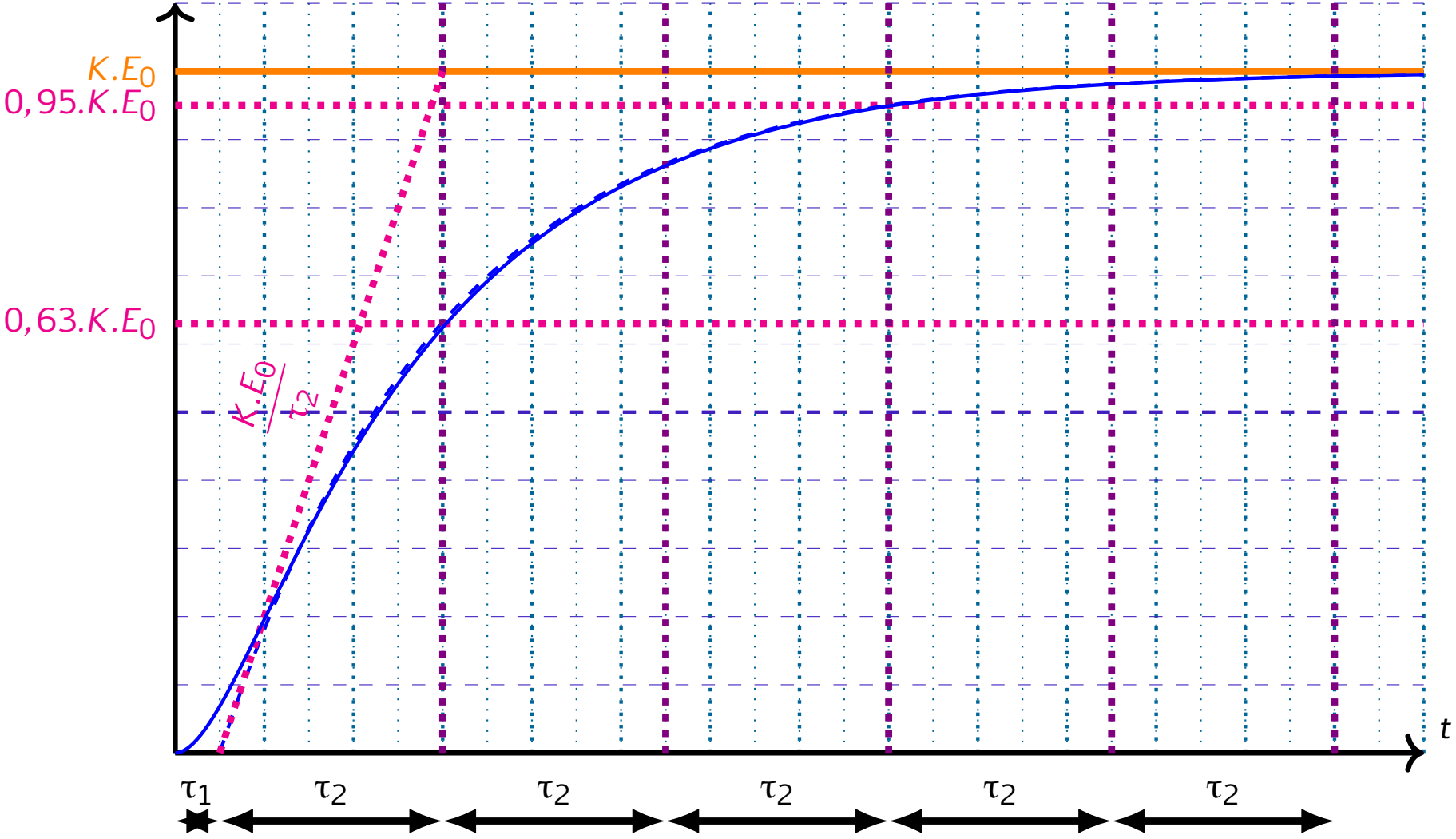
Compléments concernant le régime apériodique



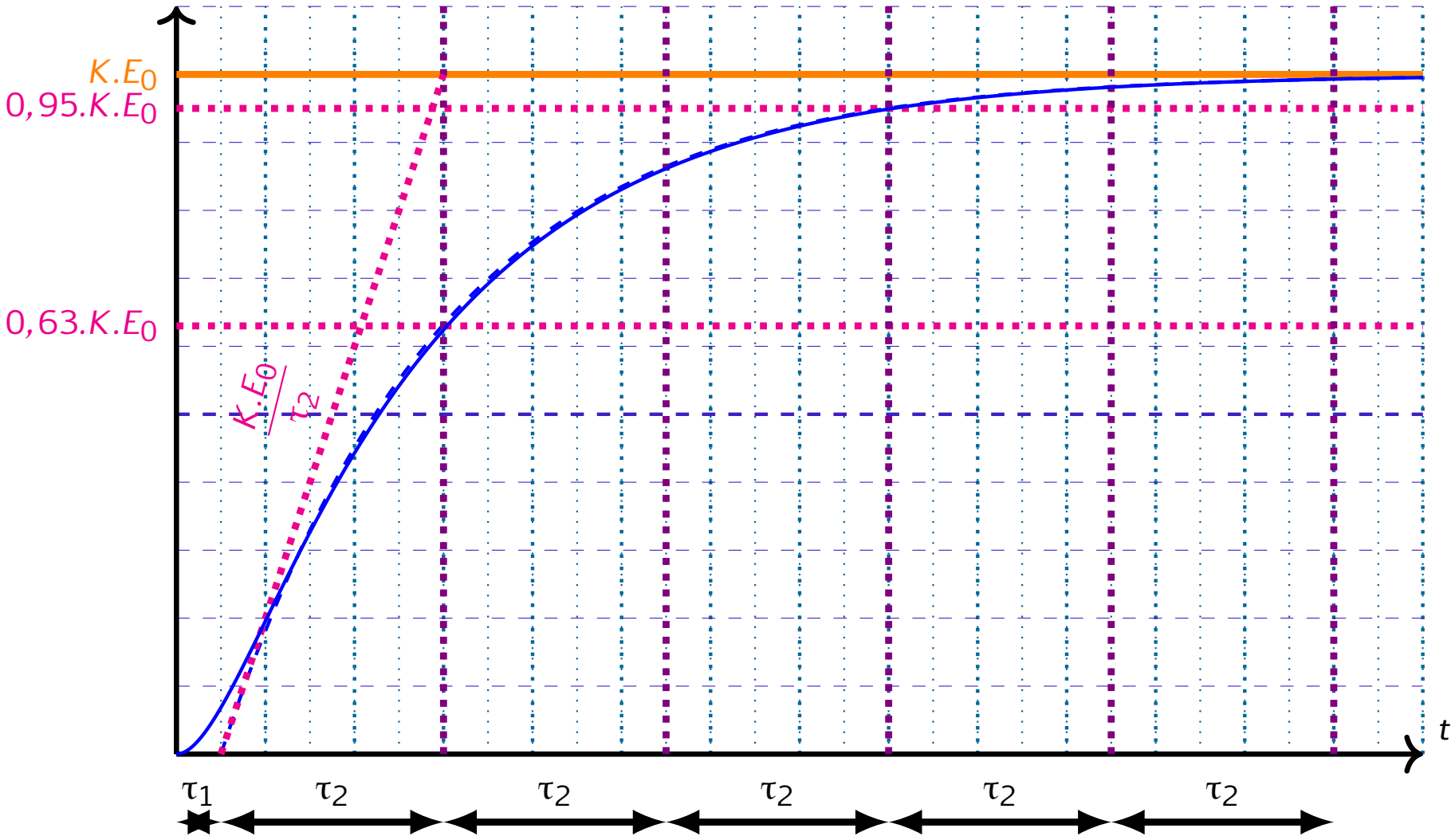
Compléments concernant le régime apériodique



Compléments concernant le régime apériodique



Compléments concernant le régime apériodique



La figure ci-dessus présente un second ordre pour lequel $p_1 = 5.p_2$, i.e. $\tau_2 = 5.\tau_1$.

Sommaire

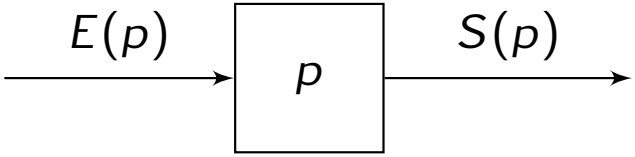
1. Gain pur
2. Système du premier ordre
3. Système du deuxième ordre
4. Complément autour des réponses temporelles de systèmes aux entrées canoniques
   - Actions dérivées et intégrales
   - Réponses impulsionnelles (unitaires)
   - Réponses à une rampe (unitaire)

Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).



Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Ainsi, l'expression temporelles d'une entrée canonique sera une autre entrée canonique.

Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Ainsi, l'expression temporelles d'une entrée canonique sera une autre entrée canonique.

On peut ainsi donner le tableau suivant :

Entrée	$\delta(t)$	$u(t)$	$t.u(t)$	$t^n.u(t)$

Actions dérivées et intégrales

Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Ainsi, l'expression temporelles d'une entrée canonique sera une autre entrée canonique.

On peut ainsi donner le tableau suivant :

Entrée	$\delta(t)$	$u(t)$	$t.u(t)$	$t^n.u(t)$
Sortie d'un système dérivateur	-	$\delta(t)$	$u(t)$	$n.t^{n-1}.u(t)$

Actions dérivées et intégrales

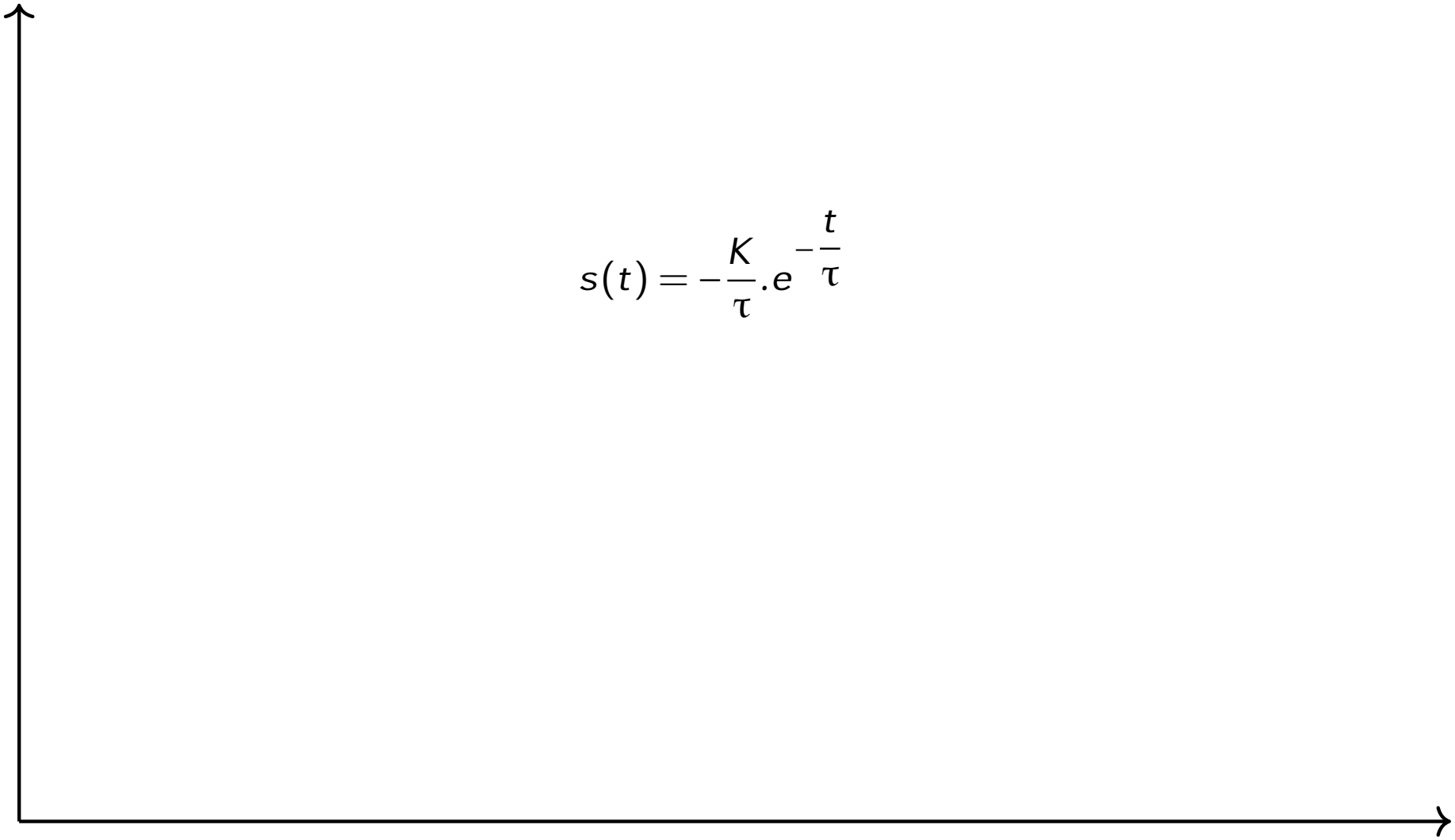
Dériver ou intégrer revient dans le domaine de Laplace à multiplier ou diviser par p (aux constantes d'intégration près).

Ainsi, l'expression temporelles d'une entrée canonique sera une autre entrée canonique.

On peut ainsi donner le tableau suivant :

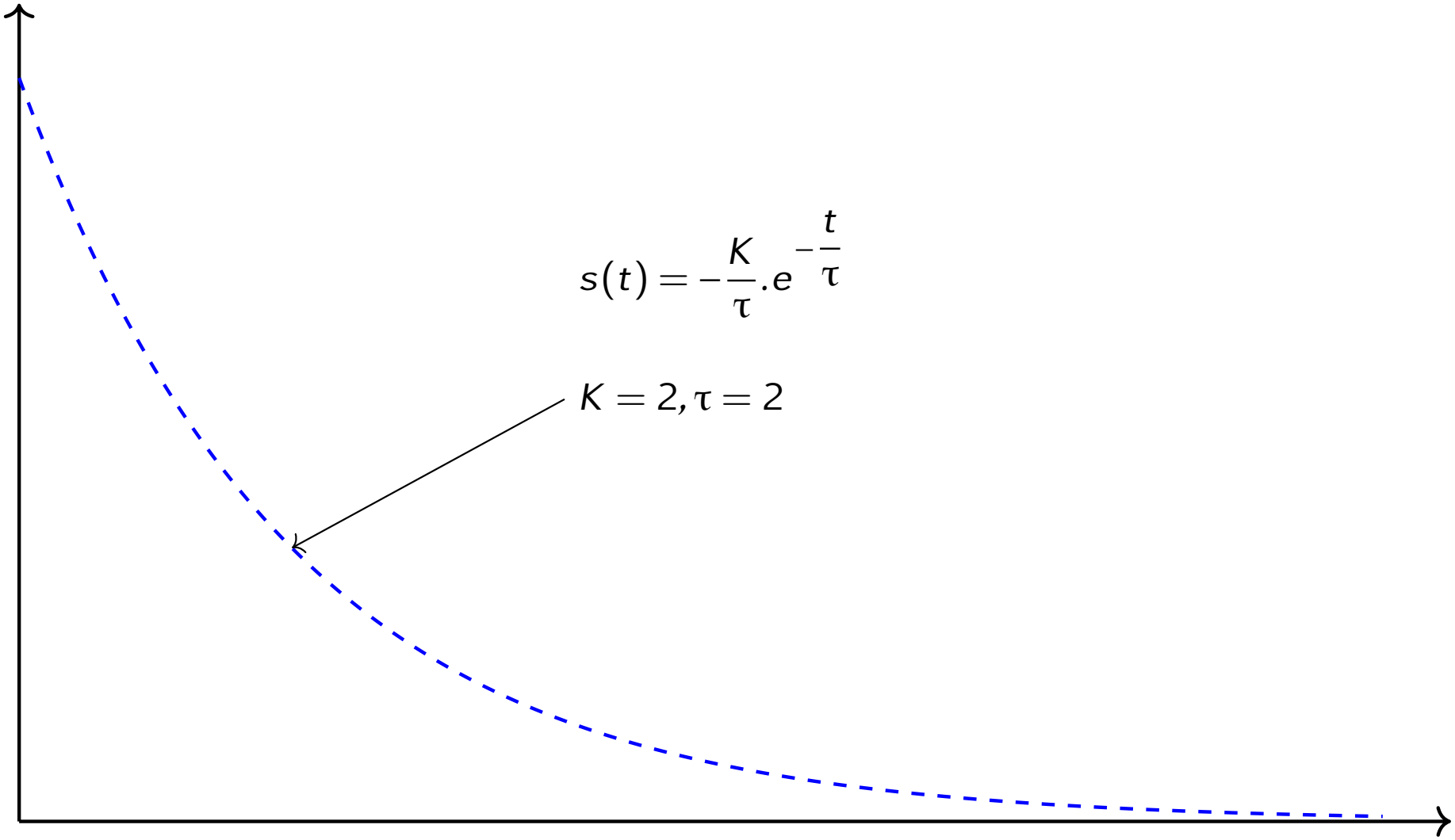
Entrée	$\delta(t)$	$u(t)$	$t.u(t)$	$t^n.u(t)$
Sortie d'un système dérivateur	-	$\delta(t)$	$u(t)$	$n.t^{n-1}.u(t)$
Sortie d'un système intégrateur	$u(t)$	$t.u(t)$	$\frac{1}{2}.t^2.u(t)$	$\frac{1}{n}.t^{n+1}.u(t)$

Premier ordre (réponse impulsionnelle)

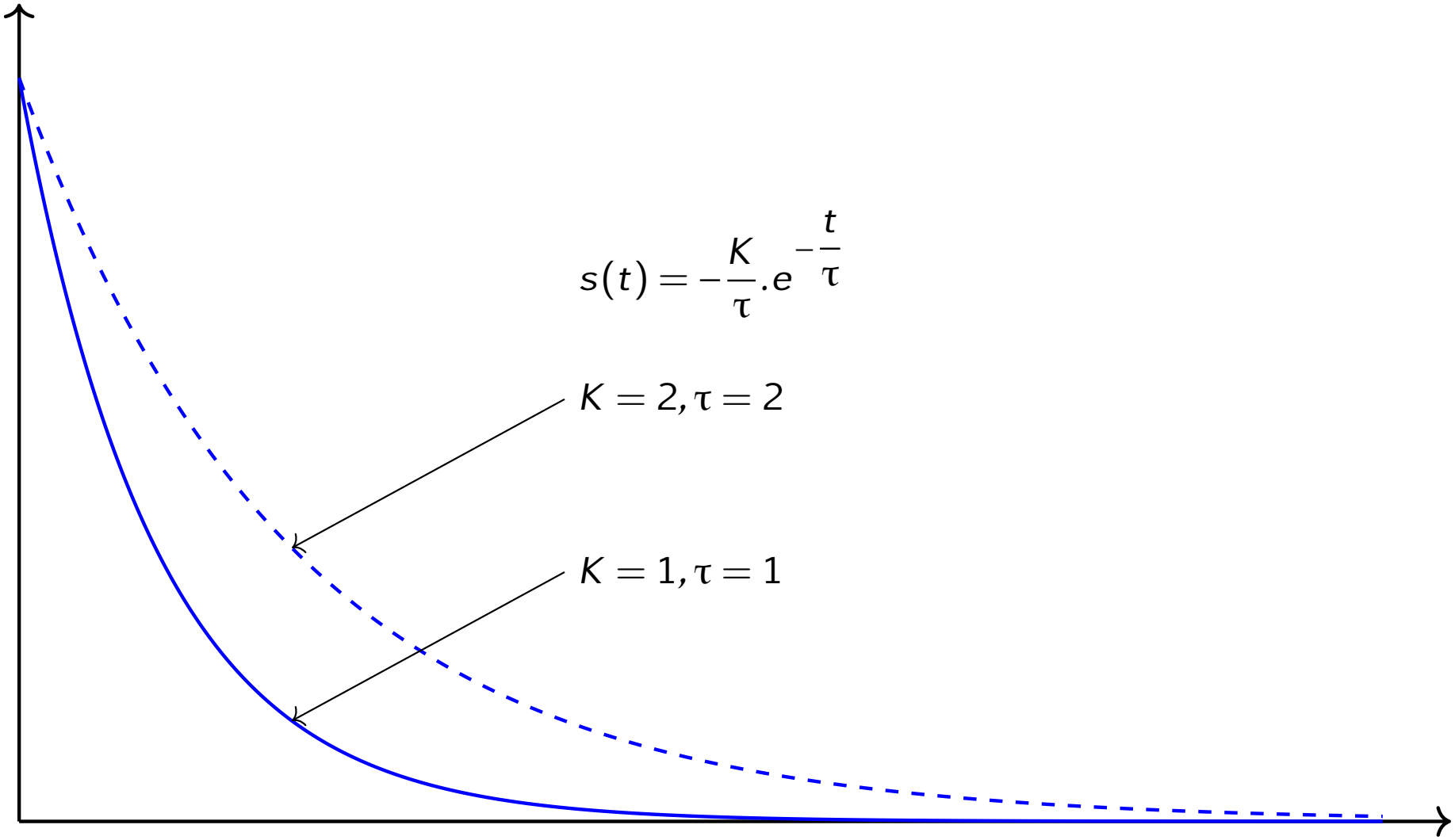


$$s(t) = -\frac{K}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

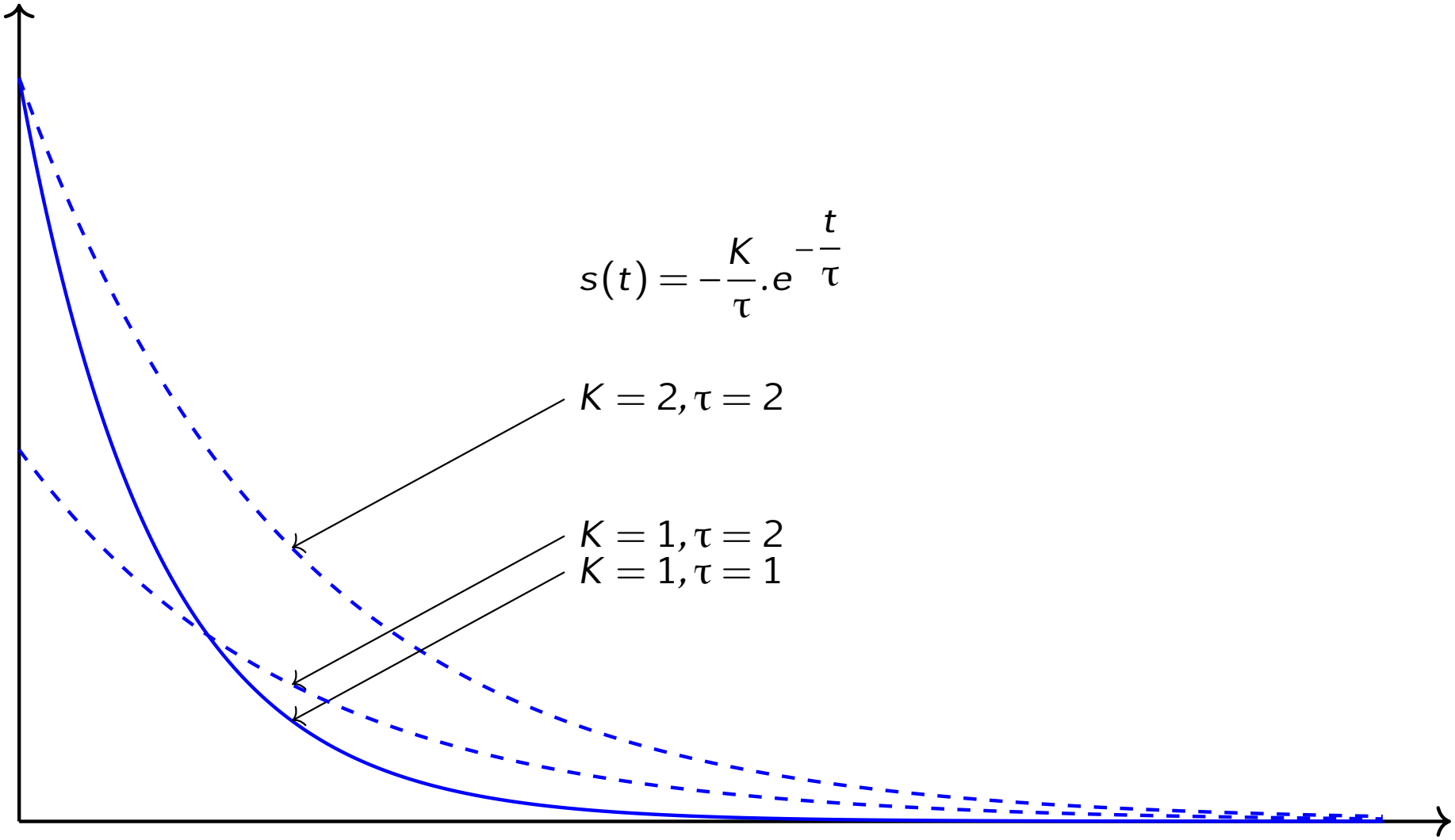
Premier ordre (réponse impulsionnelle)



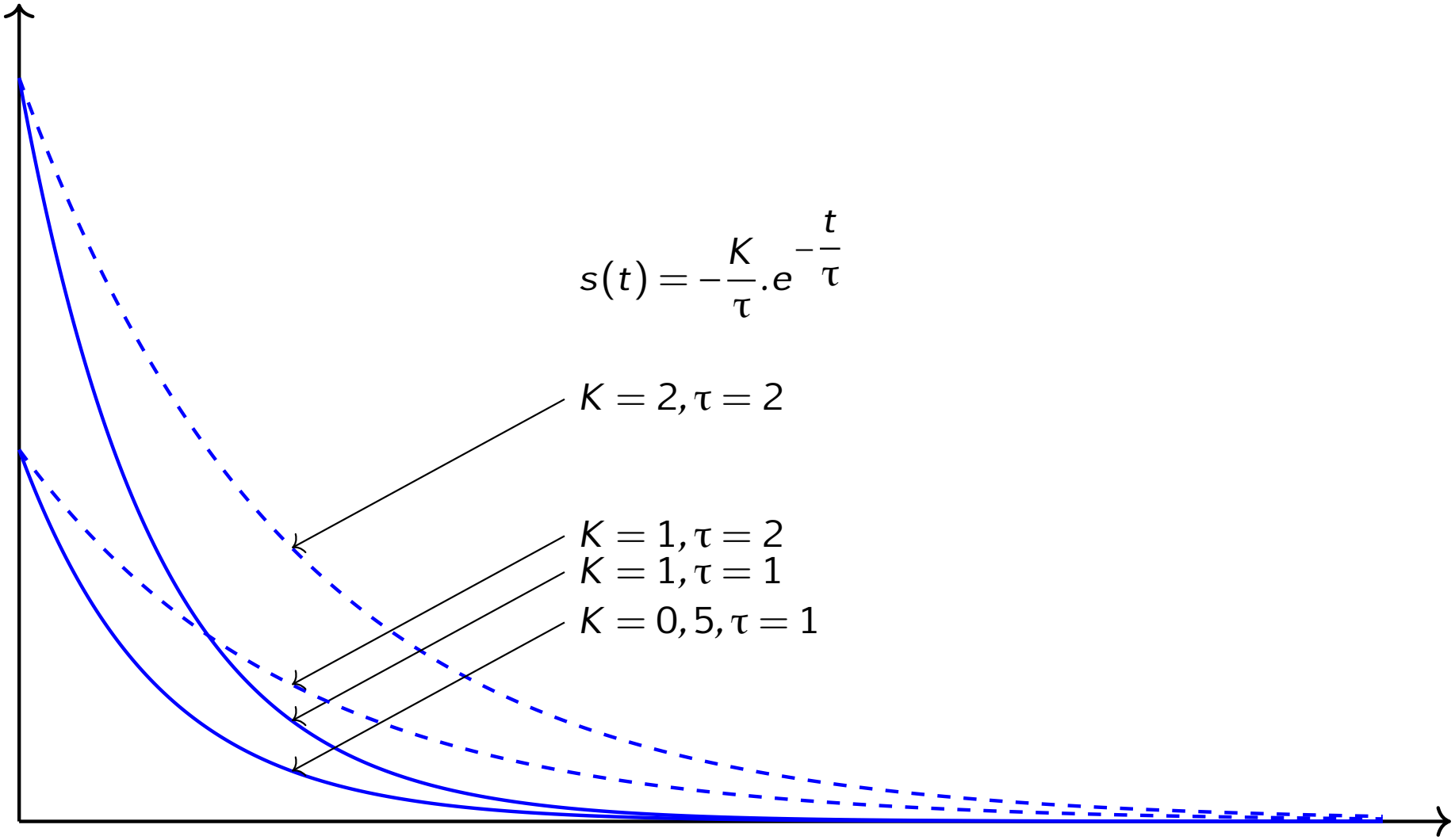
Premier ordre (réponse impulsionnelle)



Premier ordre (réponse impulsionnelle)

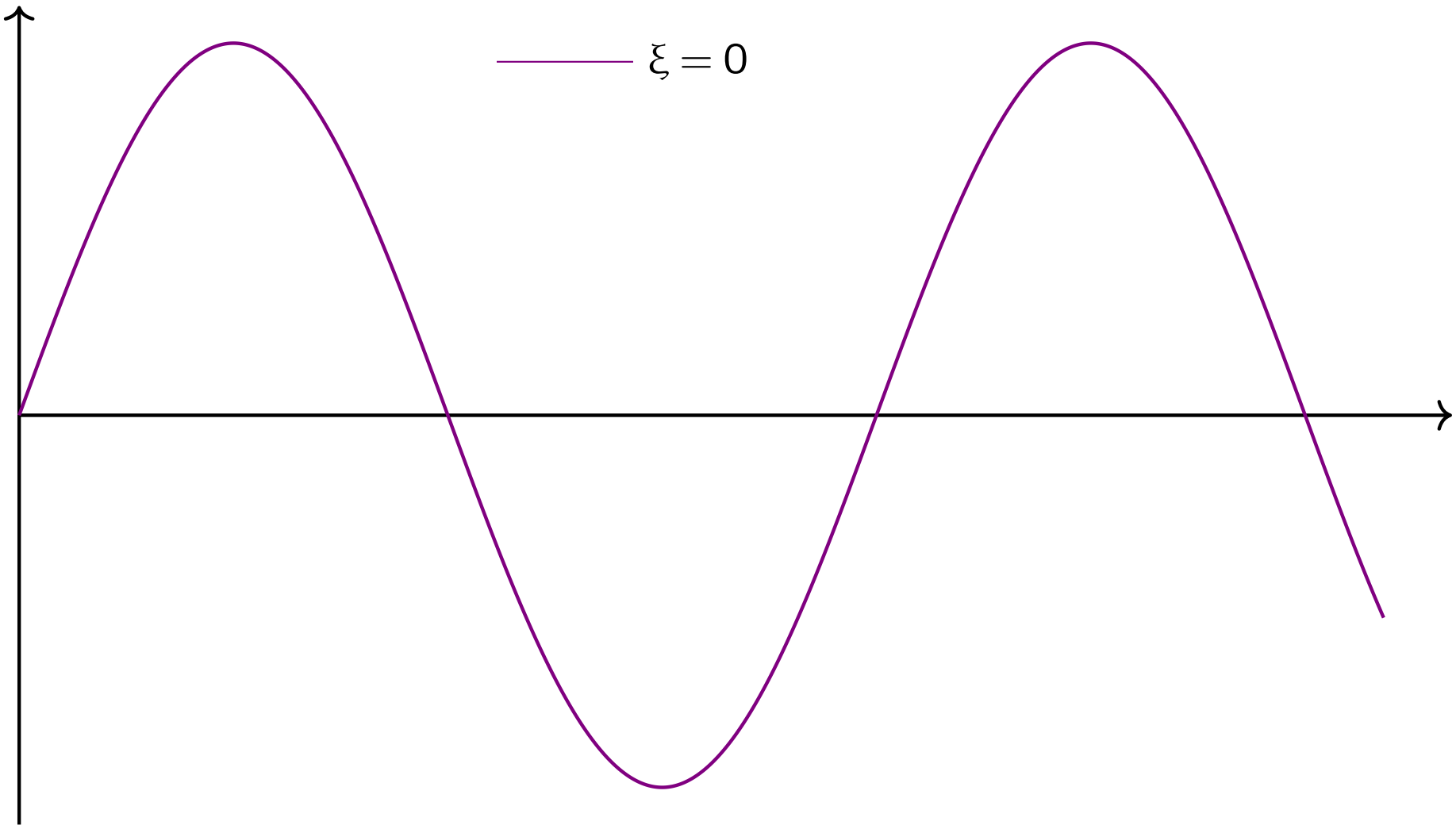


Premier ordre (réponse impulsionnelle)

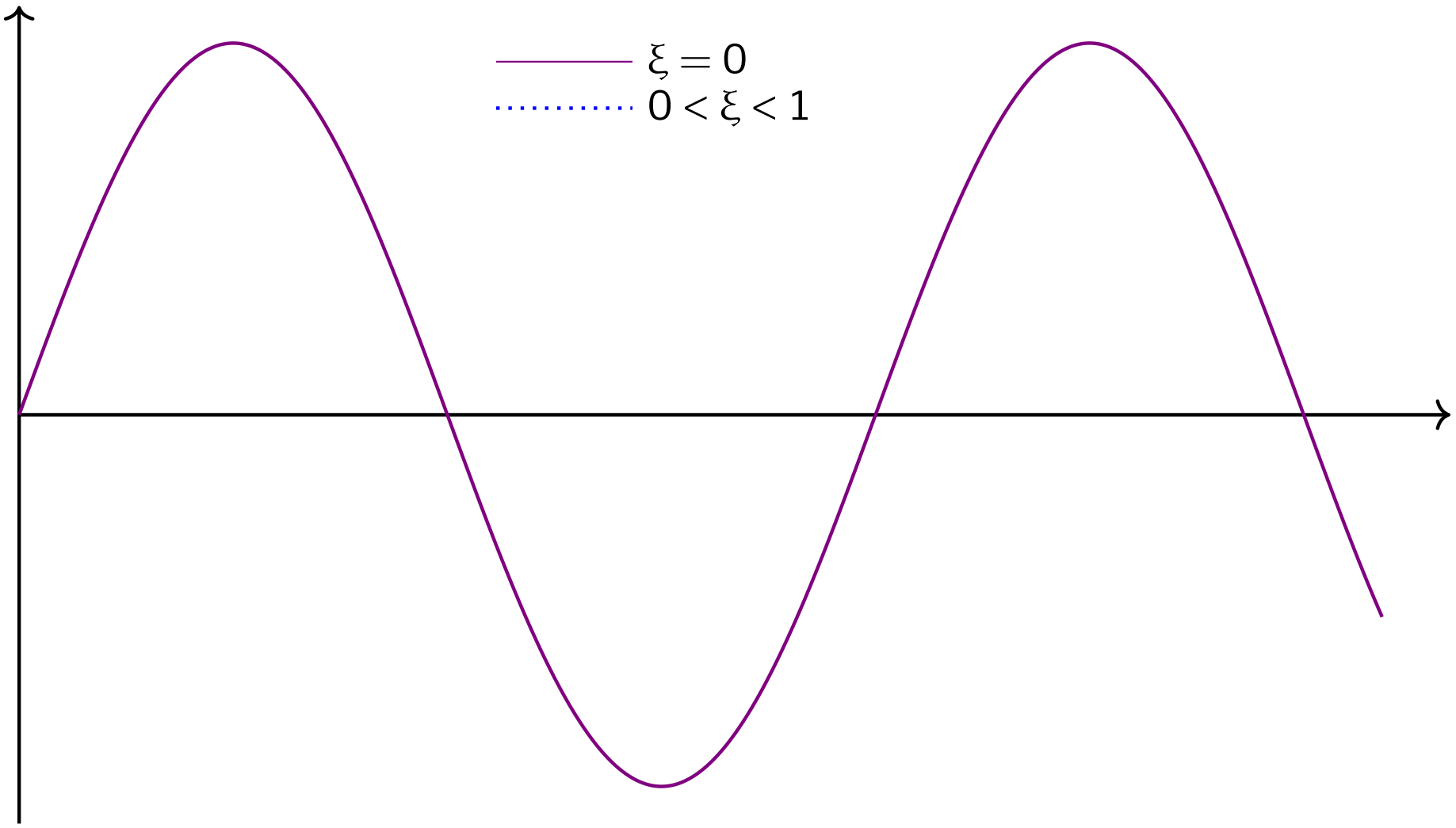


Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)

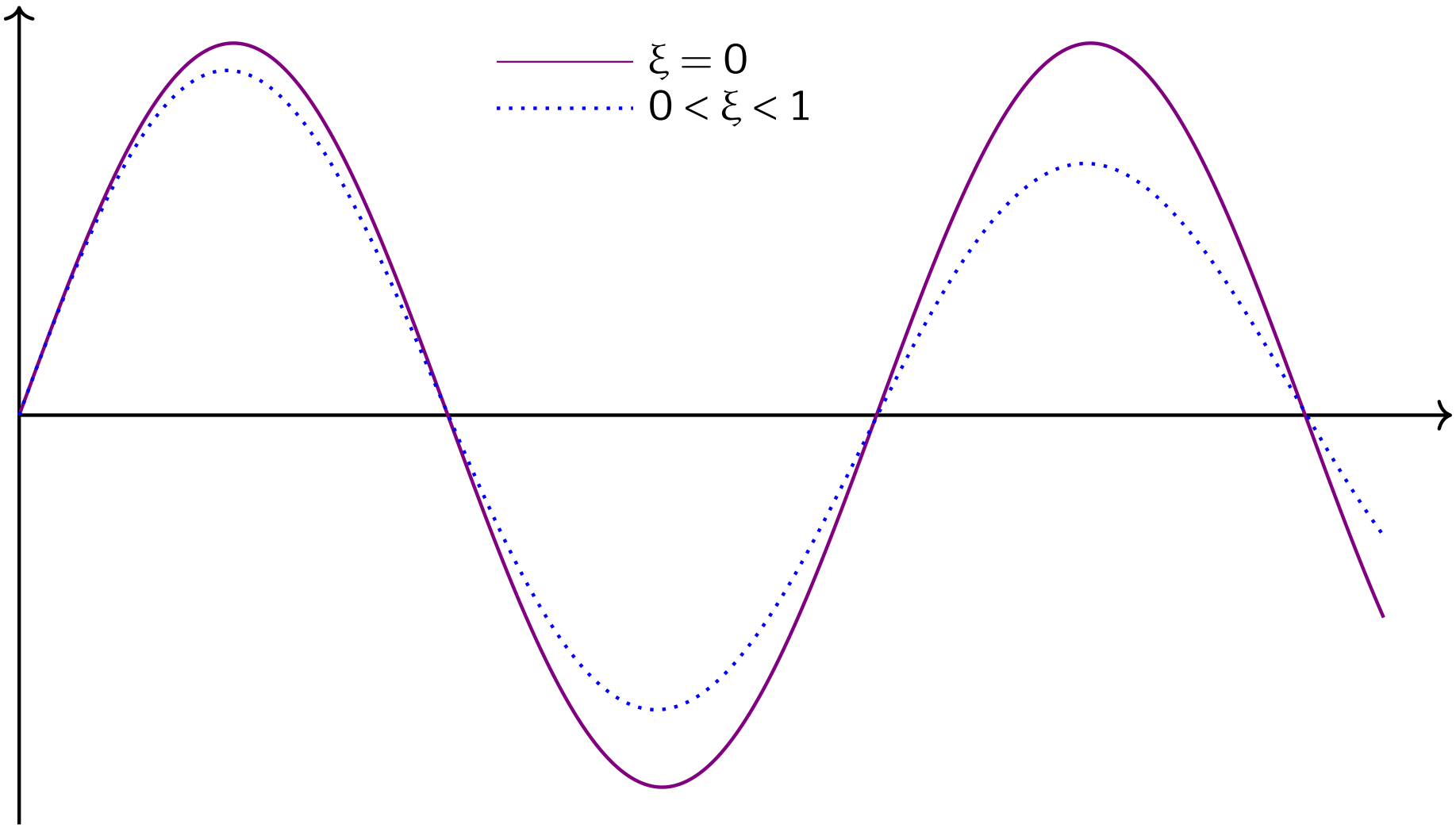
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



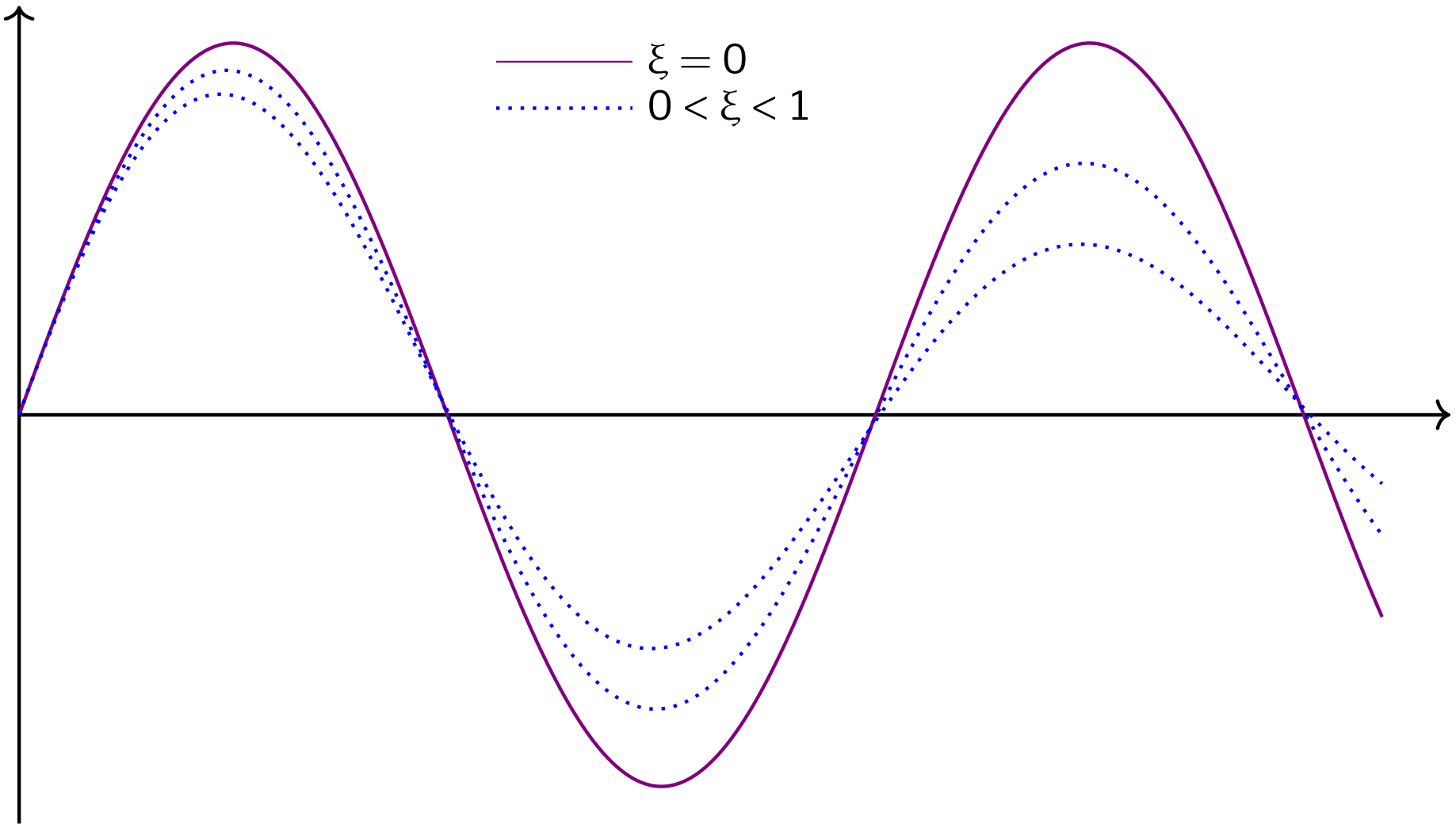
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



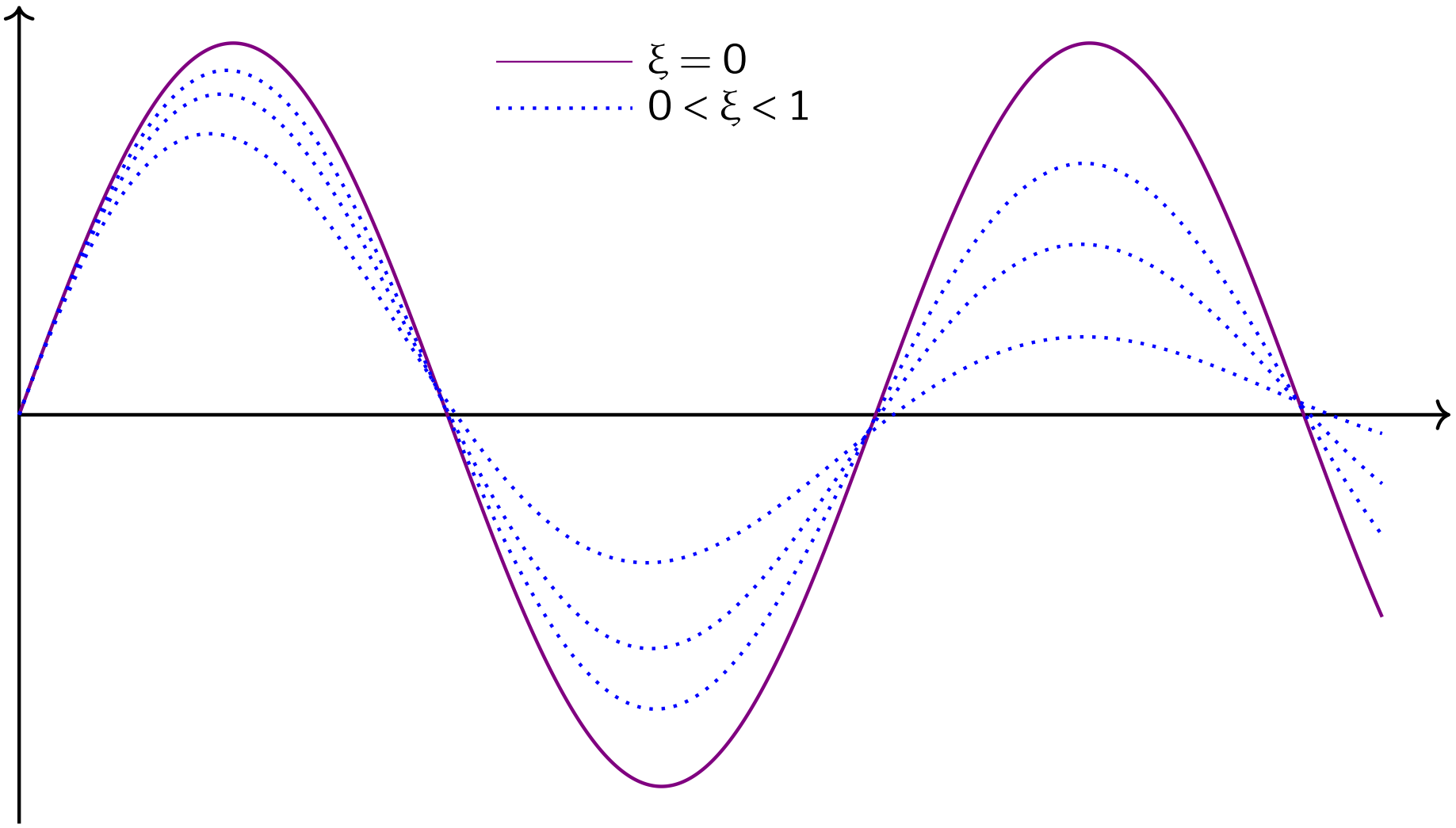
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



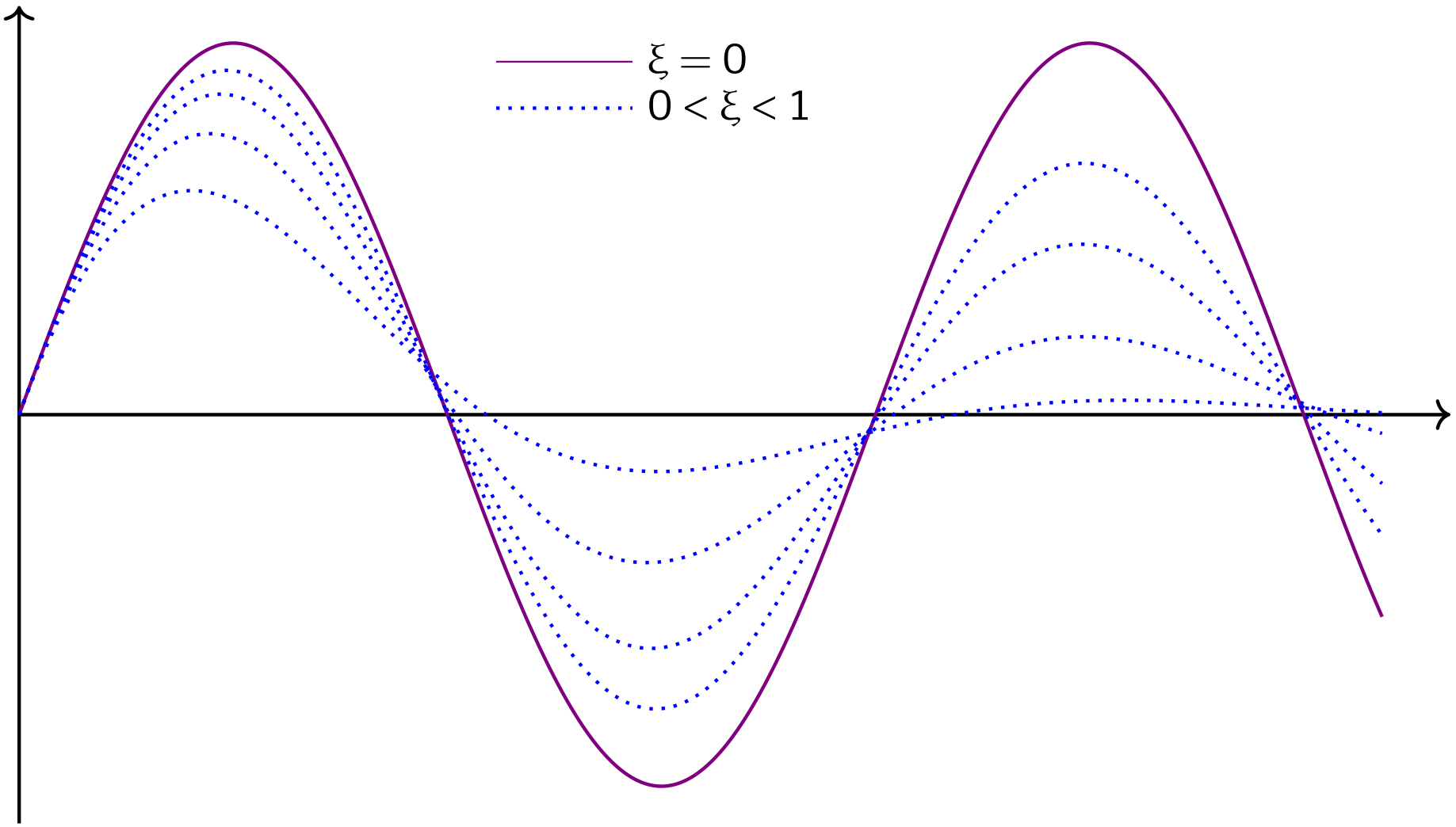
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



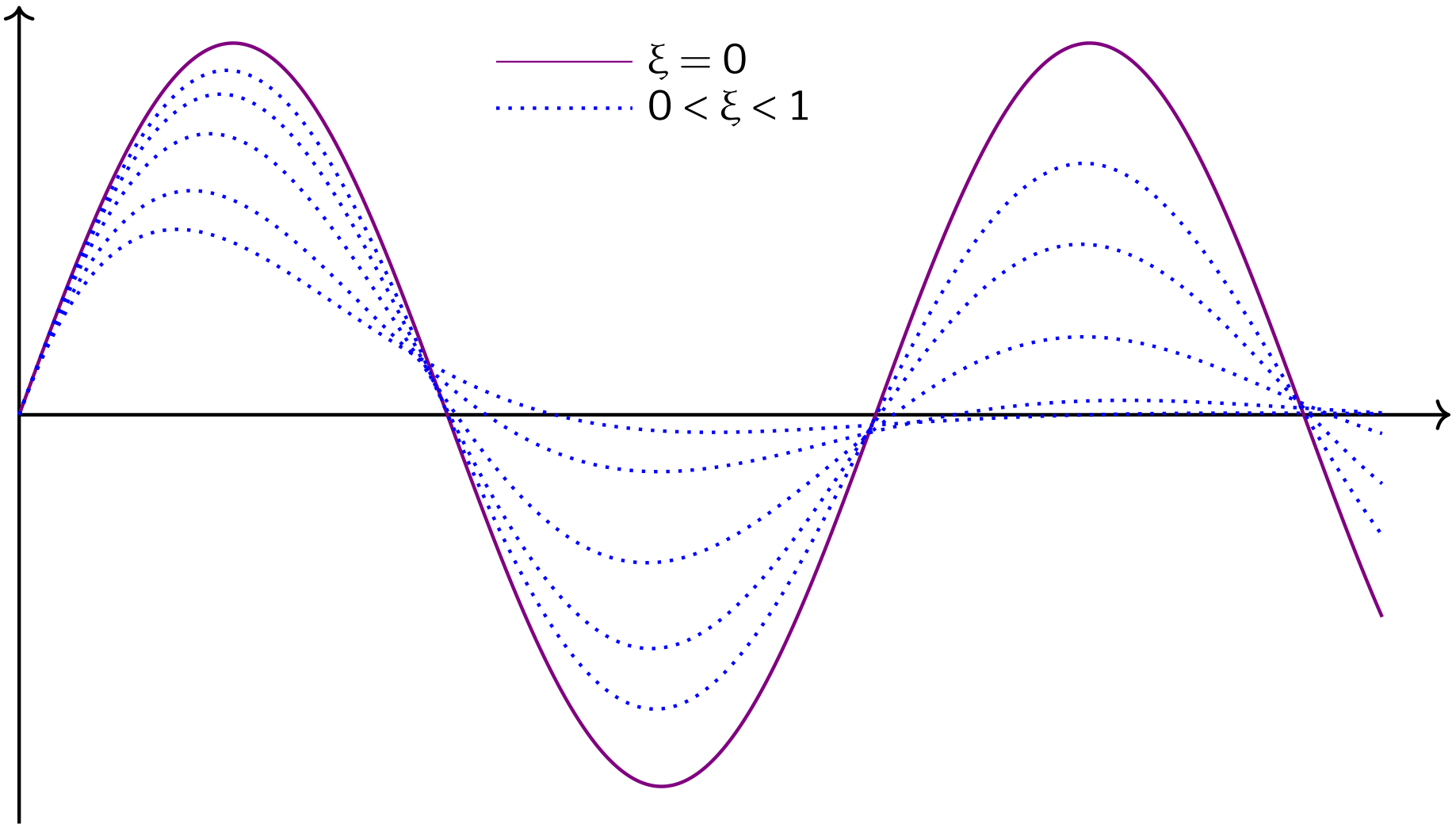
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



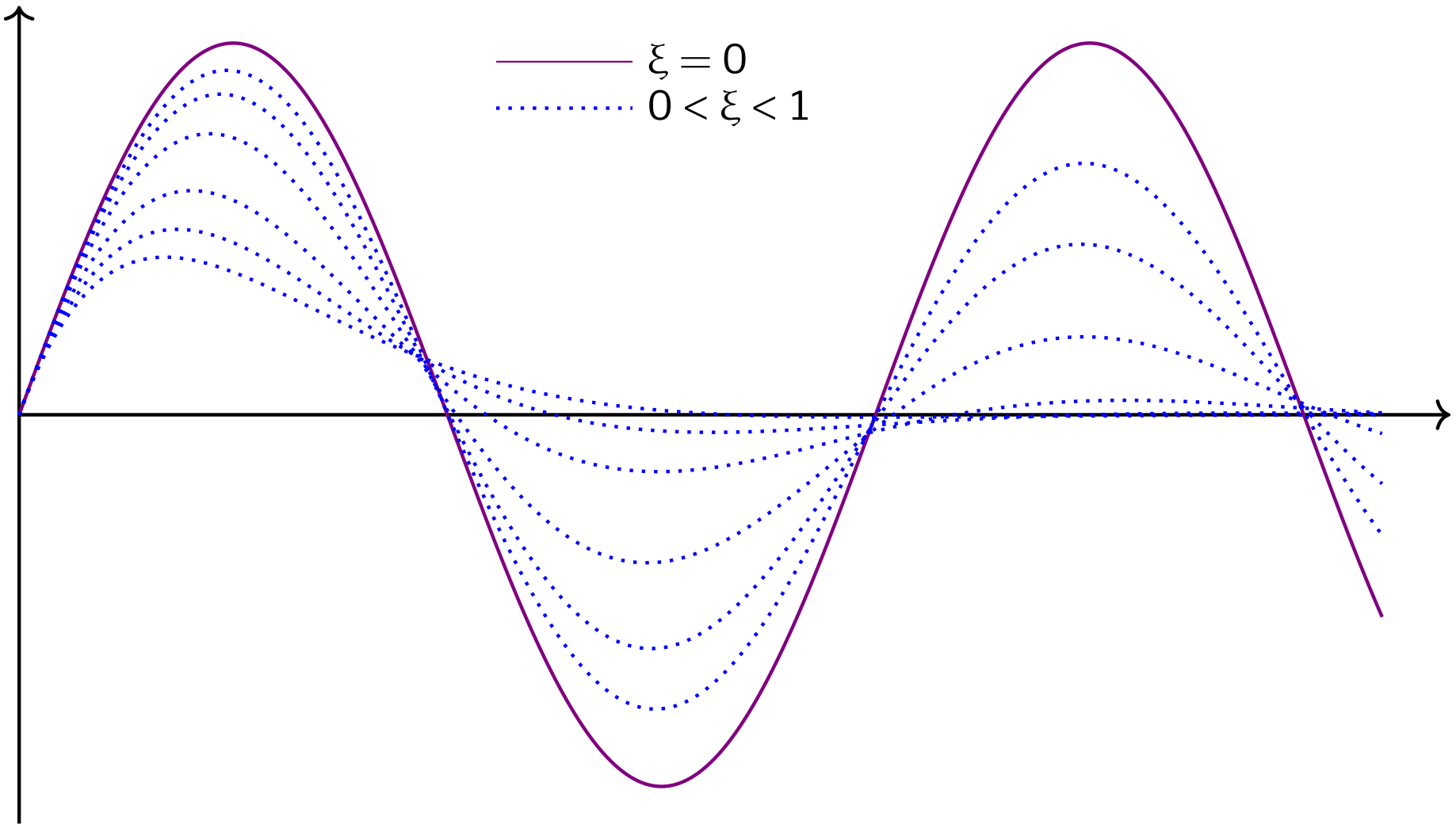
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



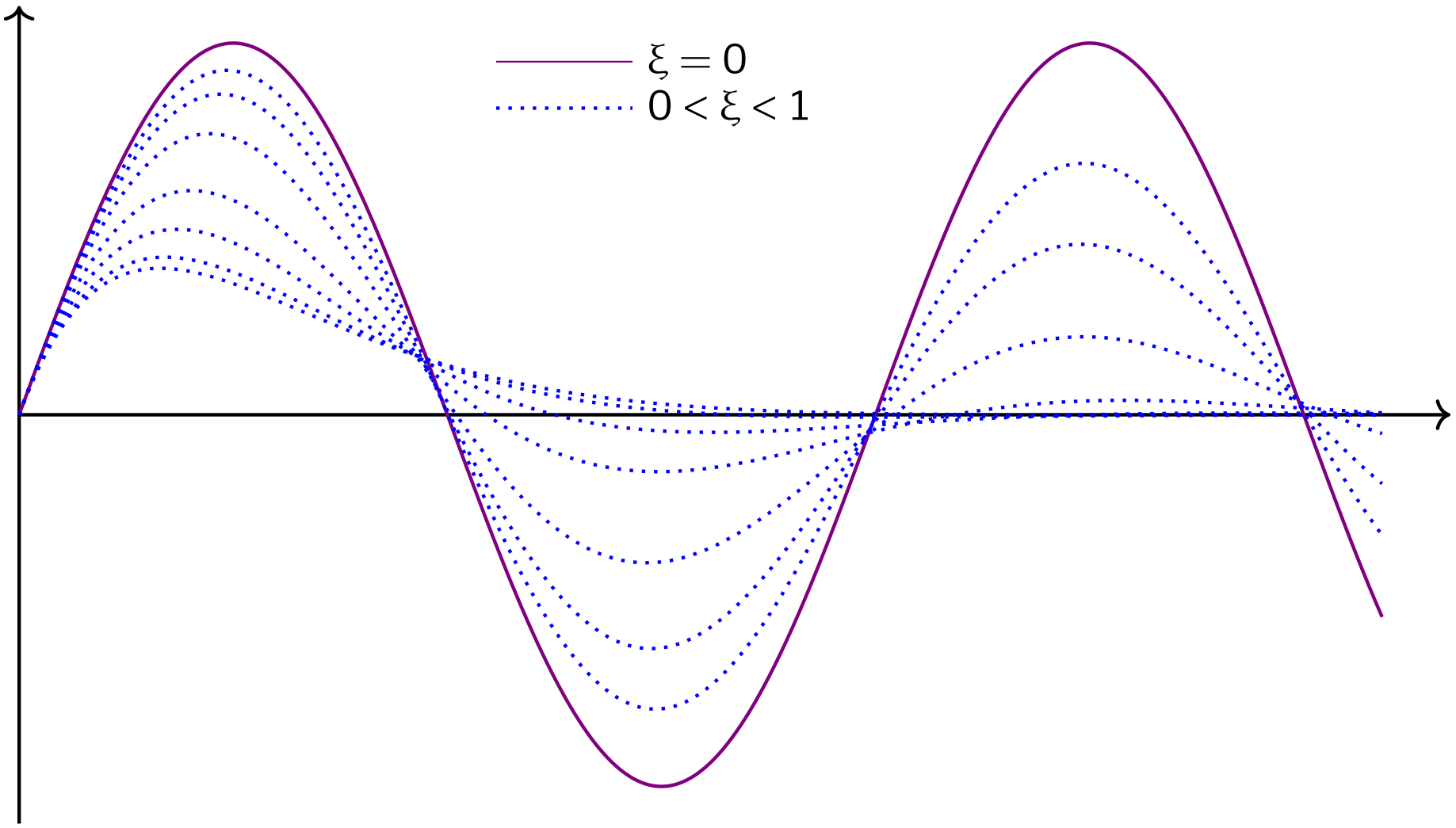
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



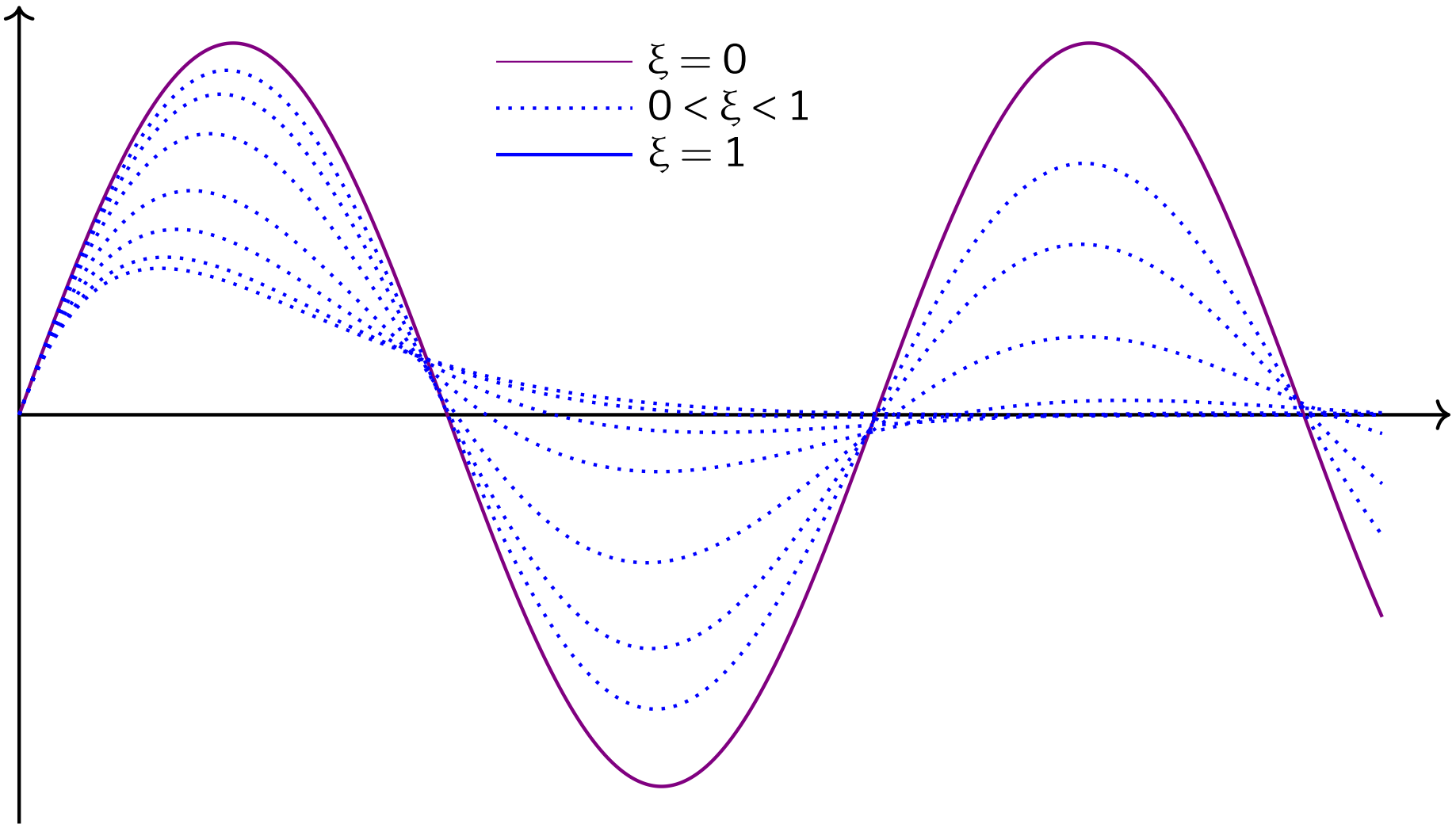
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



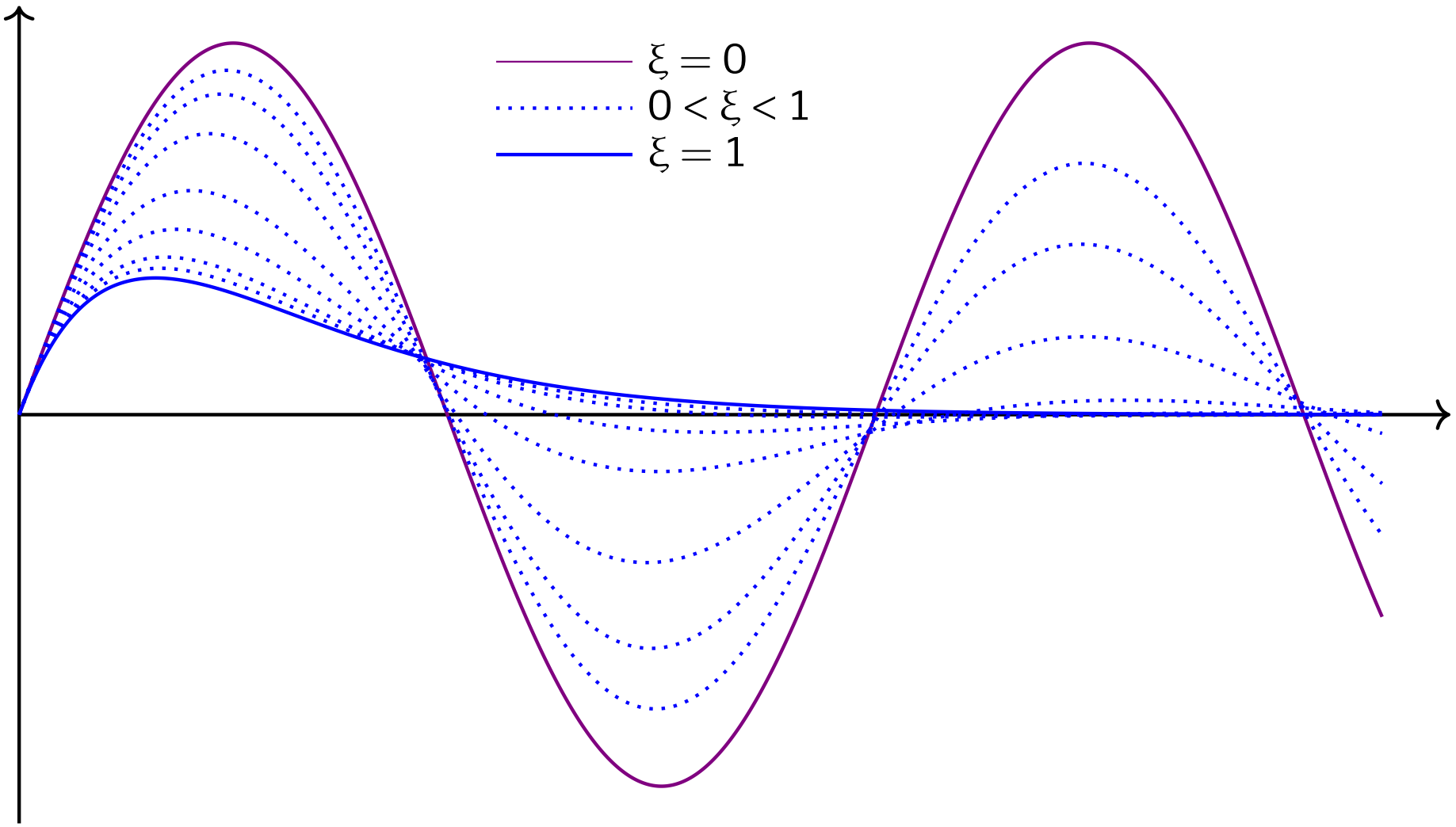
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



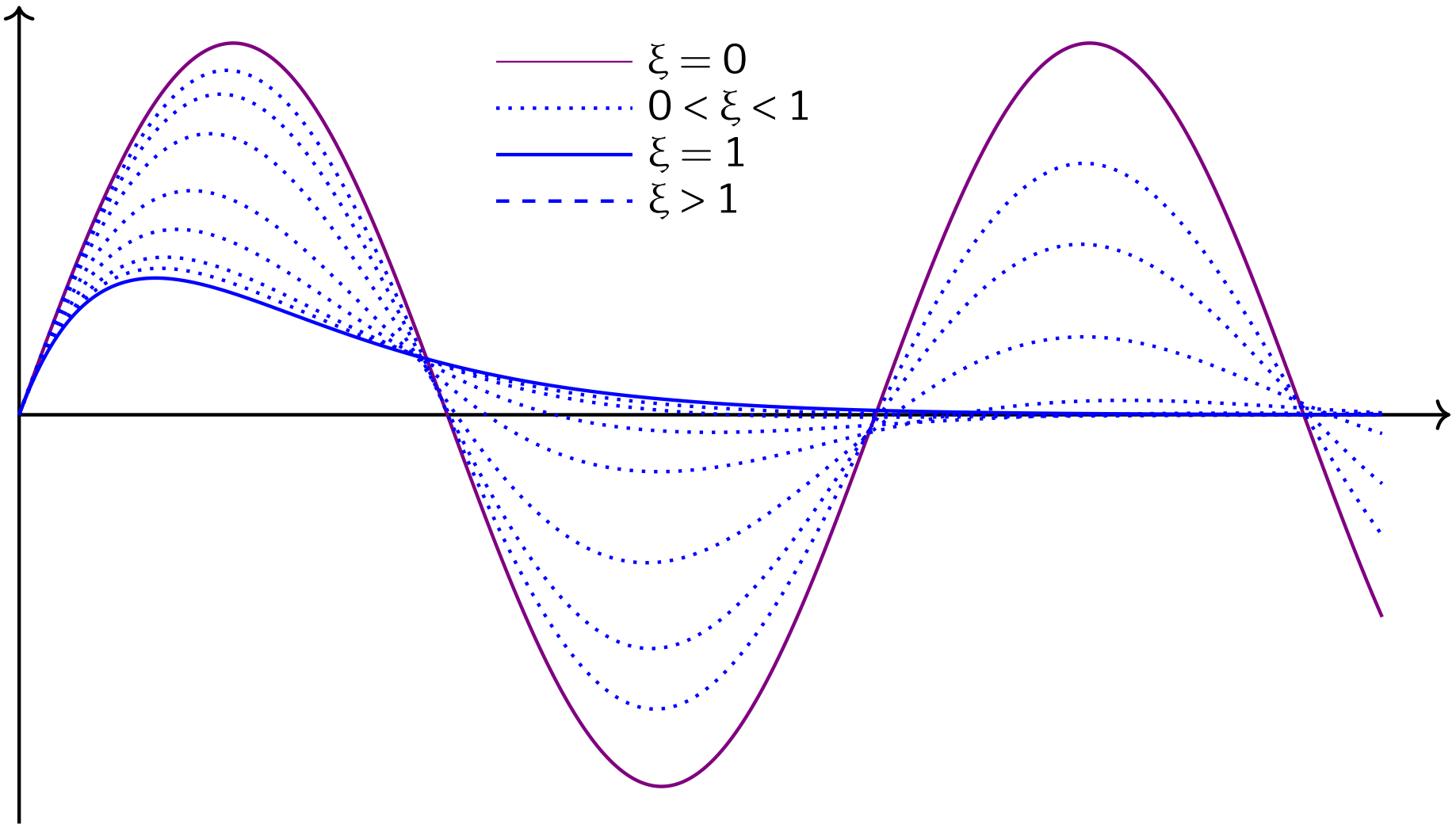
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



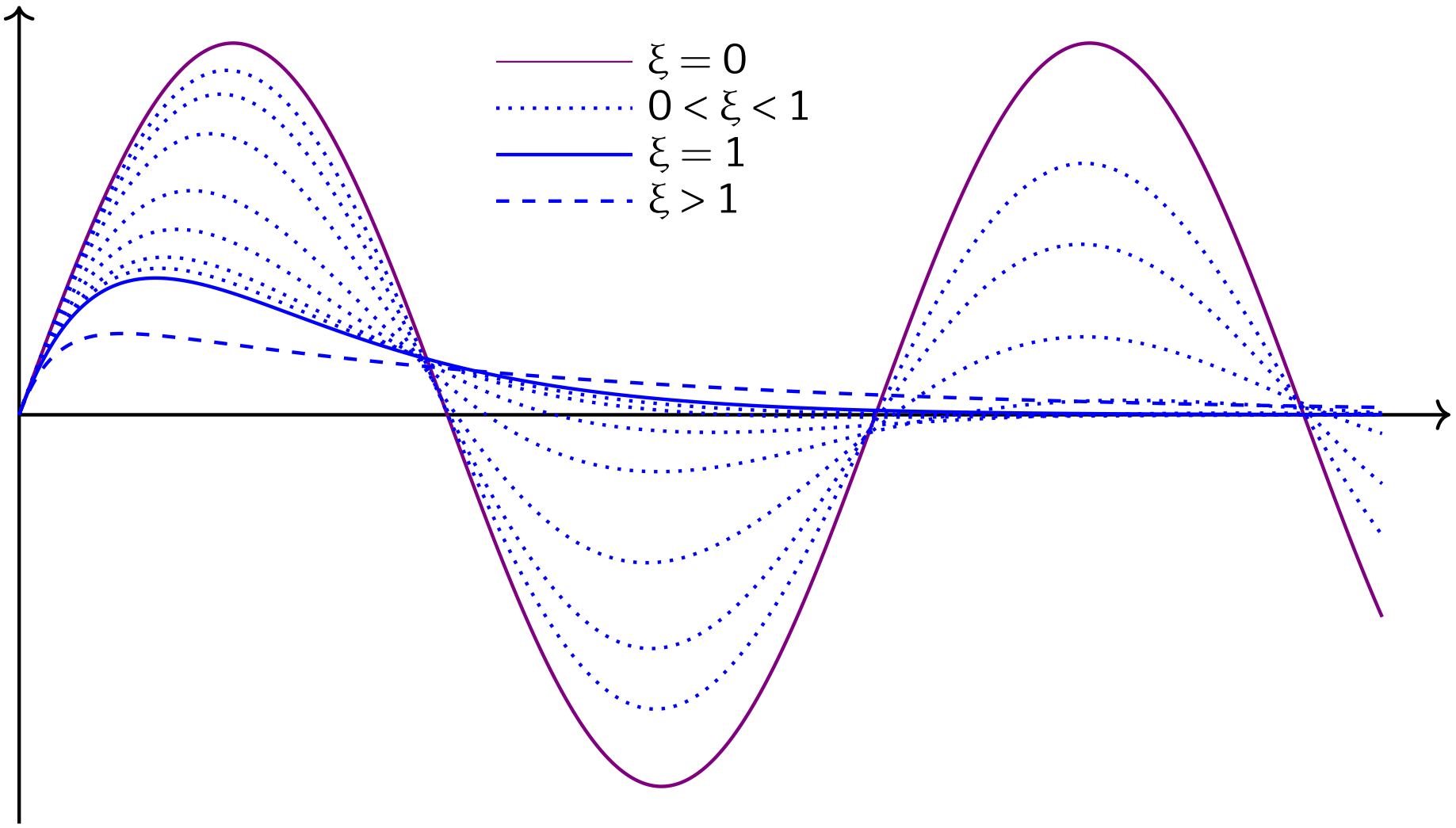
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



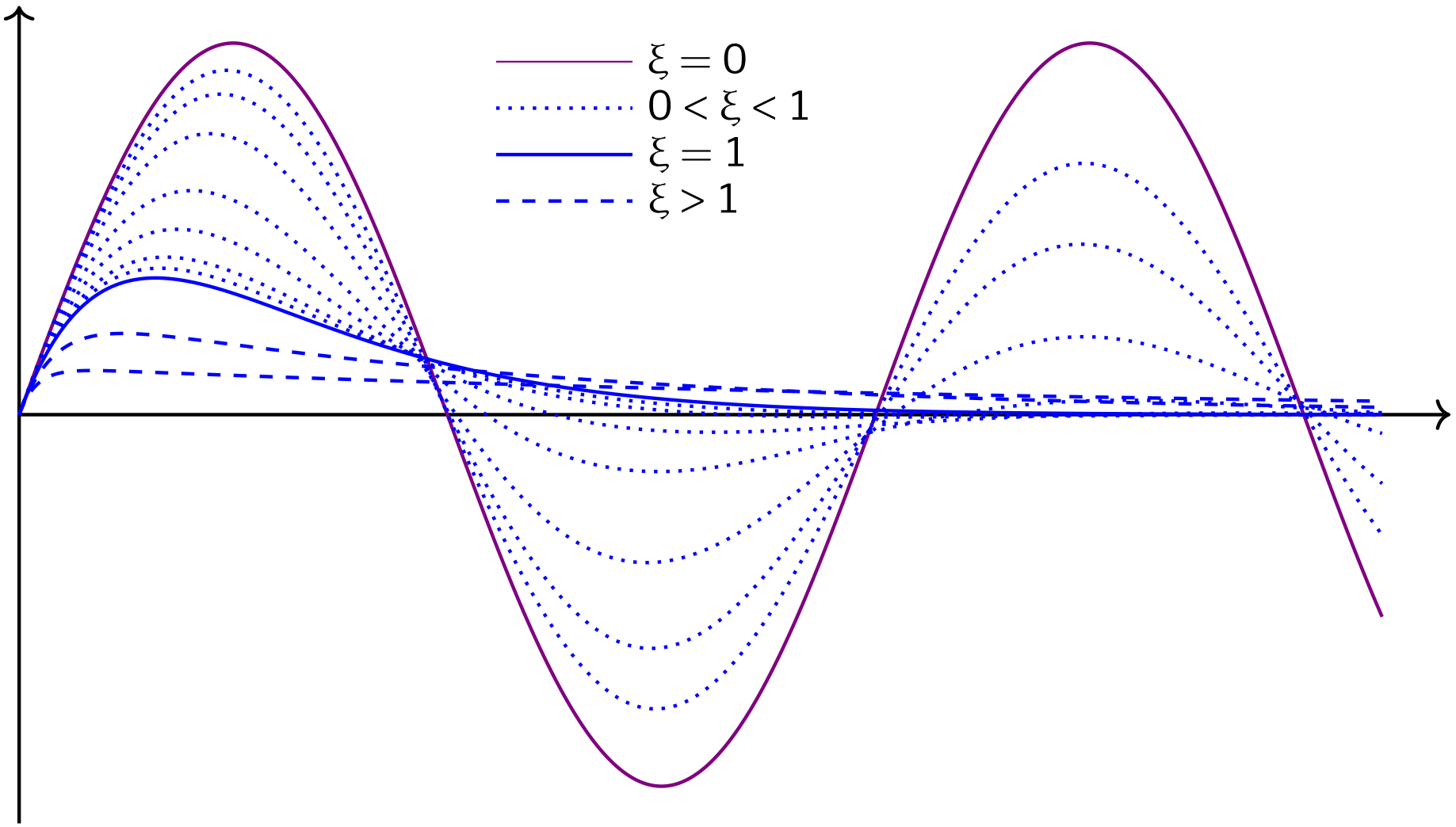
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



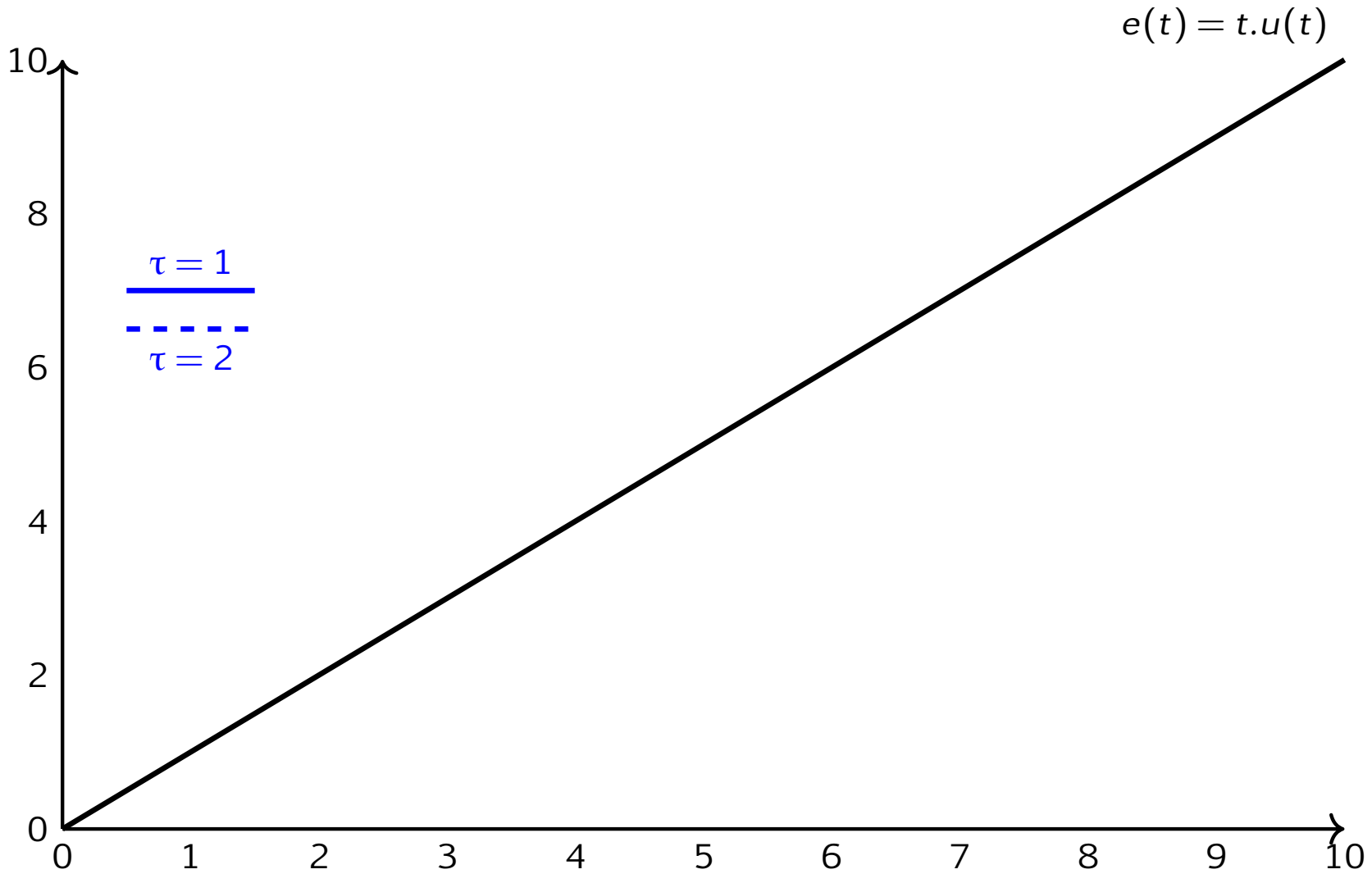
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



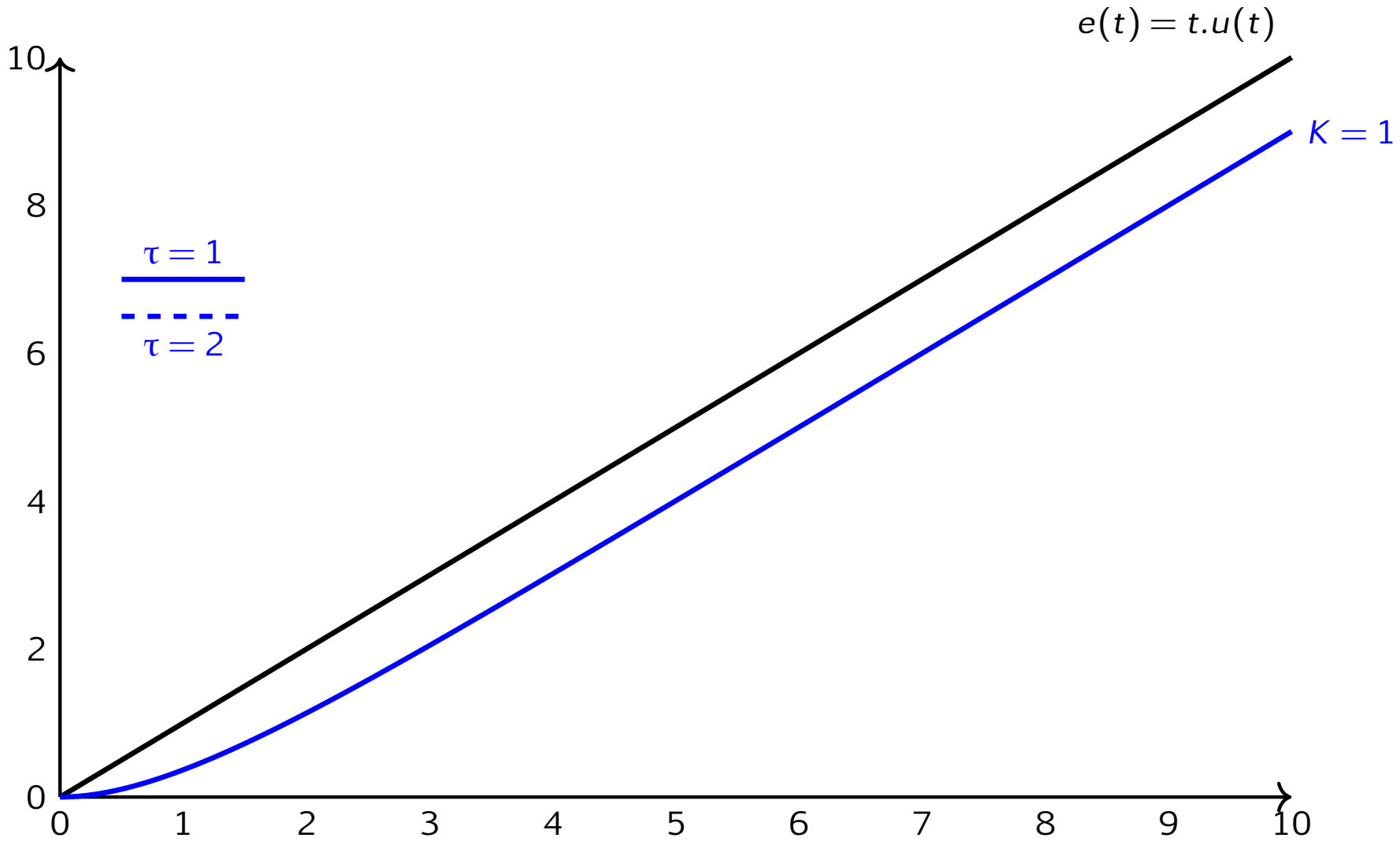
Deuxième ordre (réponse impulsionnelle)



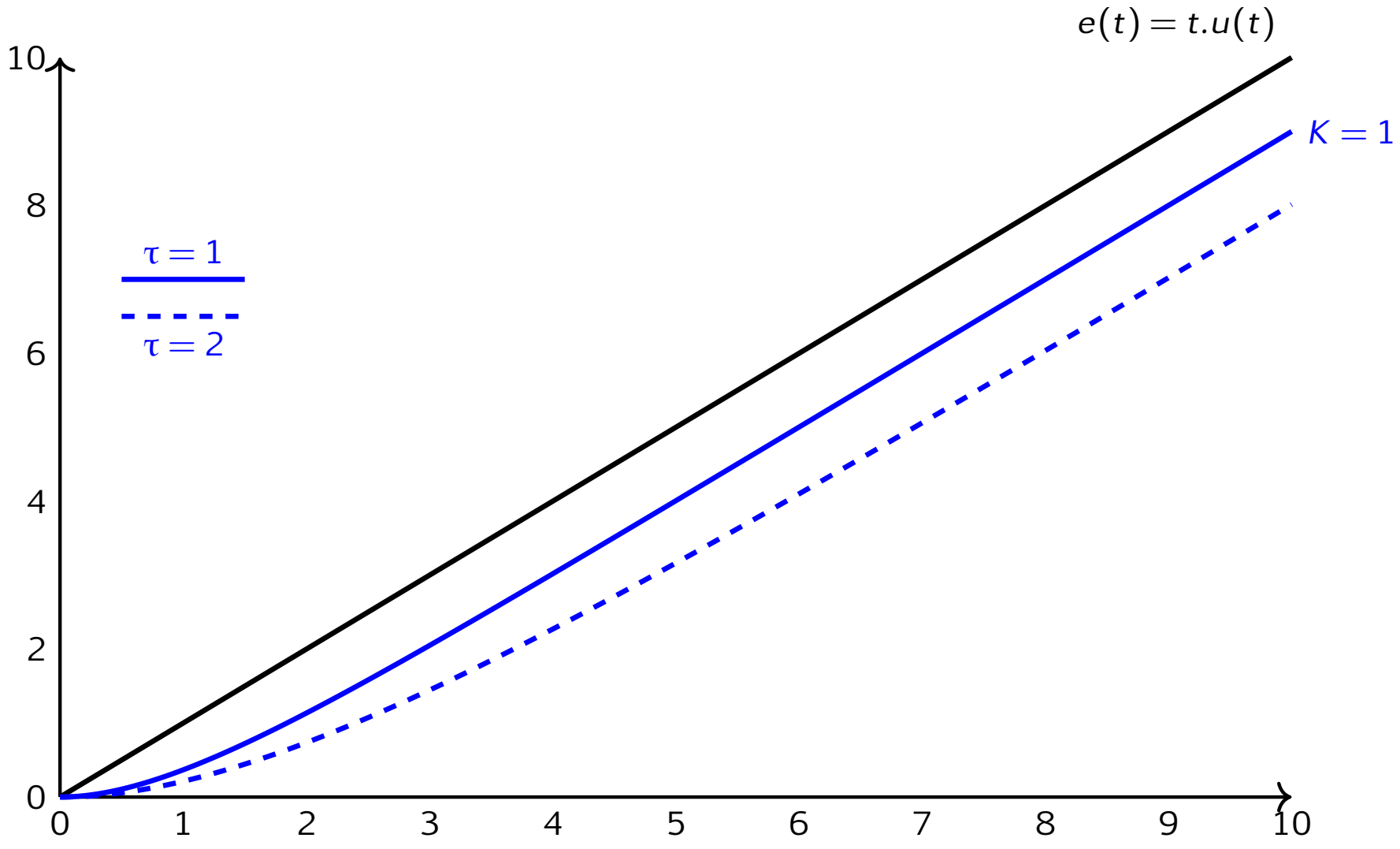
Premier ordre (réponse en poursuite)



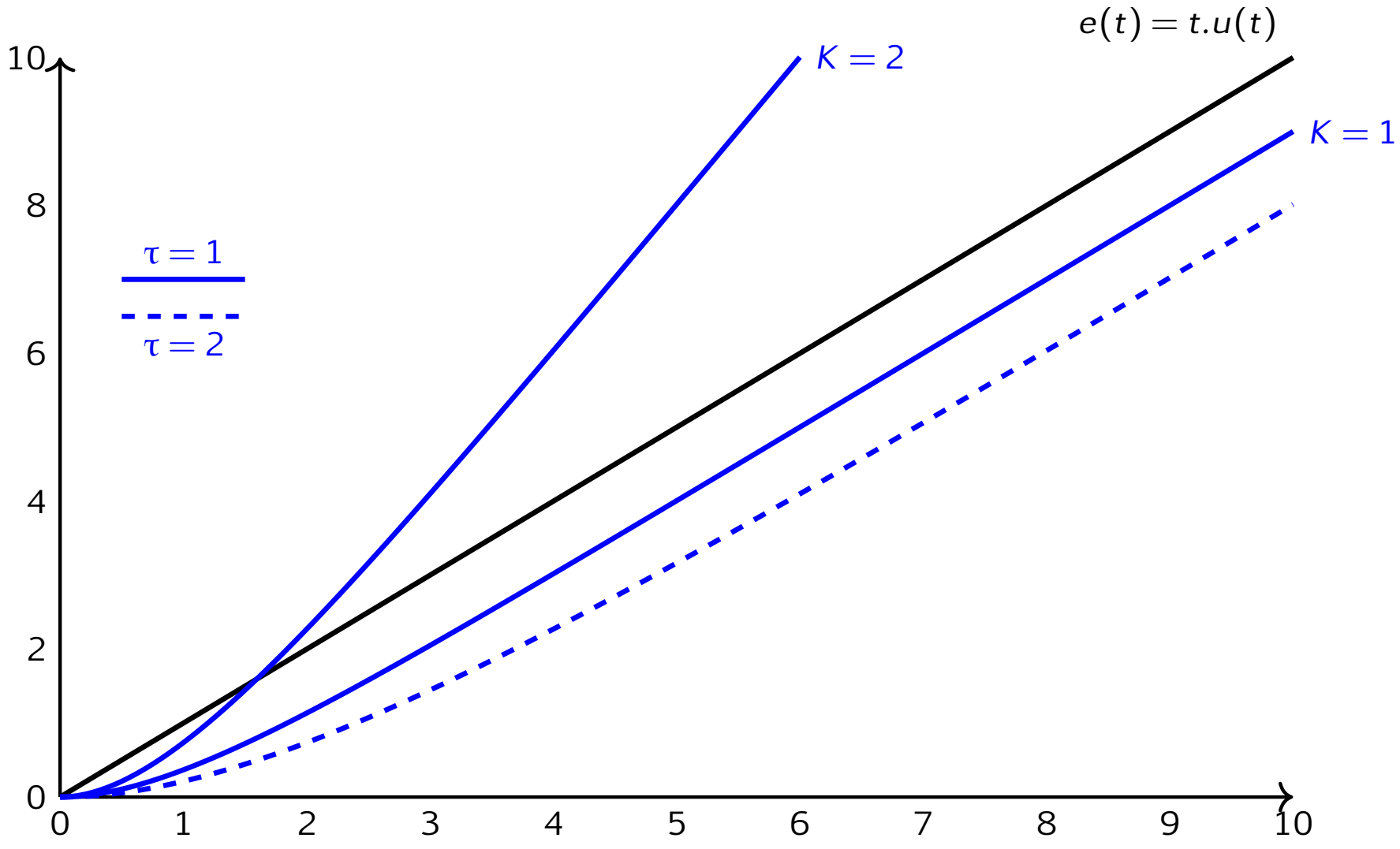
Premier ordre (réponse en poursuite)



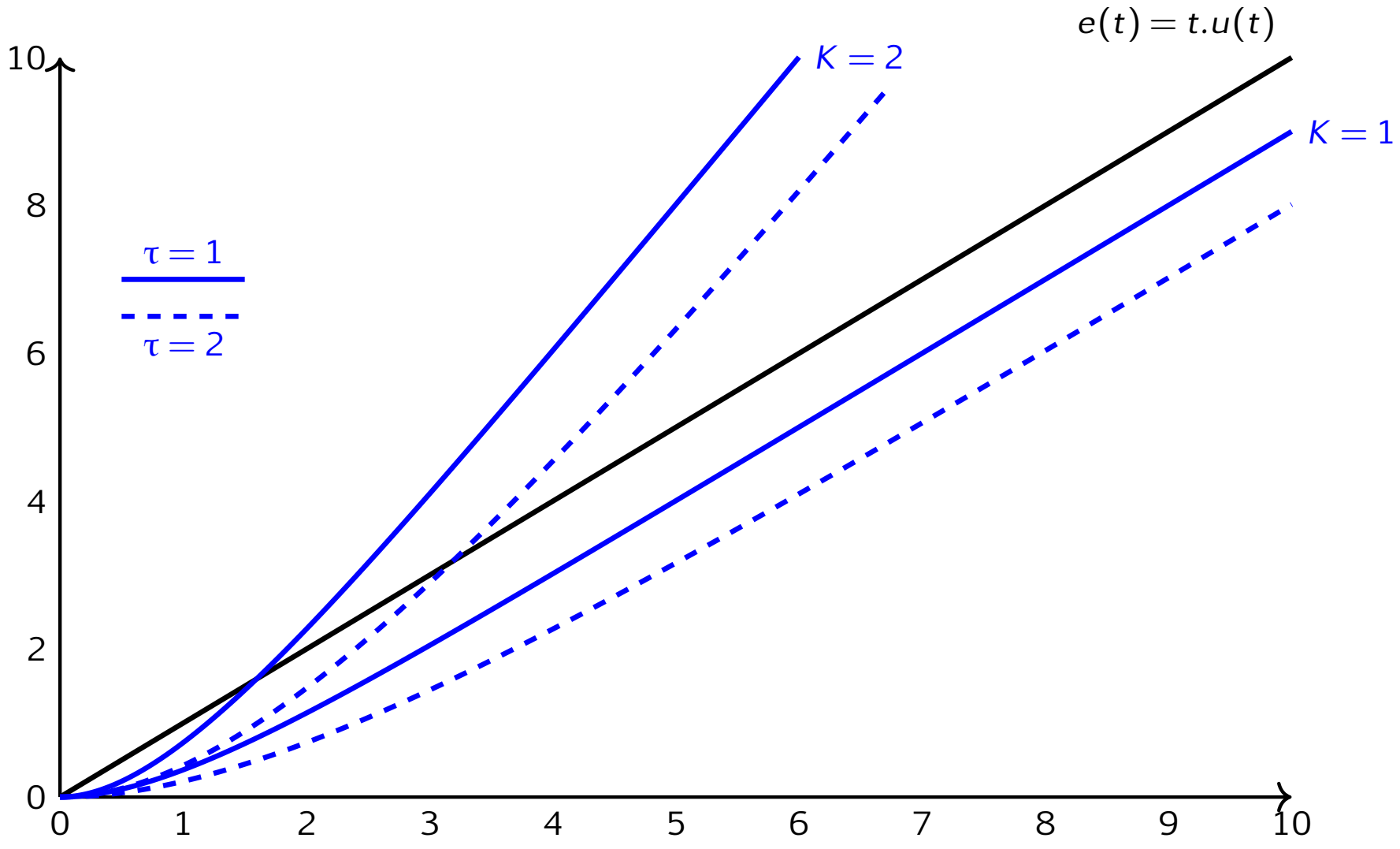
Premier ordre (réponse en poursuite)



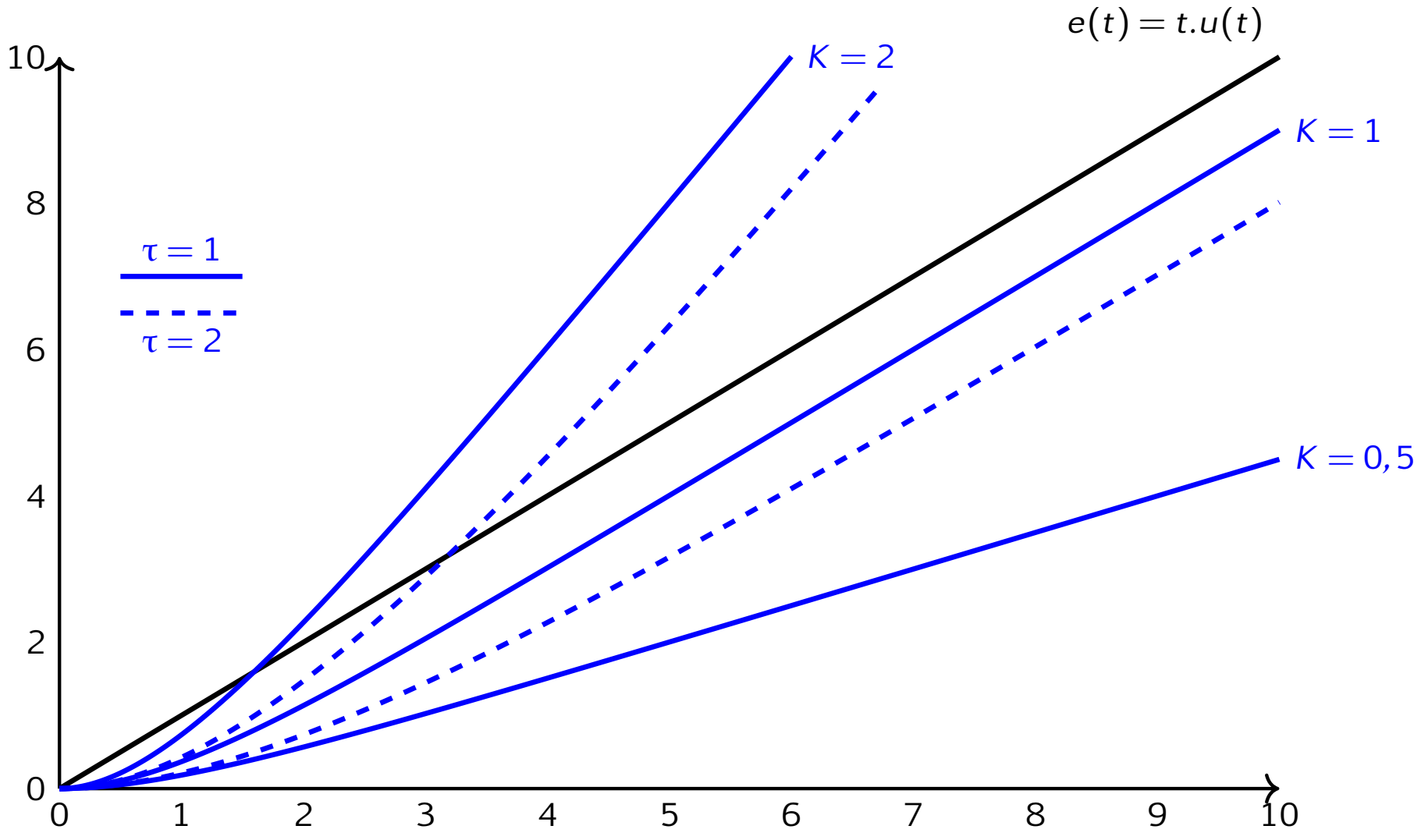
Premier ordre (réponse en poursuite)



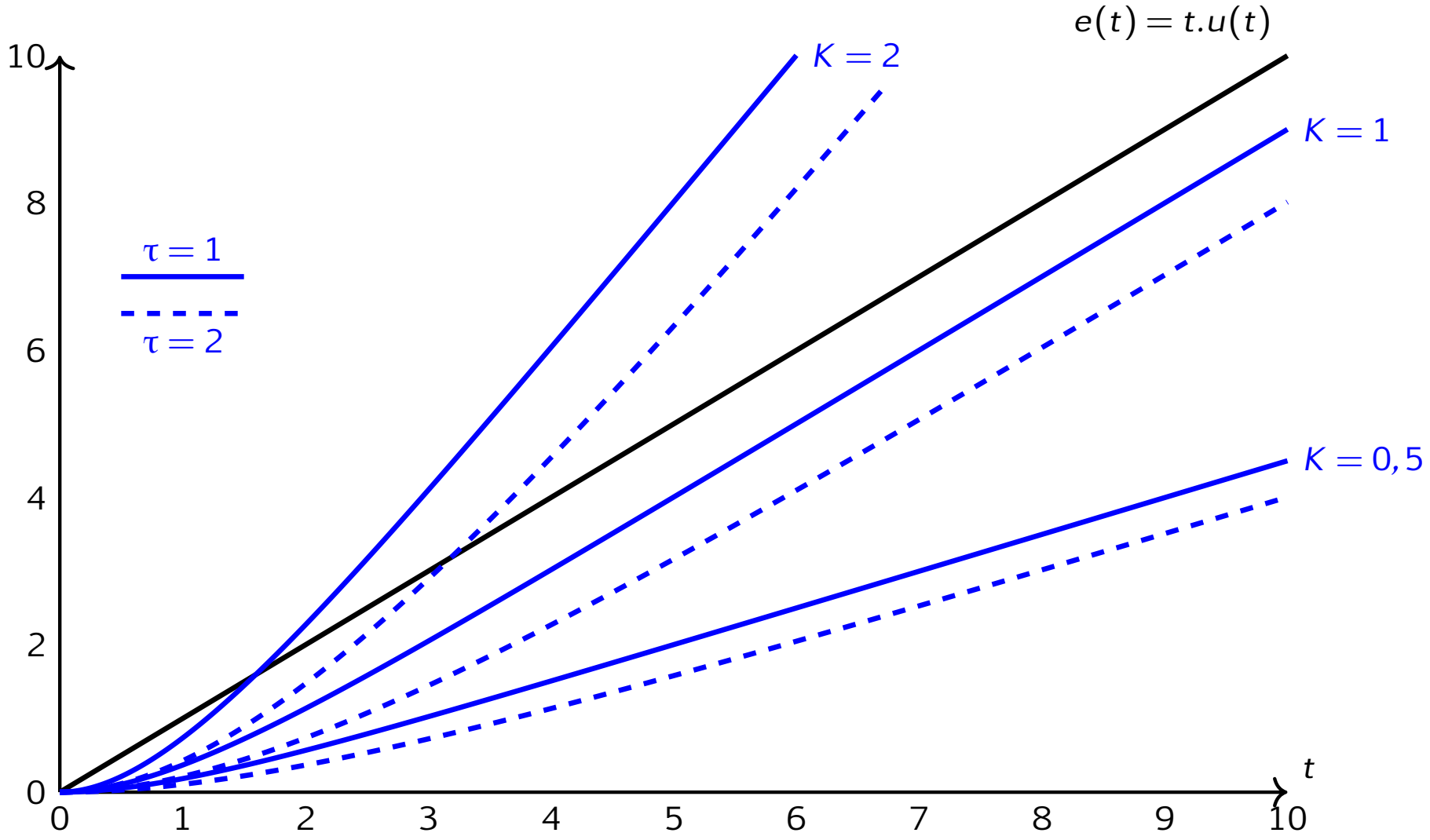
Premier ordre (réponse en poursuite)



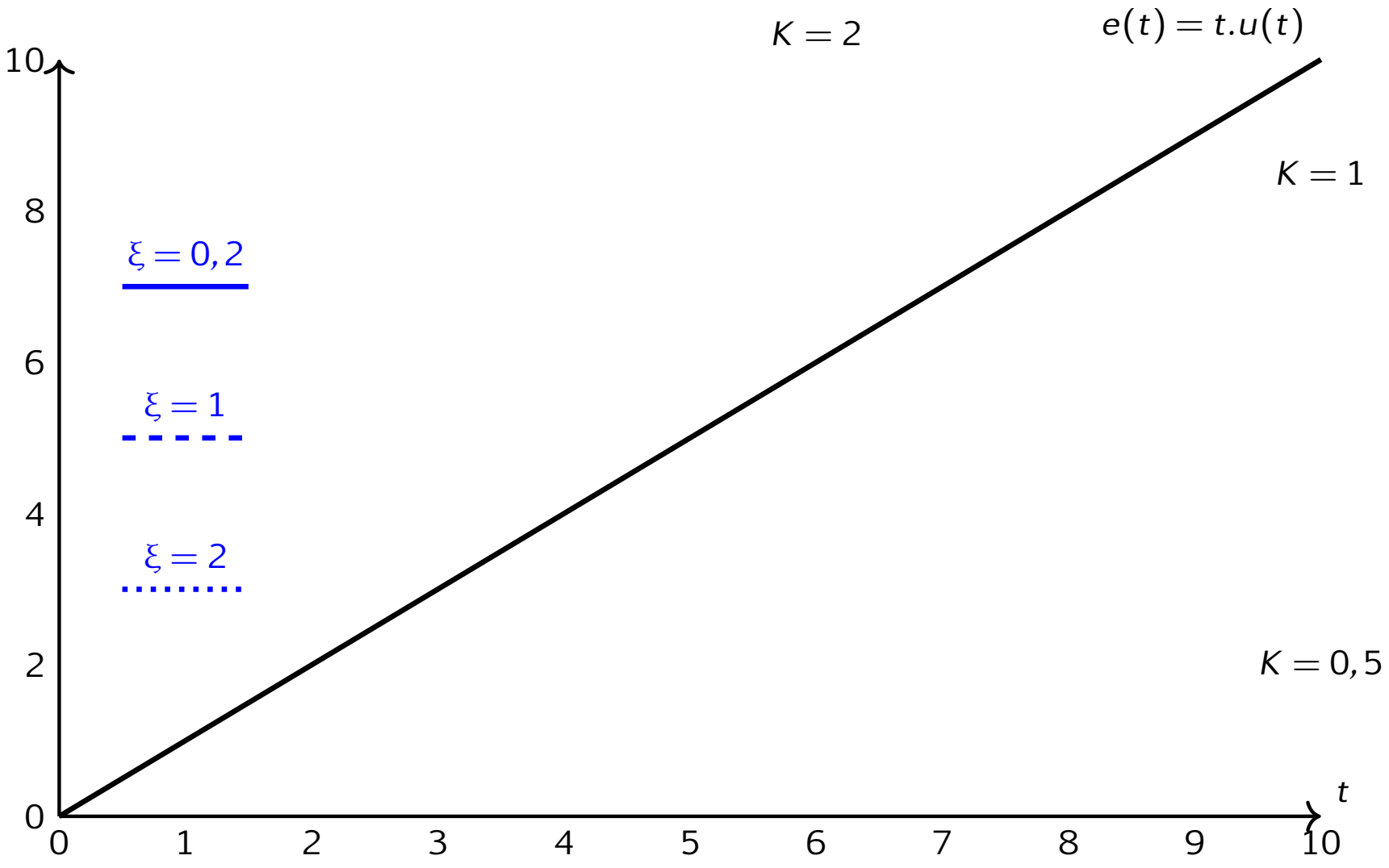
Premier ordre (réponse en poursuite)



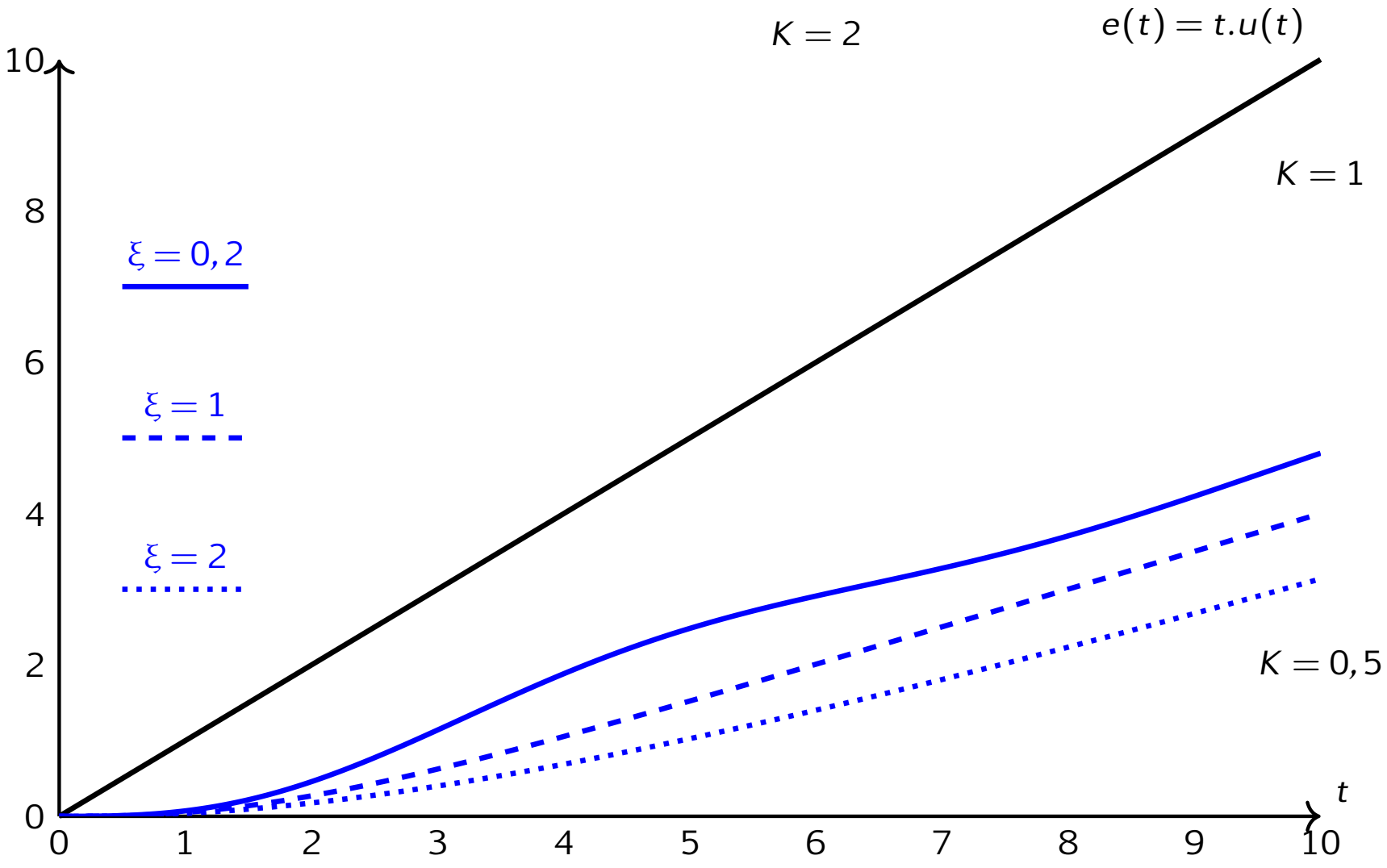
Premier ordre (réponse en poursuite)



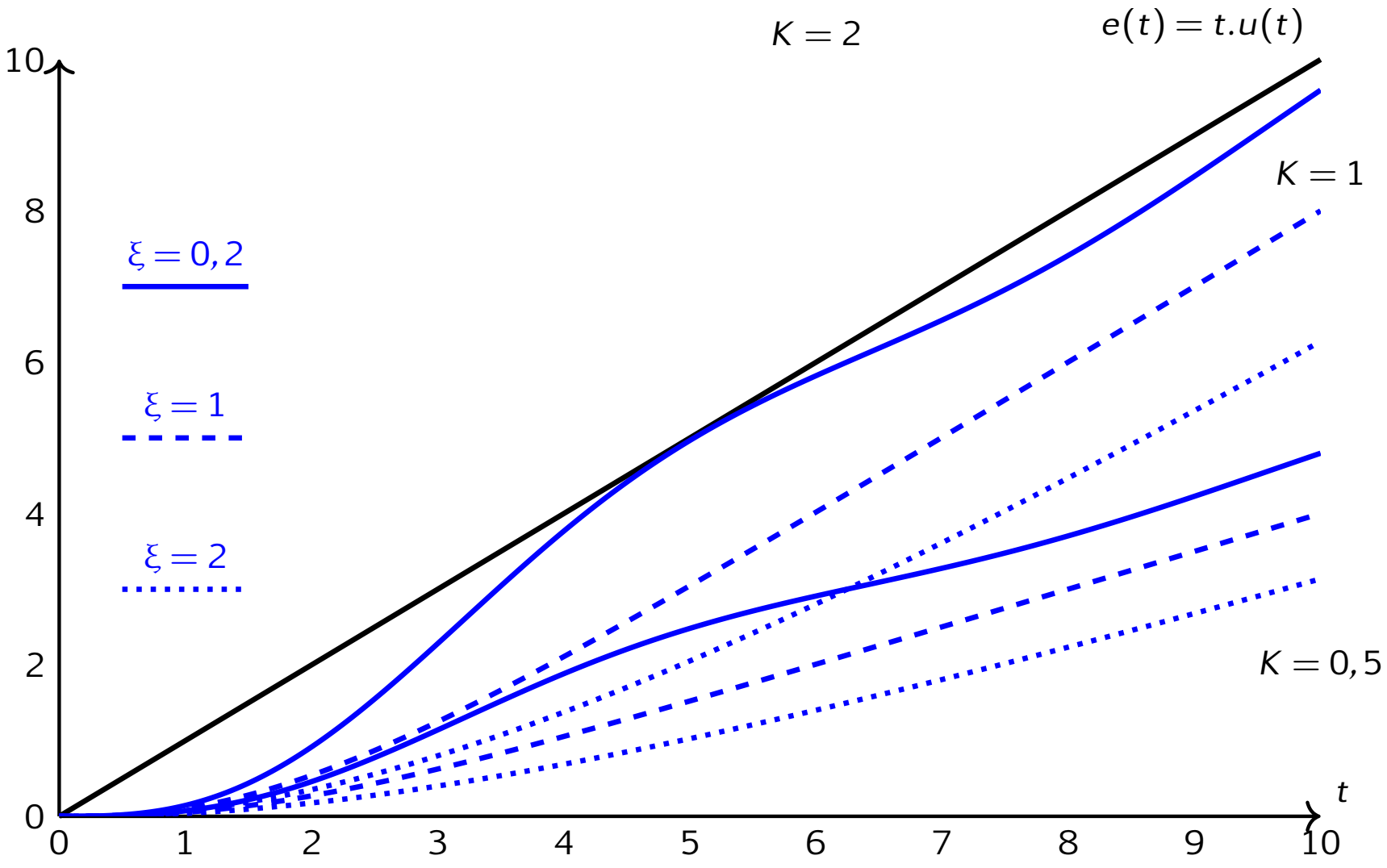
Deuxième ordre (réponse en poursuite)



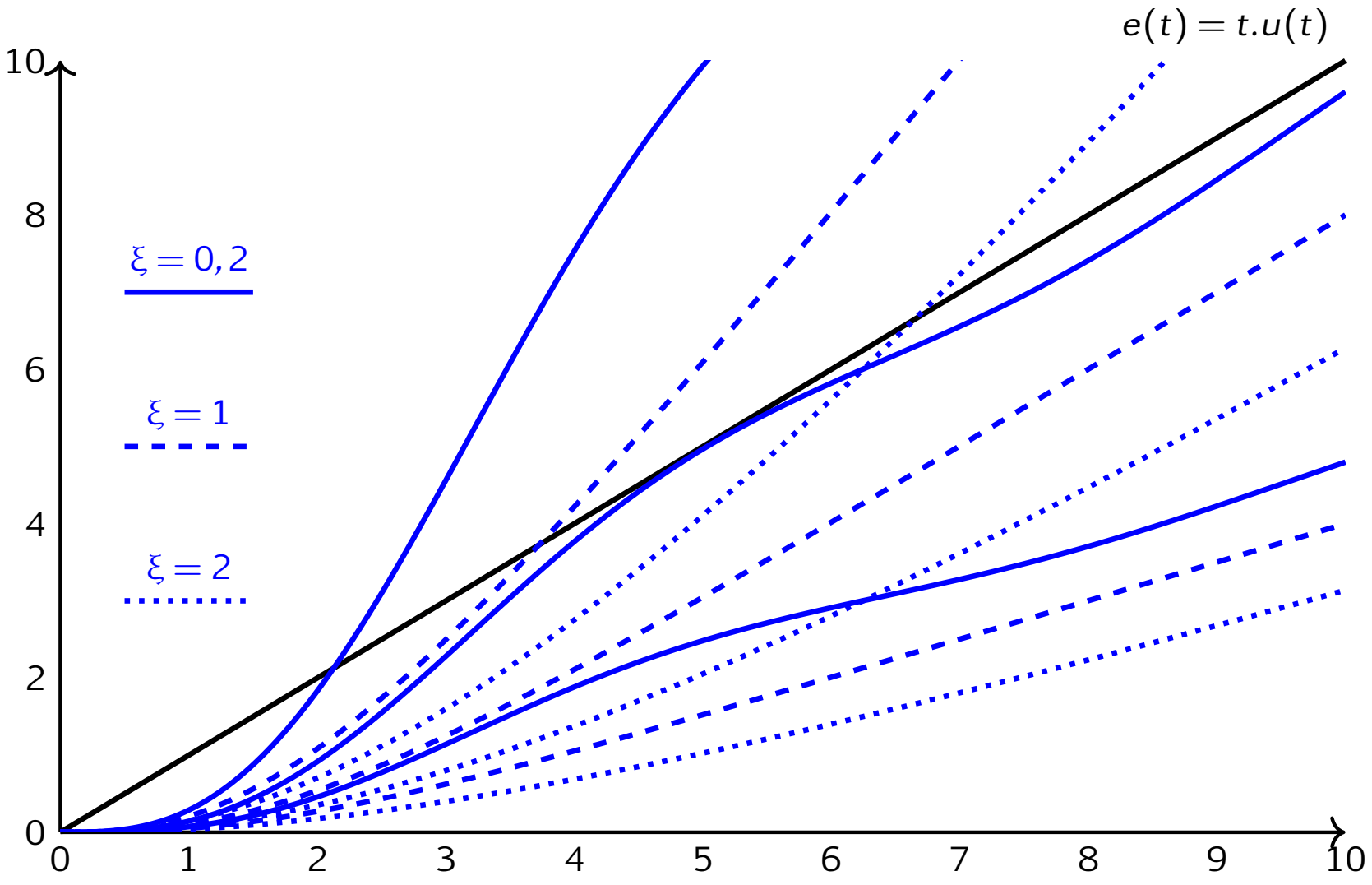
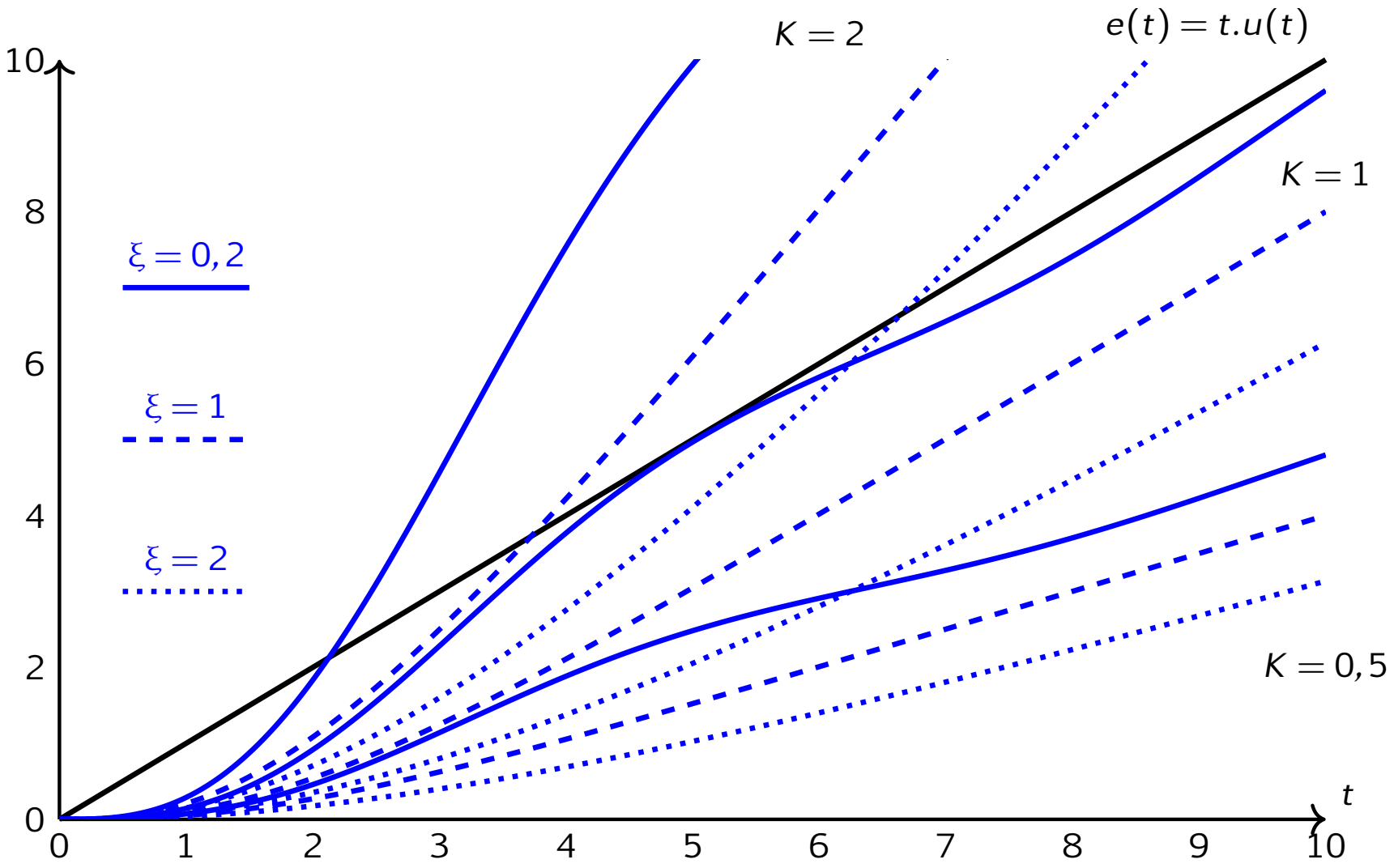
Deuxième ordre (réponse en poursuite)



Deuxième ordre (réponse en poursuite)



Deuxième ordre (réponse en poursuite)



Deuxième ordre (réponse en poursuite)