

CI-2 Prévoir, modifier et vérifier les performances des systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-5 Prévoir et vérifier les performances des SLCI

Germain Gondor

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

Objectifs

MODELISER SIMULER RESOUDRE EXPERIMENTER

A l'issue de la séquence , l'élève doit être capable :

- **C1** Proposer une démarche de résolution
 - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
 - Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
 - Déterminer les performances d'un système asservi.

Sommaire

Définitions

DÉFINITION : Stabilité

Un système est stable si et seulement si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Définitions

DÉFINITION : Stabilité

|| *Un système est stable si et seulement si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.*

En pratique, un système est stable si écarté de sa position d'équilibre (par exemple soumis à une perturbation impulsionnelle), la sortie reste bornée.

Définitions

DÉFINITION : Stabilité

|| *Un système est stable si et seulement si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.*

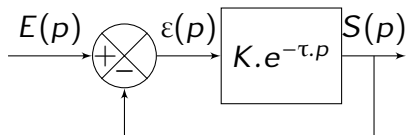
En pratique, un système est stable si écarté de sa position d'équilibre (par exemple soumis à une perturbation impulsionnelle), la sortie reste bornée.

On distingue alors :

- la sortie est bornée mais ne converge pas : système quasistable,
- la sortie converge : système stable.

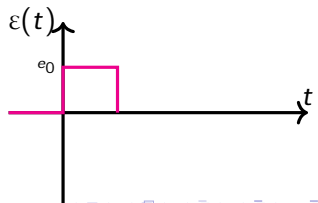
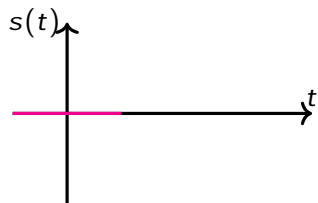
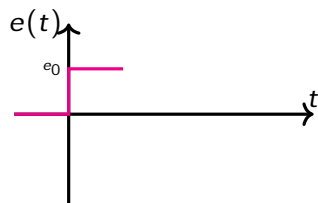
Mise en évidence de l'instabilité

Considérons un système à retour unitaire dont la chaîne directe est modélisée par un gain K et un retard $\tau = T/2$.

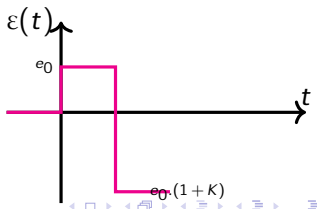
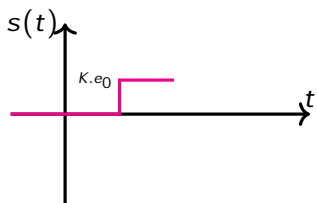
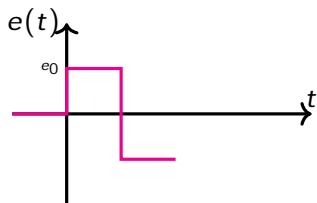


Soumettons ce système à une entrée créneau de période T et d'amplitude e_0 .

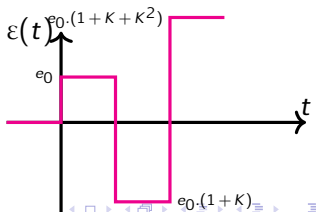
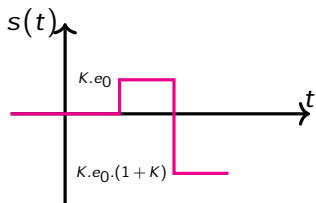
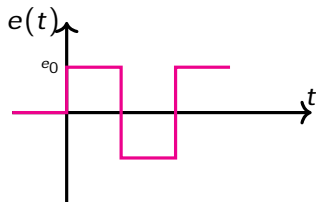
- $0 < t < T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t)$ en retard donc $s(t)$ toujours à 0
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - 0 = e_0$
- $T/2 < t < T$
- $T < t < 3T/2$
- $i.T/2 < t < (i+1).T/2$



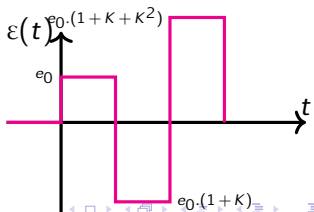
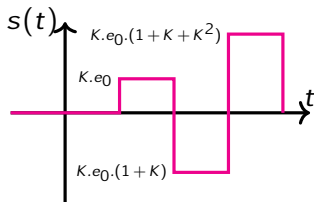
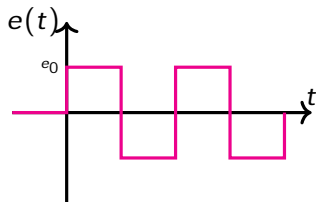
- $0 < t < T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t)$ en retard donc $s(t)$ toujours à 0
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - 0 = e_0$
- $T/2 < t < T$
 $e(t)$ passe à la valeur $-e_0$
 $s(t) = K\varepsilon(t) = Ke_0$
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - K.e_0 = -e_0.(1 + K)$
- $T < t < 3T/2$
- $i.T/2 < t < (i + 1).T/2$



- $0 < t < T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t)$ en retard donc $s(t)$ toujours à 0
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - 0 = e_0$
- $T/2 < t < T$
 $e(t)$ passe à la valeur $-e_0$
 $s(t) = K\varepsilon(t) = Ke_0$
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - K.e_0 = -e_0.(1 + K)$
- $T < t < 3T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t) = K\varepsilon(t) = -K.e_0.(1 + K)$
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 + K.e_0.(1 + K)$
 $\varepsilon = e_0.(1 + K + K^2)$
- $i.T/2 < t < (i + 1).T/2$



- $0 < t < T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t)$ en retard donc $s(t)$ toujours à 0
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - 0 = e_0$
- $T/2 < t < T$
 $e(t)$ passe à la valeur $-e_0$
 $s(t) = K\varepsilon(t) = Ke_0$
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 - K.e_0 = -e_0.(1 + K)$
- $T < t < 3T/2$
 $e(t)$ passe à la valeur e_0
 $s(t) = K\varepsilon(t) = -K.e_0.(1 + K)$
 $\varepsilon = e(t) - s(t) = e_0 + K.e_0.(1 + K)$
 $\varepsilon = e_0.(1 + K + K^2)$
- $i.T/2 < t < (i + 1).T/2$
 $e_i(t)$ passe à la valeur $(-1)^i e_0$
 $s_i(t) = K\varepsilon_{i-1}(t) = (-1)^{i-1}.K.e_0 \left(\sum_{j=0}^{i-1} K^j \right)$
 $\varepsilon_i = e_i(t) - s_i(t) = (-1)^i.K.e_0 \left(\sum_{j=0}^i K^j \right)$
 $\varepsilon_i = (-1)^i.e_0.\frac{1 - K^{i+1}}{1 - K}$



REMARQUE :

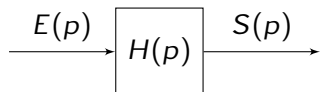
REMARQUE :

- Le système est stable en boucle ouverte. C'est le bouclage qui le rend instable.

REMARQUE :

- Le système est stable en boucle ouverte. C'est le bouclage qui le rend instable.
- Le déphasage d'une demi période (déphasage de τ) et un gain K supérieur à 1 causent l'instabilité. La valeur du gain influe sur la stabilité. Son augmentation tend à rendre les systèmes instables.

Réponse impulsionnelle d'un système asservi



Considérons le système : soumis à un signal impulsionnel:

- $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$
- $S(p) = H(p).E(p) = H(p) = \frac{K}{p^\gamma} \cdot \frac{1 + a_1.p + \dots + a_n.p^n}{1 + b_1.p + \dots + b_m.p^m}$

La réponse $s(t)$ du système dépend de la nature des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (racines du dénominateur) :

- le pôle nul (simple ou multiple) : γ pôles nuls
- les pôles réels (simples ou multiples)
- les pôles complexes conjugués (simples ou multiples).

Pour déterminer la réponse temporelle $s(t)$, il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{b_i}{p^i} + \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(p - a_k)^j} + \sum_{k=1+R}^{C+R} \sum_{q=1}^{m_k} \frac{d_{kq} \cdot p + e_{kq}}{((p - a_k)^2 + \omega_k^2)^q}$$

b_i	réel
a_k	partie réelle des pôles
R	nombre de pôles réels différents
c_{kj}	coefficients réels
m_k	multiplicité associée au $k^{\text{ième}}$ pôle
C	nombre de parties réelles différentes des pôles complexes
ω_k	partie imaginaire du pôle complexe indice k
d_{kq}, e_{kq}	coefficients réels

Il faut chercher la forme, dans le domaine temporel, de ces trois types d'éléments simples, puis discuter de la stabilité de chacun de ces termes. La réponse temporelle pour chaque pôle est appelée **mode** du système.

- Pôle nul : $\mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\gamma} \frac{b_i}{p^i} \right] = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{b_i}{(i-1)!} \cdot t^{i-1}$
- Pôles réels : $\mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(p - a_k)^j} \right] = \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(j-1)!} \cdot t^{j-1} e^{a_k \cdot t}$
- Pôles complexes : $\mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{k=1+R}^{C+R} \sum_{q=1}^{m_k} \frac{d_{kq}p + e_{kq}}{((p - a_k)^2 + \omega_k^2)^q} \right] =$
 $\sum_{k=1+R}^{C+R} \sum_{q=1}^{m_k} \left[A_{kq}(t) \cdot \cos(\omega_k \cdot t) + B_{kq}(t) \cdot \sin(\omega_k(t)) \right] \cdot e^{a_k \cdot t}$
 avec $A_{kq}(t)$ et $B_{kq}(t)$ des polynômes à coefficients réels.

Un système ne peut être **stable** que si **tous** ses modes sont **stables**.

Un système ne peut être **stable** que si **tous** ses modes sont **stables**.

REMARQUE : Un système asservi est donc stable si et seulement si :

Un système ne peut être **stable** que si **tous** ses modes sont **stables**.

REMARQUE : Un système asservi est donc stable si et seulement si :

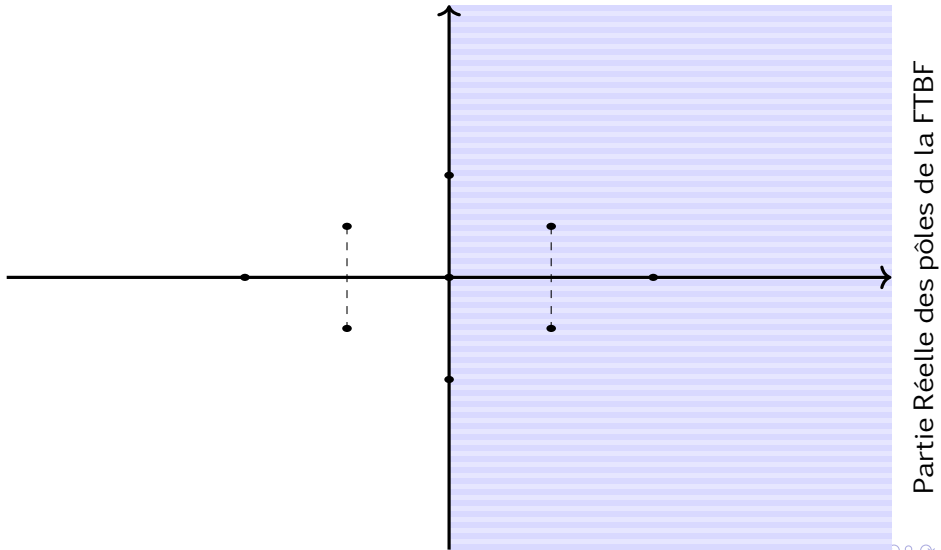
- tous les pôles sont à partie réelle négative.

Un système ne peut être **stable** que si **tous** ses modes sont **stables**.

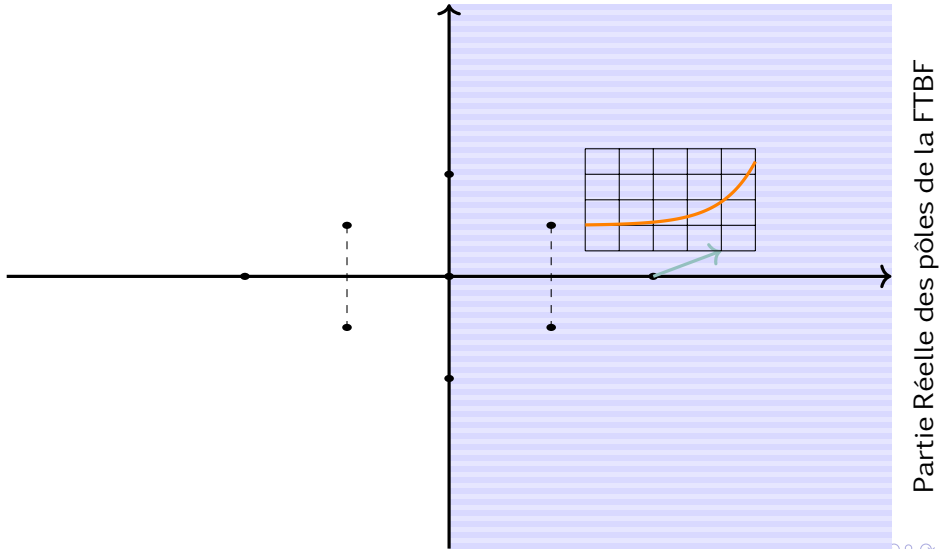
REMARQUE : Un système asservi est donc stable si et seulement si :

- tous les pôles sont à partie réelle négative.
- un pôle nul au plus est présent

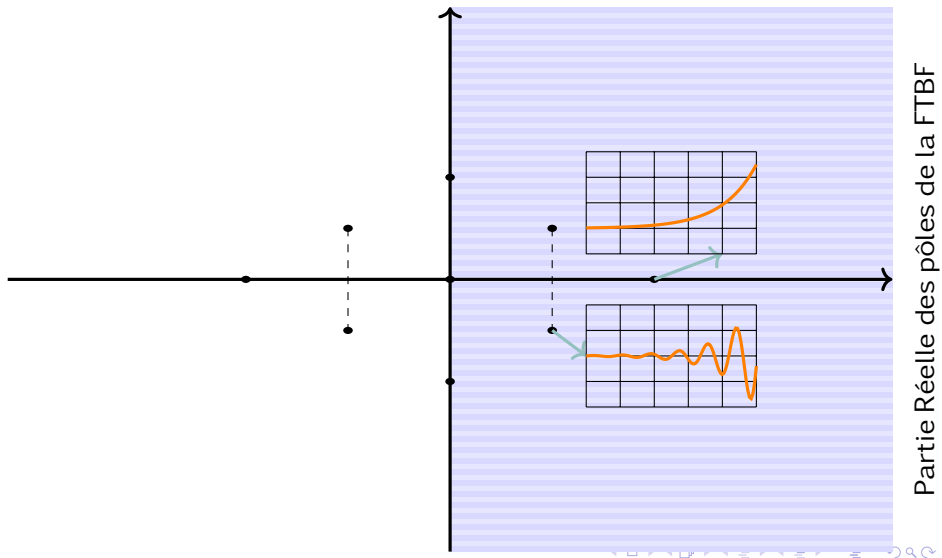
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



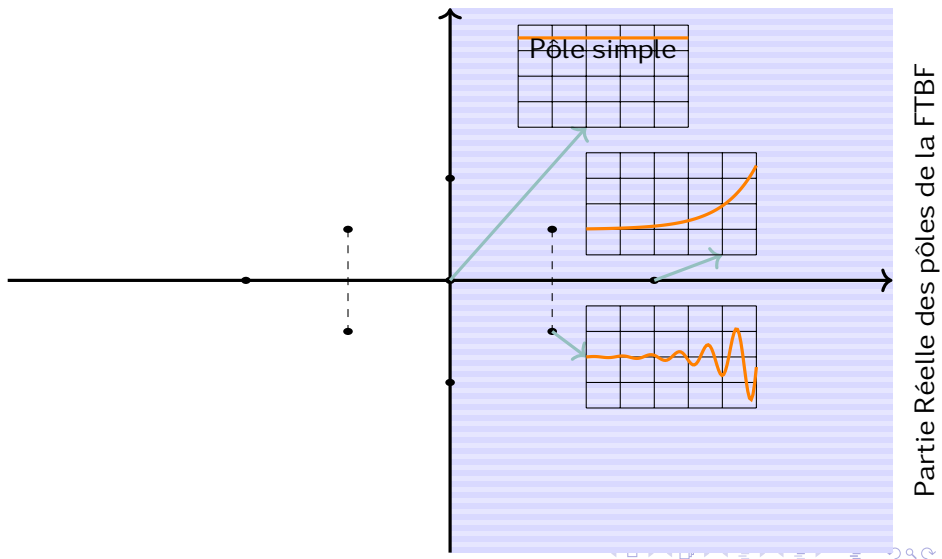
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



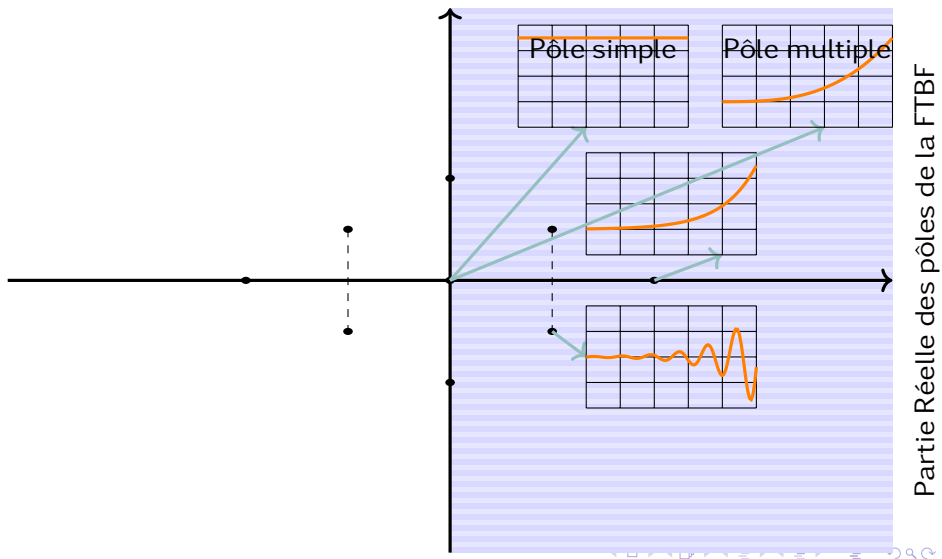
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



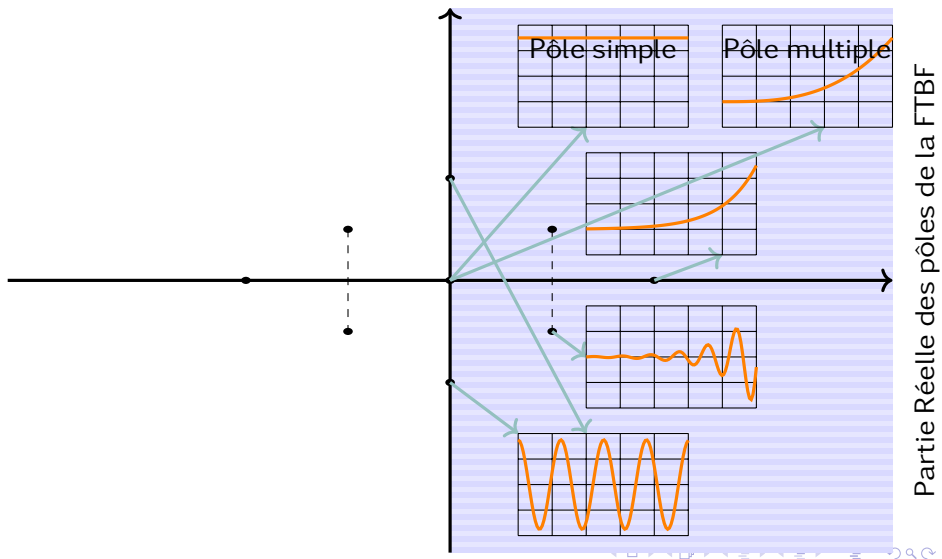
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



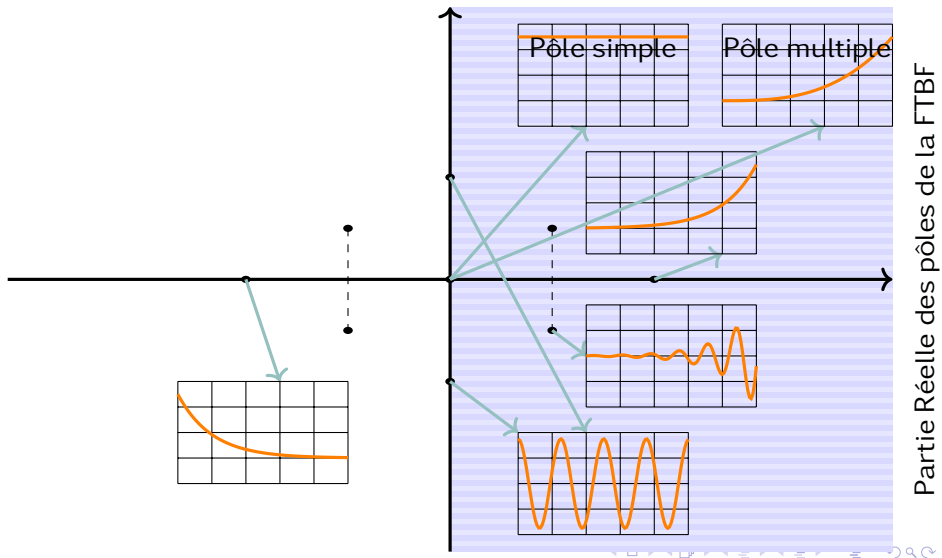
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



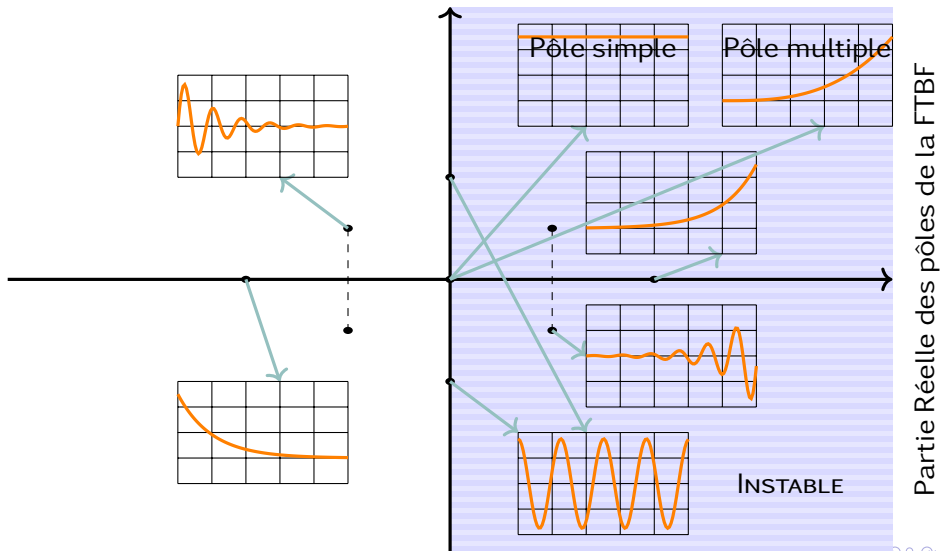
Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



Partie Imaginaire des pôles de la FTBF



Partie Réelle des pôles de la FTBF

Un système ne peut être stable que si tous ses modes sont stables.
Pôles dominants :

Les pôles dont la partie réelle est très petite (grande en valeur absolue) sont rapidement amortis et influencent peu la réponse globale du système (dès que le temps t augmente).

En conséquence, des modélisations simplifiées seront souvent considérées en ne gardant que les pôles les plus proches de l'axe des Imaginaires. Ces pôles sont dits dominants.

Critère algébrique de stabilité ou critère de Routh

L'analyse des pôles de la fonction de transfert permet de conclure sur la stabilité du système. Le critère de Routh est une technique mathématique permettant de déterminer si un polynôme présente des racines à parties réelles positives.

Le critère de Routh se compose de 2 conditions :

- **Condition 1** : une condition nécessaire pour qu'un système soit stable est que tous les coefficients de l'équation caractéristique (dénominateur de la FTBF) soient de même signe et qu'il y ait au plus un pôle nul.
- **Condition 2** : Dans la mesure où la première condition est respectée, cette seconde condition nécessaire et suffisante porte sur les coefficients de la première colonne de la table suivante construite, à partir des coefficients de la FTBF

$$FTBF(p) = \frac{K}{p^\gamma} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}$$

p^m	b_m	b_{m-2}	b_{m-4}	\dots
p^{m-1}	b_{m-1}	b_{m-3}	b_{m-5}	
p^{m-2}	c_1	c_2		
p^{m-3}	d_1	d_2		
\dots				
p^0				

avec:

$$c_1 = -\frac{1}{b_{m-1}} \begin{vmatrix} b_m & b_{m-2} \\ b_{m-1} & b_{m-3} \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_{m-1}} \begin{vmatrix} b_m & b_{m-4} \\ b_{m-1} & b_{m-5} \end{vmatrix}$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

On construit la table horizontalement et verticalement jusqu'à obtenir des zéros.

REMARQUES :

On construit la table horizontalement et verticalement jusqu'à obtenir des zéros.

REMARQUES :

- Le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à parties réelles positives.

On construit la table horizontalement et verticalement jusqu'à obtenir des zéros.

REMARQUES :

- Le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à parties réelles positives.
- Un zéro dans la première colonne sera généralement considéré comme un changement de signes sauf si toute la ligne est nulle (cas très particuliers laissés de côté).

On construit la table horizontalement et verticalement jusqu'à obtenir des zéros.

REMARQUES :

- Le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à parties réelles positives.
- Un zéro dans la première colonne sera généralement considéré comme un changement de signes sauf si toute la ligne est nulle (cas très particuliers laissés de côté).

EXEMPLE : Discutez de la stabilité des systèmes représentés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\bullet F(p) = \frac{5}{1 + 6.p - 3.p^2 + 3.p^3 + p^4}$$

$$\bullet F(p) = \frac{10.p + 3}{1 + 6.p + 3.p^2 + 3.p^3 + p^4}$$

$$\bullet F(p) = \frac{1}{1 + K + 3.p + 3.p^2 + p^3}$$

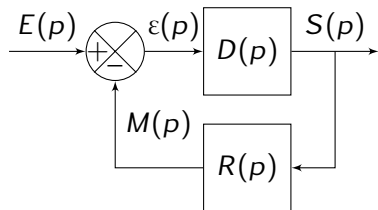
Limites du critère

L'utilisation de ce critère permet de fournir l'information sur la stabilité du système en boucle fermée.

Or les coefficients de la fonction de transfert sont déterminés par des valeurs approchées (résultats d'une identification expérimentale, d'approximations dues à la modélisation). Ce critère sera peu utilisé par l'ingénieur qui doit définir des marges de stabilité ce que le critère de Routh ne permet pas.

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et stabilité en BF

Considérons le système asservi en BF suivant :



$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}$$

La FTBO s'écrit $FTBO(p) = D(p).R(p)$ et l'équation caractéristique vaut : $1 + FTBO(p) = 0$ (équation identique quelque soit la position de l'entrée ou de la perturbation).

Les critères graphiques permettent de conclure sur la stabilité en BF en étudiant la position de la courbe décrite par la FTBO par rapport au point $-1 = e^{i \cdot \pi}$.

Le point caractéristique est appelé point critique :

- sa phase vaut -180°
- son module vaut 1

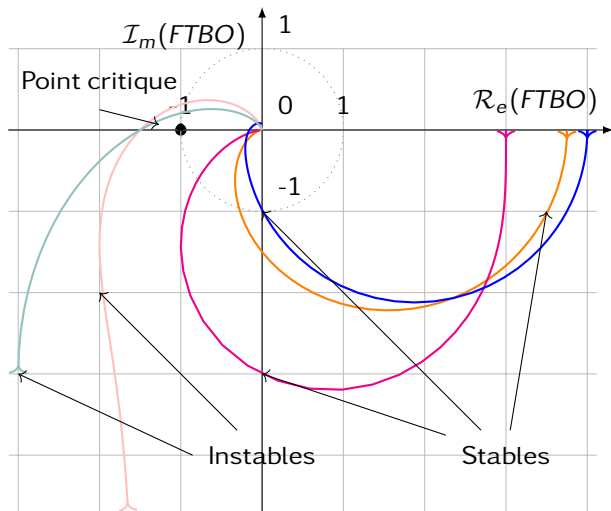
Critère du Revers

Le critère du Revers est obtenu à partir des théorèmes de Cauchy (qui ne sont pas à votre programme, mais dont les propriétés sont à connaître).

Énoncé dans le diagramme de Nyquist

ÉNONCE : Critère du Revers dans le diagramme de Nyquist

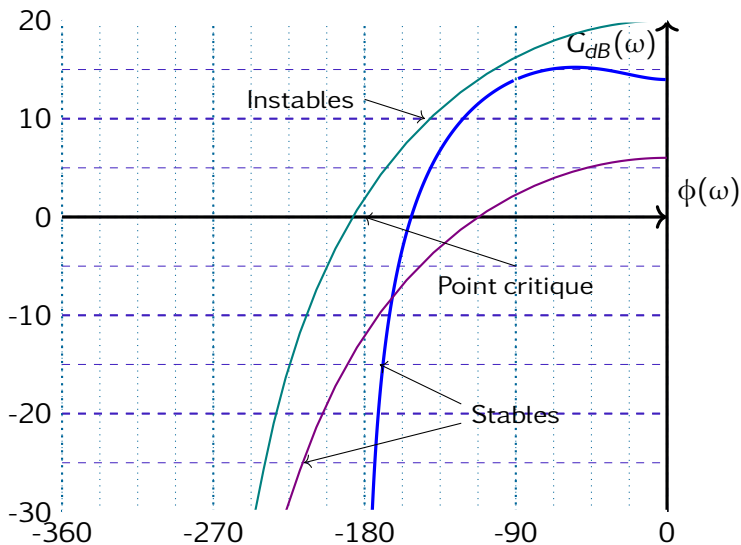
Un système asservi est stable en BF si en décrivant, dans le diagramme de Nyquist, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique à gauche de la courbe.



Énoncé dans le diagramme de Black

ÉNONCE : Critère du Revers dans le diagramme de Black

Un système asservi est stable en BF si en décrivant, dans le diagramme de Black, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes on laisse le point critique à droite de la courbe.



Stabilité dans le diagramme de Bode

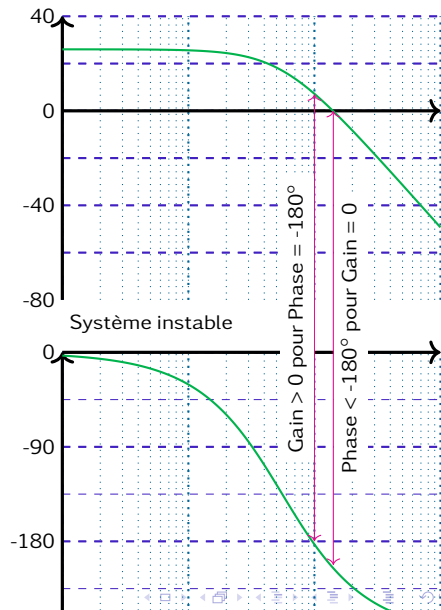
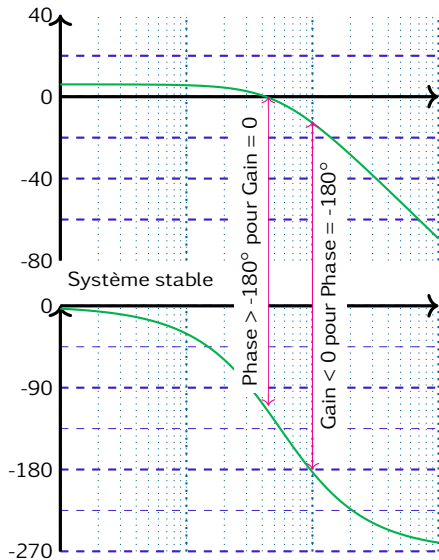
ÉNONCÉ : Stabilité dans les diagrammes de Bode

Un système asservi est stable en BF si :

- *la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est supérieure à -180° pour la pulsation de coupure (gain en dB égal à zéro)*
- *le gain (en dB), correspondant à la pulsation pour laquelle la phase de la FTBO vaut -180° , est négatif.*

REMARQUE : Lorsque la réponse fréquentielle de la FTBO passe par le point critique, le système est quasi stable (réponse temporelle à un échelon du type sinus).

Stabilité dans le diagramme de Bode



Marges de stabilité

DÉFINITION : Marge de stabilité

|| *Grandeur au delà de laquelle il faut rester éloigné pour que l'on soit assuré de la stabilité du système.*

La marge de stabilité est une mesure de la **distance** entre le **point critique** et la courbe de **réponse fréquentielle en boucle ouverte** (BO).

Marges de stabilité

La direction de mesure définit la marge de stabilité étudiée :

- Mesure parallèlement à l'axe des gains (dans Black) : marge de gain,
- Mesure parallèlement à l'axe des phases (dans Black) : marge de phase,
- Mesure suivant les isomodules de la FTBF (dans l'abaque de Black) : marge de module.

Les deux marges de stabilité les plus couramment utilisées sont les **marges de phase** et la **marge de gain**.

Marge de gain et de phase

DÉFINITION : Marge de gain

La marge de gain, exprimée en dB, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain (dB).

Marge de gain et de phase

DÉFINITION : Marge de gain

La marge de gain, exprimée en dB, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain (dB).

$$\text{Marge de gain} = M_G = 0_{dB} - \text{Gain}(\text{FTBO}(\omega_{\phi=-180^\circ}))$$

Marge de gain et de phase

DÉFINITION : Marge de gain

La marge de gain, exprimée en dB, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain (dB).

$$\text{Marge de gain} = M_G = 0_{dB} - \text{Gain}(FTBO(\omega_{\phi=-180^\circ}))$$

DÉFINITION : Marge de phase

La marge de phase, exprimée en degré, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase (en degré).

Marge de gain et de phase

DÉFINITION : Marge de gain

La marge de gain, exprimée en dB, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain (dB).

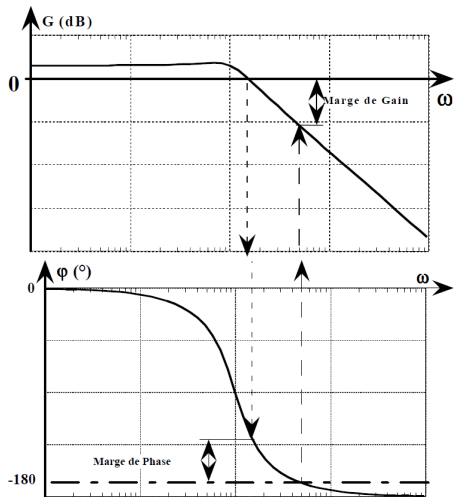
$$\text{Marge de gain} = M_G = 0_{dB} - \text{Gain}(\text{FTBO}(\omega_{\phi = -180^\circ}))$$

DÉFINITION : Marge de phase

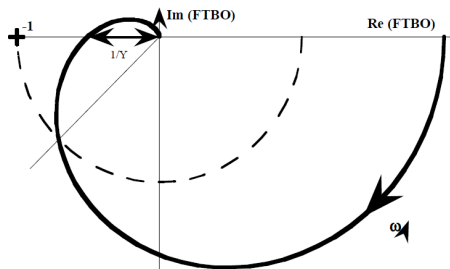
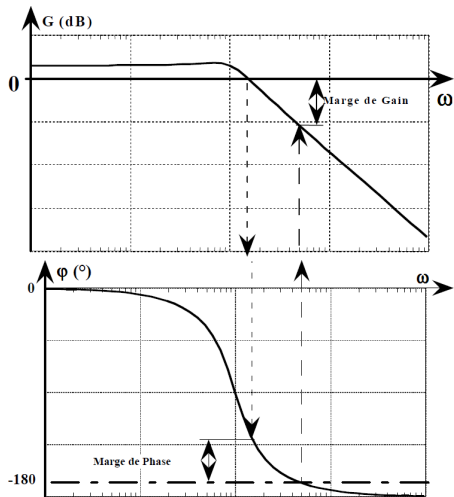
La marge de phase, exprimée en degré, est la distance entre le lieu de transfert de la FTBO, du système asservi étudié, et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase (en degré).

$$\text{Marge de phase} = M_\phi = 180^\circ + \text{Phase}(\text{FTBO}(\omega_{G=0_{dB}}))$$

Représentation des marges sur les diagrammes



Représentation des marges sur les diagrammes



Représentation des marges sur les diagrammes

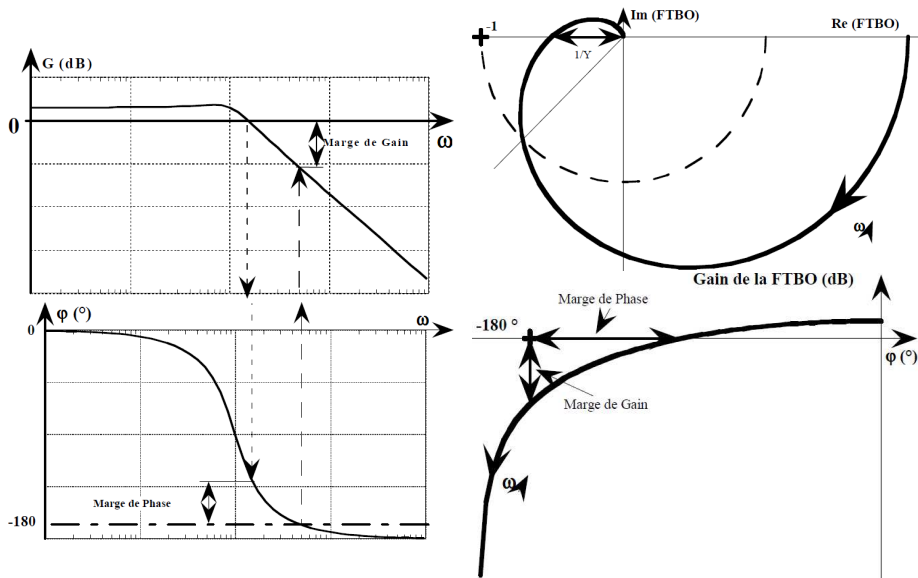


Diagramme de Nyquist

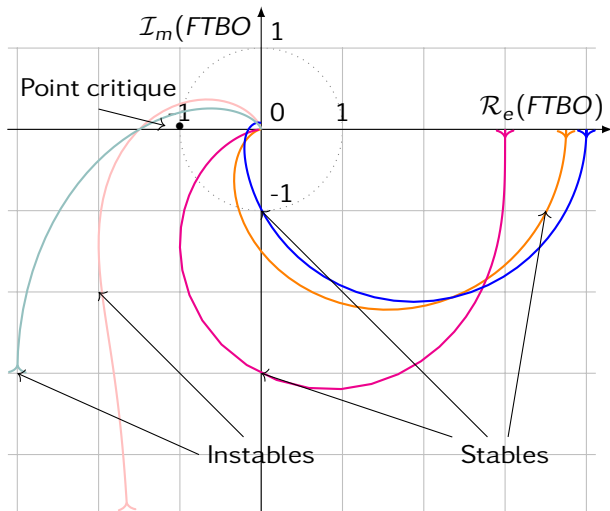
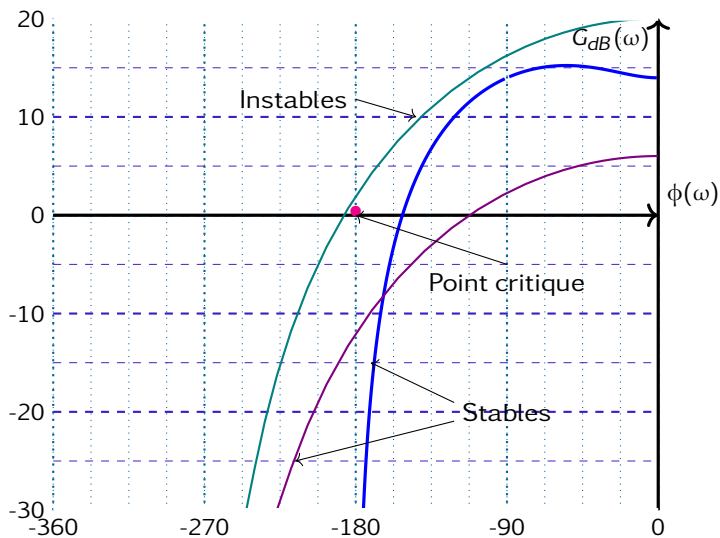
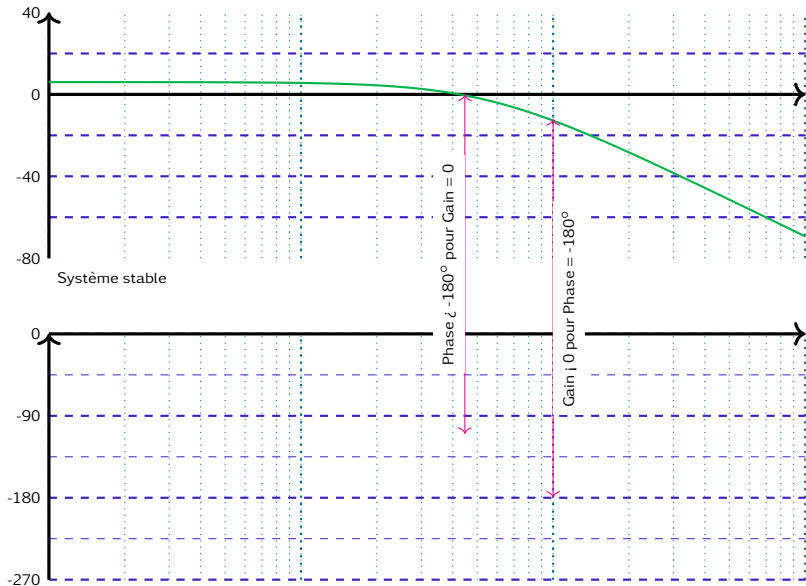


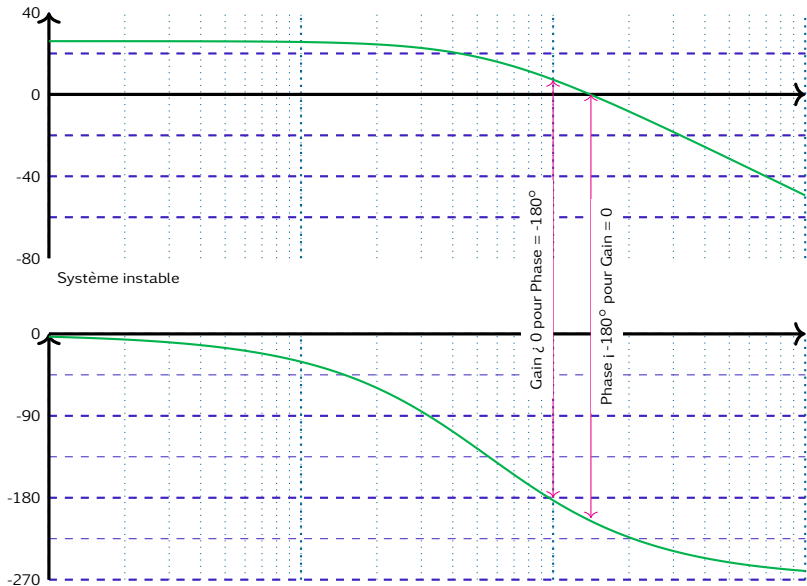
Diagramme de Black



Diagrammes de Bode



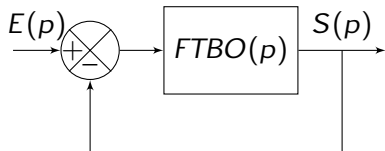
Diagrammes de Bode



Abaque de Black et marge de module

Tracé de la FTBF à partir de la FTBO

L'abaque de Black permet de passer du diagramme de Bode en Boucle ouverte (BO) au diagramme de Bode en Boucle fermée (BF) pour un système à retour unitaire.



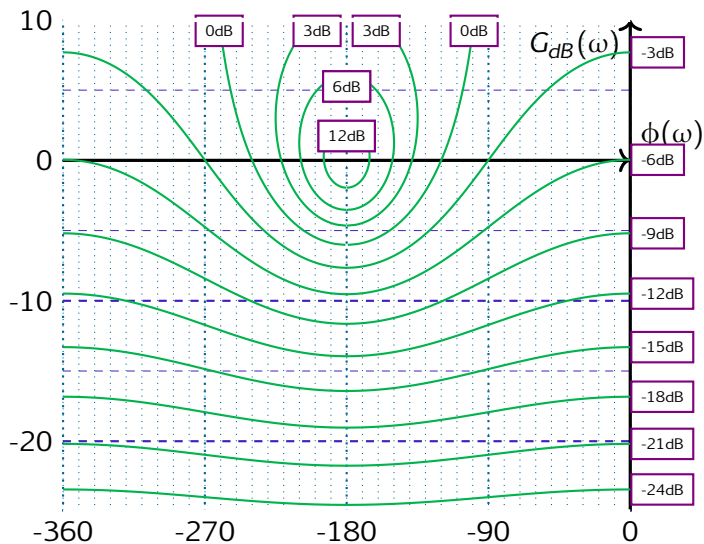
$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

PROPRIÉTÉ :

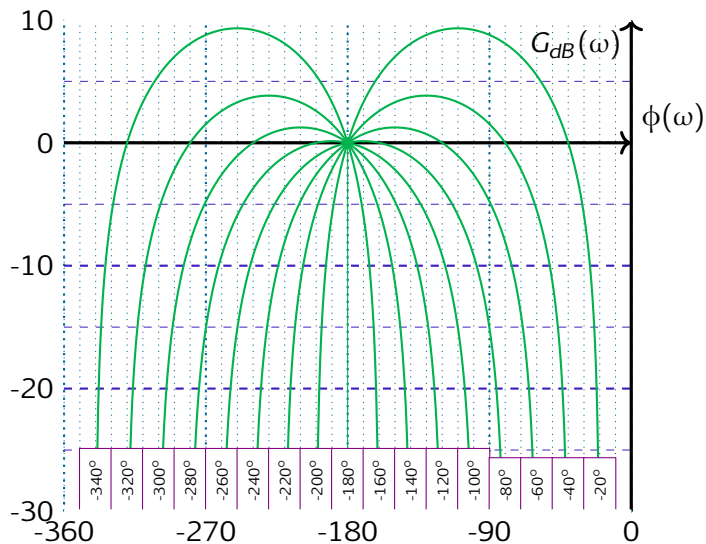
L'abaque de Black est composé de deux séries de courbes :

- les courbes d'isomodules
- les courbes d'isophases

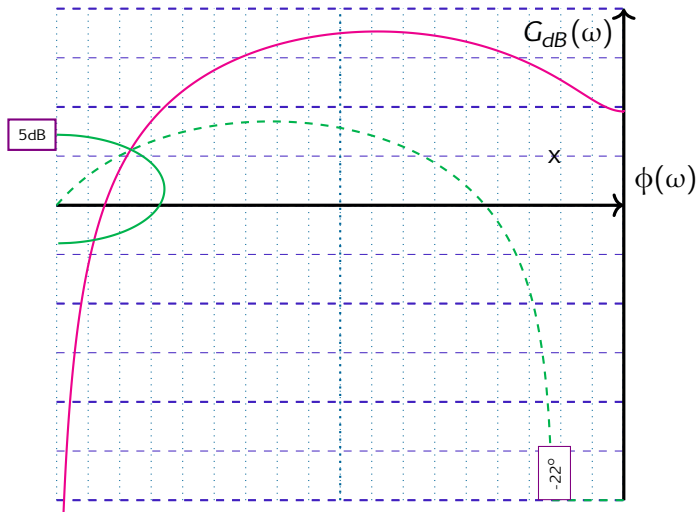
Isomodules



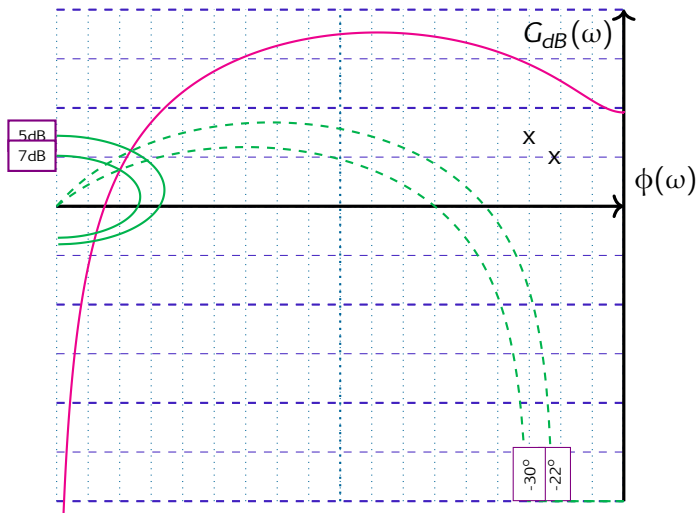
Isophases



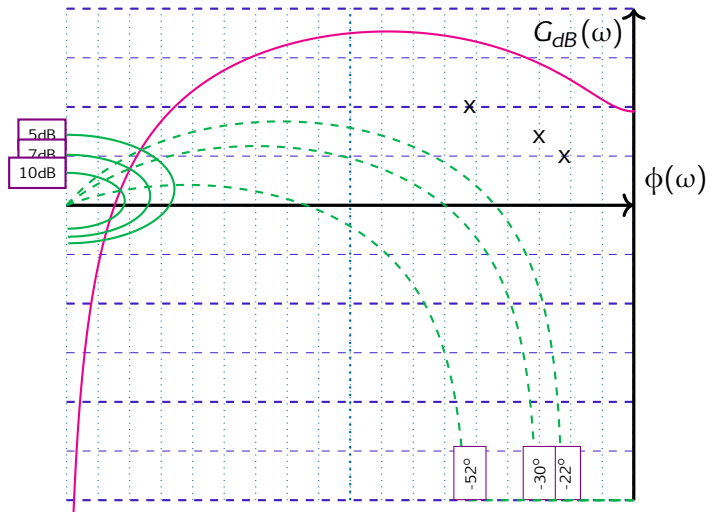
Isophases et Isomodules



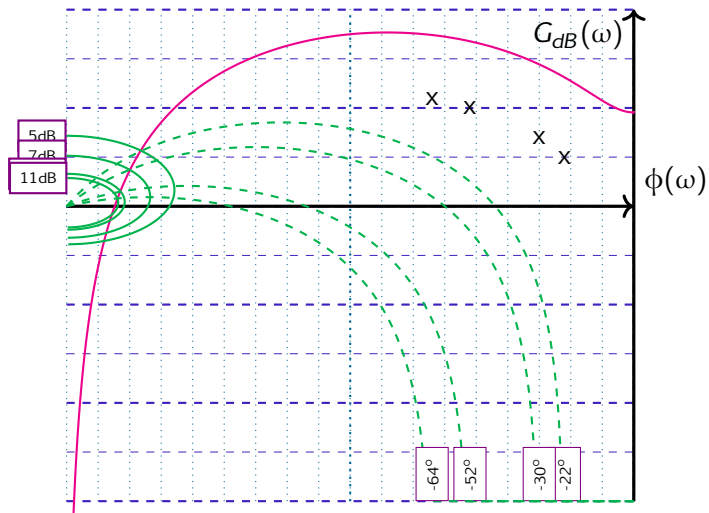
Isophases et Isomodules



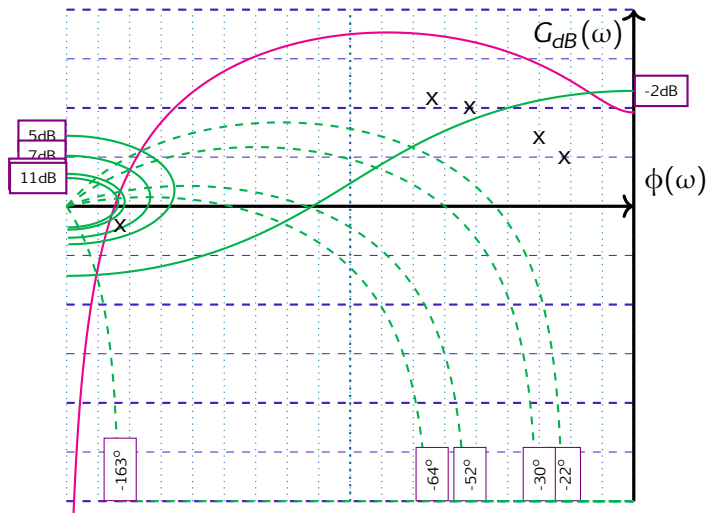
Isophases et Isomodules



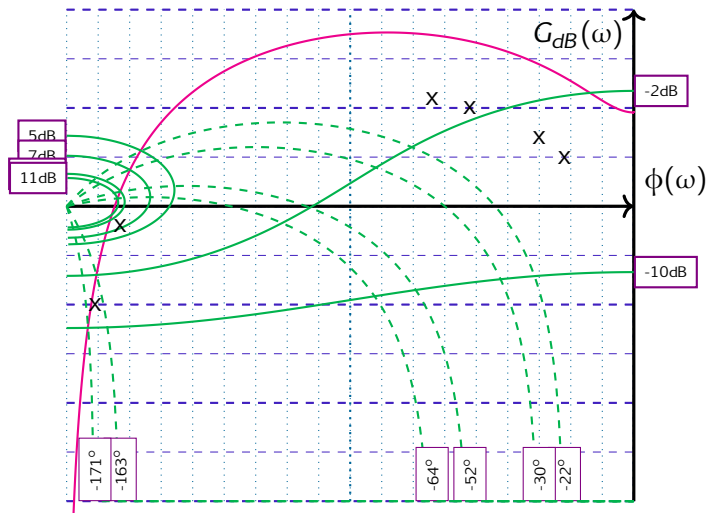
Isophases et Isomodules



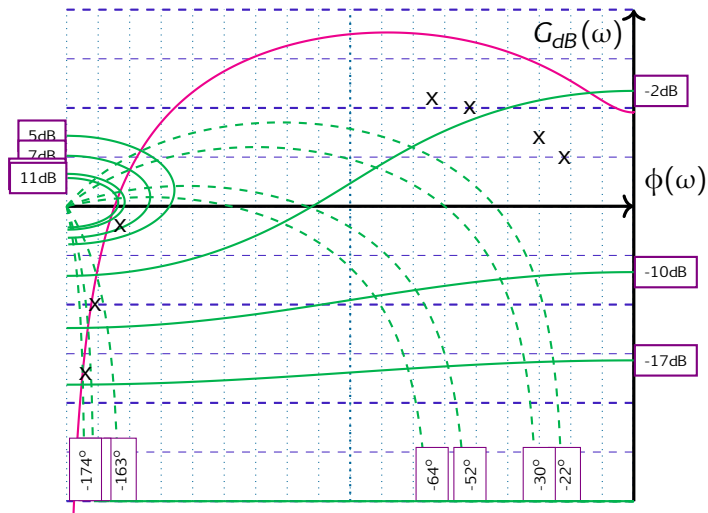
Isophases et Isomodules



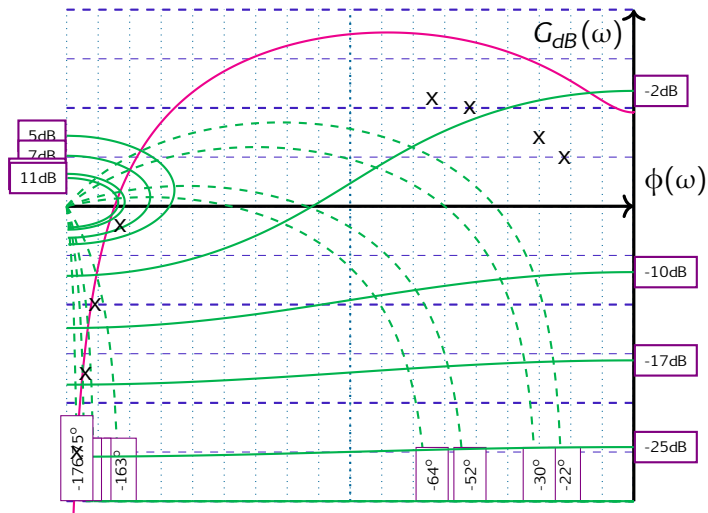
Isophases et Isomodules



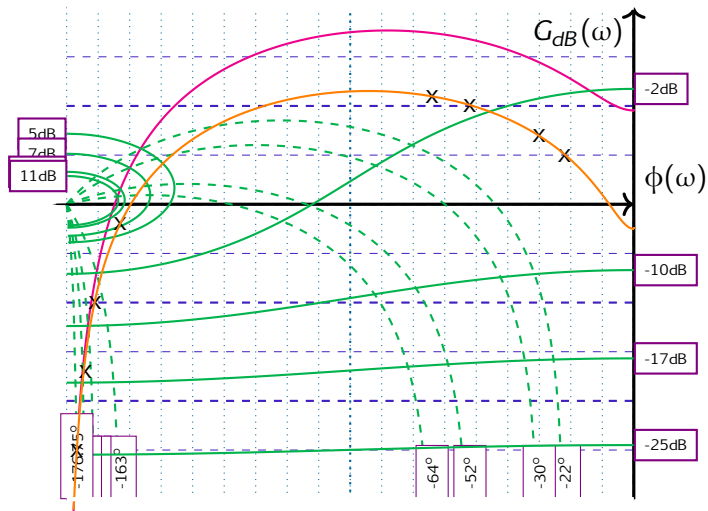
Isophases et Isomodules



Isophases et Isomodules



Isophases et Isomodules



Les intersections de la réponse fréquentielle de la FTBO avec ces courbes permettent de reconstruire point à point la FTBF. Lorsque la FTBO est tangente à une courbe d'isomodule, la FTBF admet une résonance. Le gain maxi de la FTBF est égal à la valeur de l'isomodule correspondant.

DÉFINITION : Marge de module

Distance entre la FTBO et le point critique en terme d'isomodule de la FTBF. Cela revient à fixer une valeur maximale de la FTBF en limitant l'amplitude de la résonance.

Une valeur courante est de prendre une marge de module de 2.3 dB.

Surtension et le coefficient de surtension

Pour les systèmes du second ordre

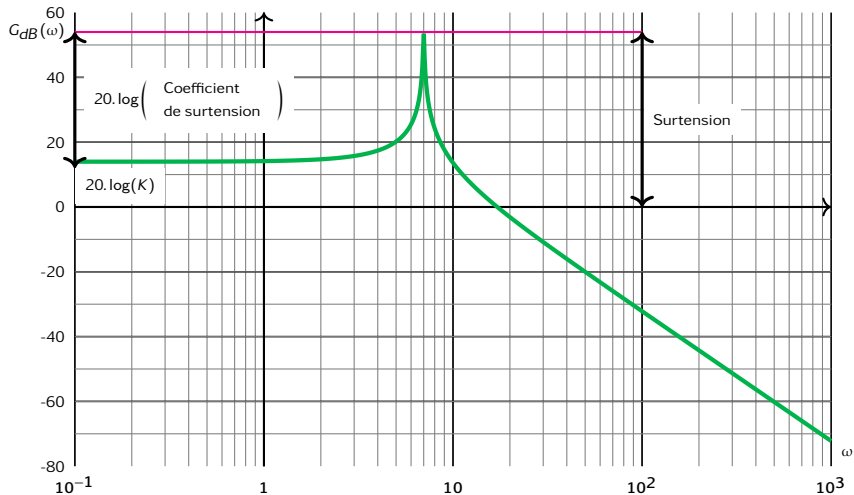
$$FTBF(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Surtension	coefficient de surtension
$20 \cdot \log \left(\frac{K}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$	$\frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$

ATTENTION ! A ne pas confondre la surtension et le coefficient de surtension.

La pulsation de résonance est définie par la formule: $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$.

Surtension et le coefficient de surtension

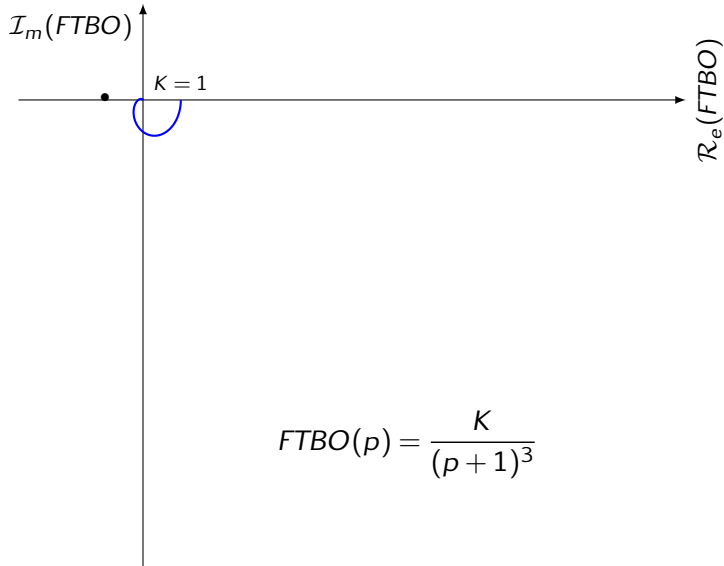


Influence du gain en boucle ouverte

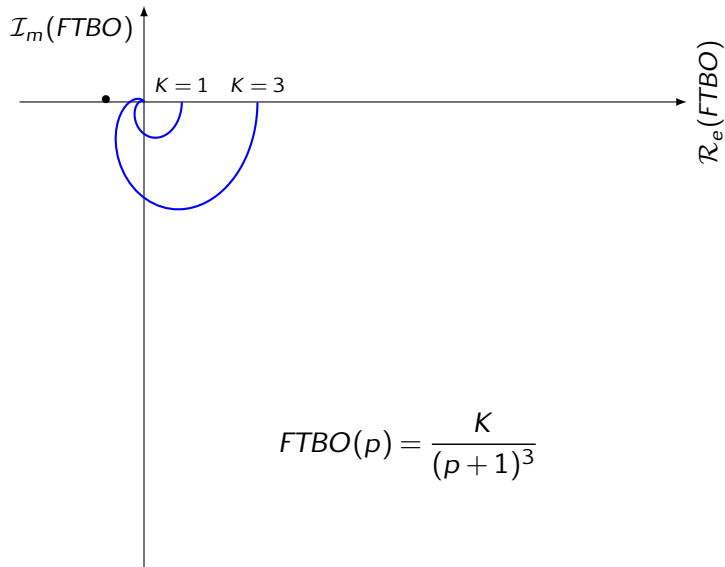
Dans le diagramme de Black (de Nyquist), toute modification du gain se traduit par une translation verticale (une homothétie de centre $(0,0)$) de la courbe pouvant entraîner une instabilité (dépassement du point critique).

REMARQUES : les systèmes du premier et deuxième ordre sans déphasage sont inconditionnellement stables

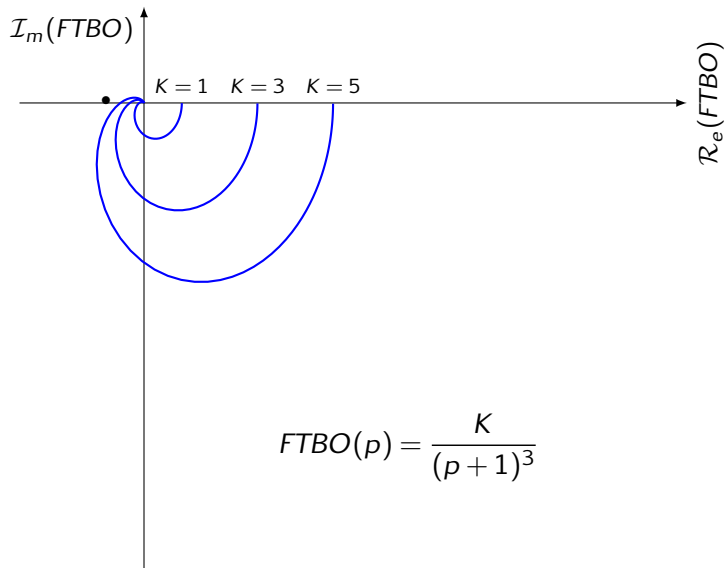
Influence du gain en boucle ouverte



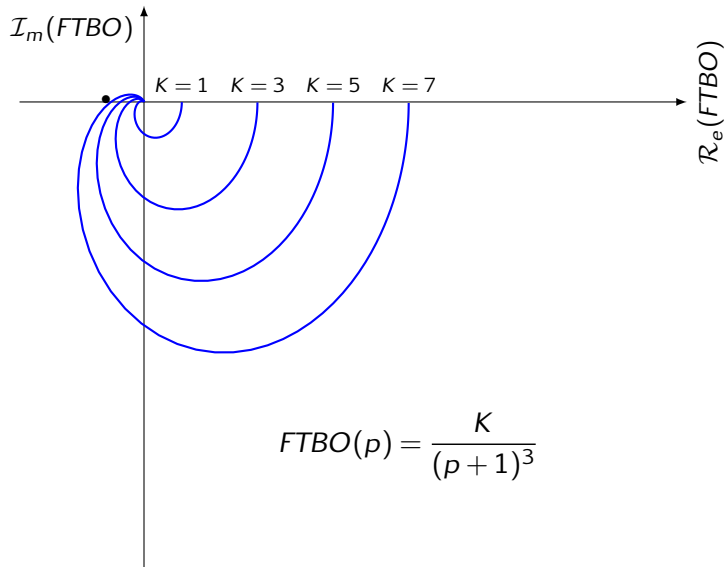
Influence du gain en boucle ouverte



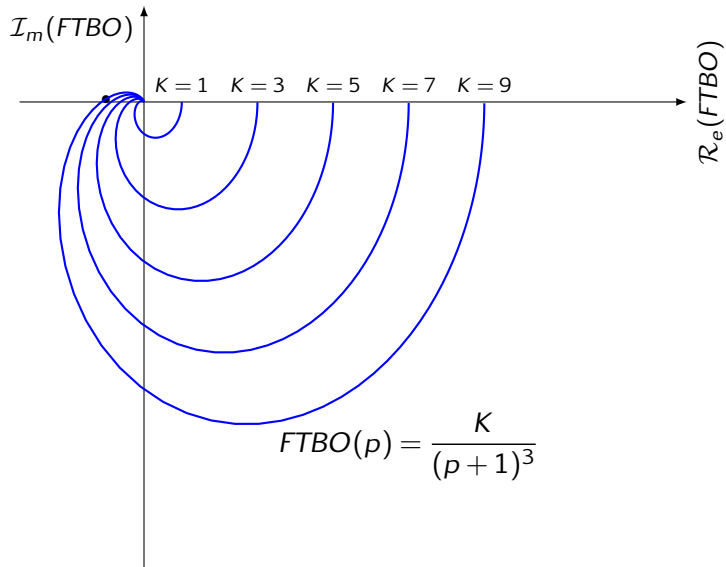
Influence du gain en boucle ouverte



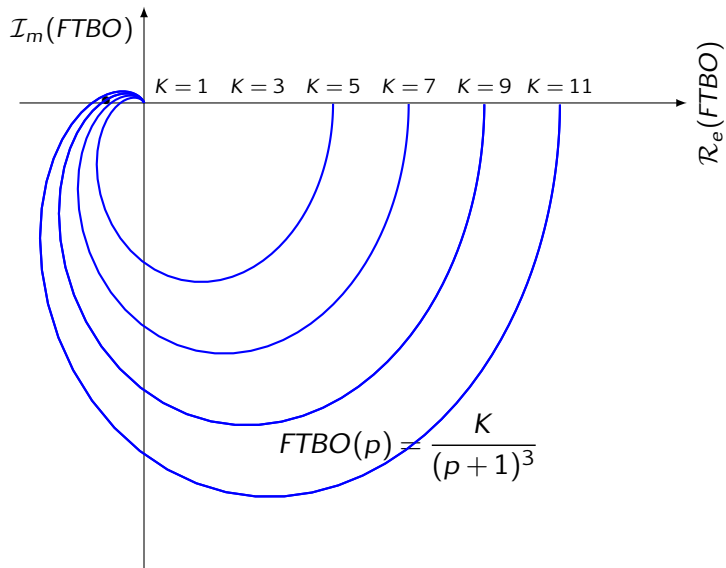
Influence du gain en boucle ouverte



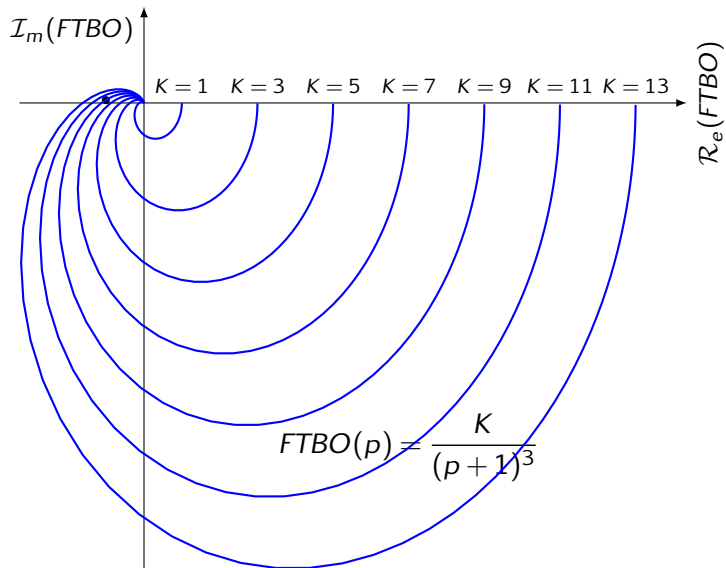
Influence du gain en boucle ouverte



Influence du gain en boucle ouverte



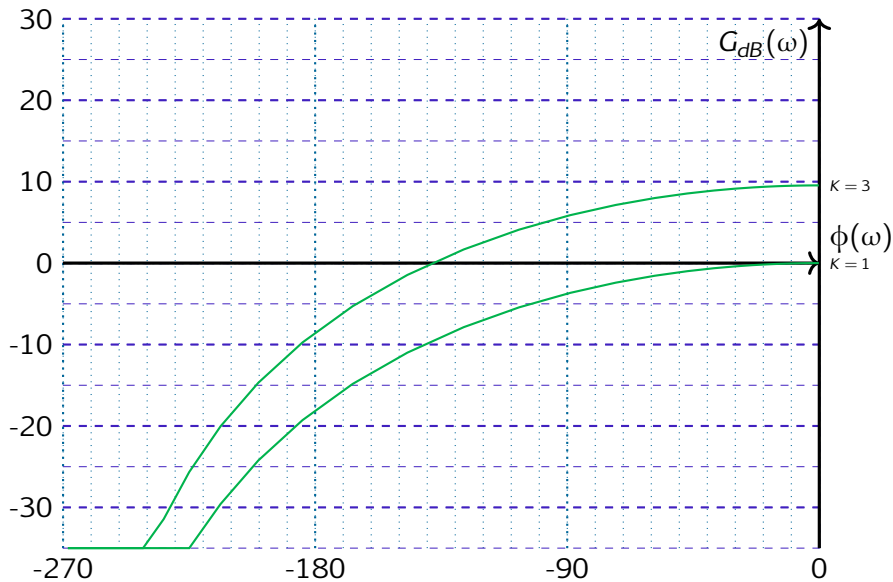
Influence du gain en boucle ouverte



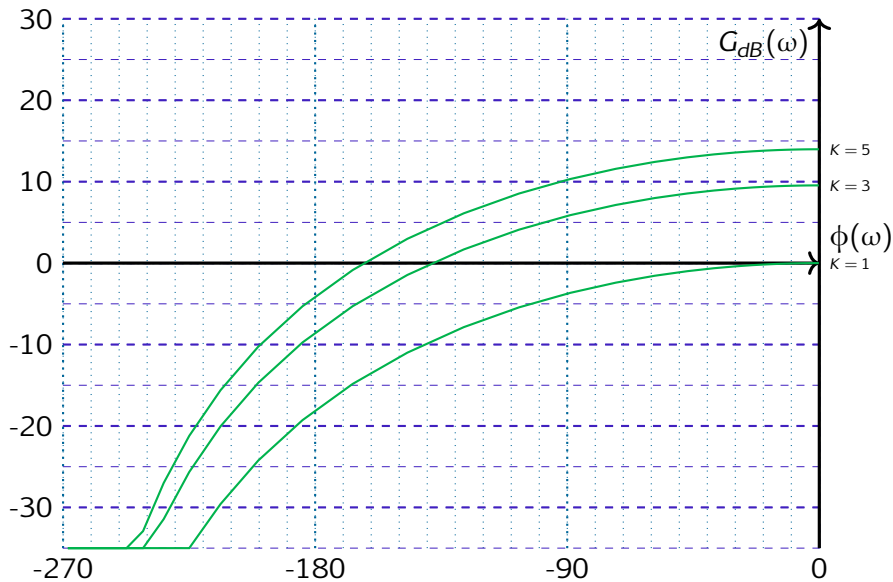
Influence du gain en boucle ouverte



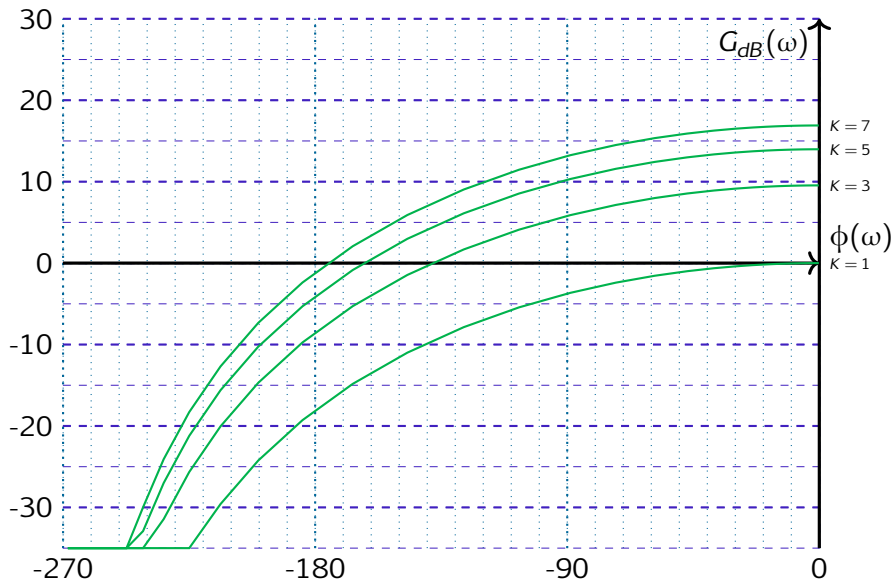
Influence du gain en boucle ouverte



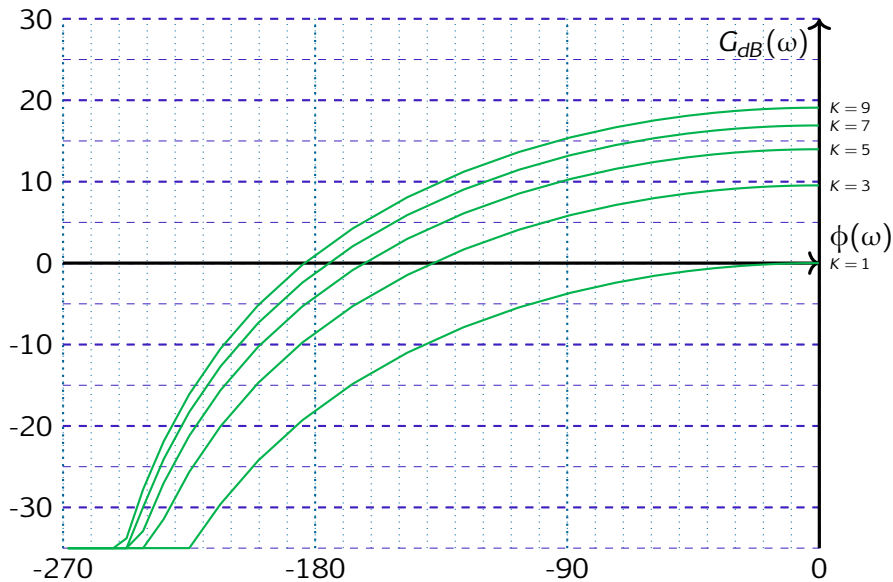
Influence du gain en boucle ouverte



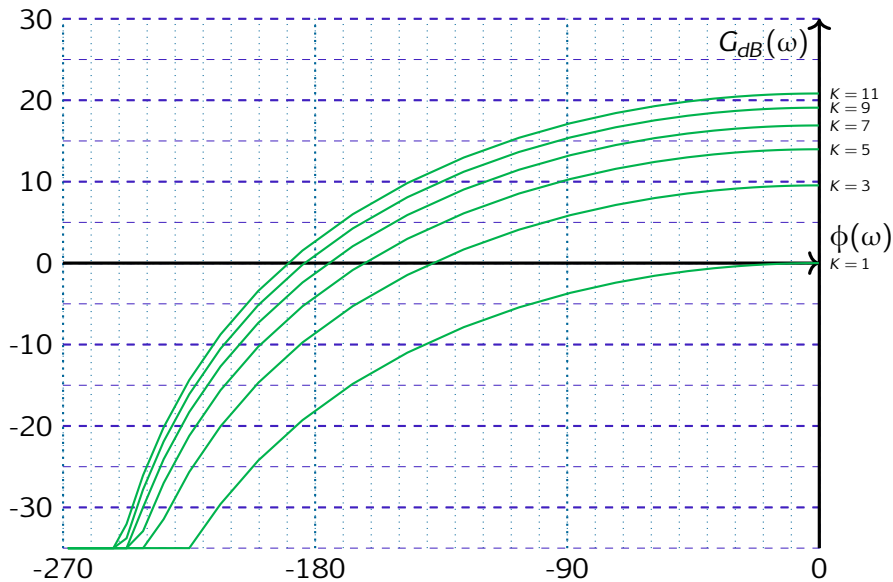
Influence du gain en boucle ouverte



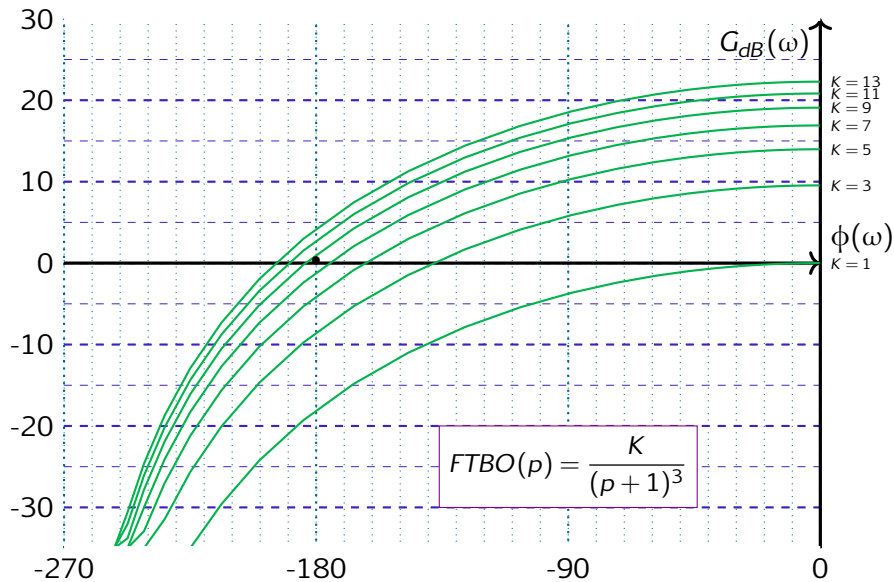
Influence du gain en boucle ouverte



Influence du gain en boucle ouverte



Influence du gain en boucle ouverte



Influence des constantes de temps

Prenons une FTBO pouvant se mettre sous la forme :

$$FTBO(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \cdot F(p)$$

$$\Rightarrow \arg(FTBO(j.\omega)) = -\arg(1 + \tau.p) + \arg(F(j.\omega))$$

Si τ augmente, cela entraîne un déphasage (ou retard) supplémentaire pouvant causer l'instabilité.

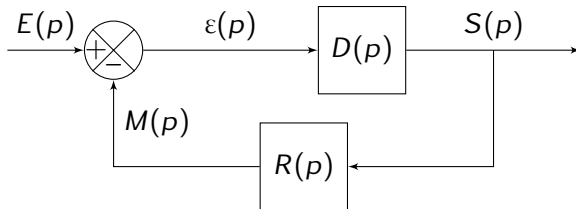
Influence des retards purs

La présence d'un retard crée un déphasage supplémentaire pouvant causer l'instabilité.

$$FTBO(p) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$
$$\Rightarrow \arg(FTBO(j.\omega)) = \arg(e^{-j.\tau.\omega}) + \arg(F(j.\omega))$$

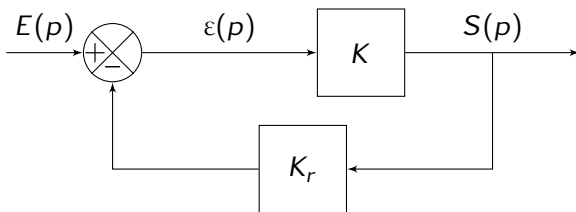
Sommaire

Erreur et écart



Ecart	Erreur ou Précision
$\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$	$E_r(p) = E(p) - S(p)$
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$e_r(t) = e(t) - s(t)$

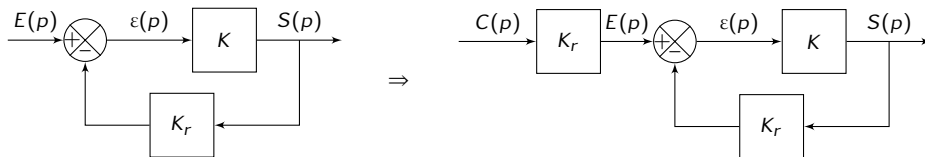
EXEMPLE : Considérons un système bouclé à gain pur avec retour non unitaire.



Pour que la comparaison générant l'écart ait un sens, il faut que l'entrée et le retour soient de même grandeur. Le retour n'étant pas de la même grandeur que la sortie (car le gain de la boucle de retour est différent de 1) on en déduit que la sortie et l'entrée ne sont pas de même grandeur.

Si l'on désire faire apparaître une consigne de même grandeur que la sortie, il faut ajouter un bloc en tête de schéma. Le gain de ce bloc est égal au gain de la chaîne de retour.

La précision a alors un sens : $e_r(t) = c(t) - s(t)$. La consigne $c(t)$ correspond à la "valeur visée". L'écart vaut : $\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$



Comparaison entre l'écart et l'erreur

L'écart et l'erreur ne sont pas égaux.

$$\varepsilon(t) = e(t) - r(t) = e(t) - K_r \cdot s(t) = K_r \cdot (c(t) - s(t)) = K_r \cdot e_r(t)$$

Toutefois ils sont proportionnels et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'erreur peuvent être obtenues par analyse de l'écart.

REMARQUE : Lorsque le retour est unitaire, les deux grandeurs erreur et écart sont égales.

Si l'écart est exprimé en valeur normée ou en pourcentage:

$$\varepsilon(t) = \frac{E(p) - M(p)}{E(p)} = \frac{K_r \cdot (C(p) - S(p))}{K_r \cdot C(p)} = \frac{C(p) - S(p)}{C(p)}$$

L'erreur, telle que définie précédemment, est $\frac{C(p) - S(p)}{C(p)}$. Si l'erreur ou l'écart sont normés, alors les deux quantités en pourcentage sont égales.

Quantités statiques et dynamiques

DÉFINITION : Erreur dynamique

|| *Evolution temporelle de l'erreur égale à $e_r(t)$.*

Quantités statiques et dynamiques

DÉFINITION : Erreur dynamique

|| Evolution temporelle de l'erreur égale à $e_r(t)$.

DÉFINITION : Erreur statique e_{rs}

|| Limite à convergence de $e_r(t)$ lorsqu'elle existe : $e_{rs} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$

Quantités statiques et dynamiques

DÉFINITION : Erreur dynamique

|| Evolution temporelle de l'erreur égale à $e_r(t)$.

DÉFINITION : Erreur statique e_{rs}

|| Limite à convergence de $e_r(t)$ lorsqu'elle existe : $e_{rs} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$

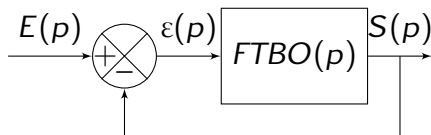
Le raisonnement est identique avec l'écart.

Calcul de la précision

La précision se définit vis-à-vis du type d'entrée considérée :

- **Précision en position:** L'entrée est un échelon $1/p$ (le système vise une valeur constante)
- **Précision en vitesse (erreur de traînage):** L'entrée est une rampe $1/p^2$ (le système suit une grandeur augmentant à vitesse constante)
- **Précision en accélération :** l'entrée est une parabole $1/p^3$ (le système suit une grandeur uniformément accélérée)

Considérons le cas particulier d'un retour unitaire (simplification calculatoire).



$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m} \quad \text{avec } n \leq m + \alpha$$

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m} \quad \text{avec } n \leq m + \alpha$$

$$E_r(p) = E(p) - S(p) = E(p) - FTBF(p) \cdot E(p) = E(p) \cdot (1 - FTBF(p))$$

et
$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m} \quad \text{avec } n \leq m + \alpha$$

$$E_r(p) = E(p) - S(p) = E(p) - FTBF(p) \cdot E(p) = E(p) \cdot (1 - FTBF(p))$$

$$\text{et } FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$\text{soit } E_r(p) = E(p) \cdot \left(1 - \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}\right) = E(p) \cdot \left(\frac{1}{1 + FTBO(p)}\right)$$

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m} \quad \text{avec } n \leq m + \alpha$$

$$E_r(p) = E(p) - S(p) = E(p) - FTBF(p) \cdot E(p) = E(p) \cdot (1 - FTBF(p))$$

$$\text{et } FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$\text{soit } E_r(p) = E(p) \cdot \left(1 - \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = E(p) \cdot \left(\frac{1}{1 + FTBO(p)} \right)$$

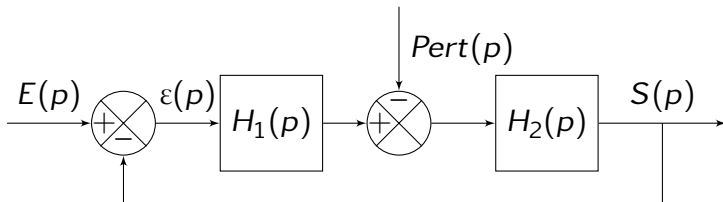
L'évolution dynamique s'obtient en recherchant la réponse temporelle par la transformée de Laplace inverse. Bien souvent, seule l'erreur statique présentera un intérêt.

Erreur	Erreur de position	Erreur de Traînage	Erreur d'Accélération
Classe · Entrée	Échelon : $E(p) = \frac{1}{p}$	Rampe : $E(p) = \frac{1}{p^2}$	Parabole : $E(p) = \frac{1}{p^3}$
Classe 0 ($\alpha = 0$)	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Classe 1 ($\alpha = 1$)	0	$\frac{1}{K}$	∞
Classe 2 ($\alpha = 2$)	0	0	$\frac{1}{K}$
Classe α	$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \right)$	$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right)$	$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right)$

REMARQUES :

- **Influence du nombre d'intégrateur** : Plus le nombre d'intégrateur est grand (plus la classe du système est importante) plus la précision est bonne. Si l'erreur n'est pas nulle, on pourra envisager d'ajouter dans le système un ou plusieurs intégrateurs (correcteur intégral).
- **Influence du gain en boucle ouverte K** : Si l'erreur n'est ni infinie ni nulle, l'erreur sera d'autant plus petite que le gain statique (K) de la FTBO sera grand. Il est donc envisageable d'ajouter dans le système un correcteur proportionnel.

Prise en compte d'une perturbation (système en régulation)



Prenons l'exemple d'un système asservi, à retour unitaire, dans lequel une perturbation est introduite après le bloc représentant la fonction principale du système ($H_1(p)$). Ce système est modélisé par la figure ci-dessus.

$$e_r(t) = e(t) - s(t) \Rightarrow E_r(p) = E(p) - S(p)$$

$$S(p) = \frac{H_1(p).H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.E(p) - \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)$$

$$E_r(p) = \underbrace{E(p). \left(\frac{1}{1 + H_1(p).H_2(p)} \right)}_{\text{Erreur en poursuite}} + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

$$S(p) = \frac{H_1(p).H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.E(p) - \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)$$

$$E_r(p) = \underbrace{E(p). \left(\frac{1}{1 + H_1(p).H_2(p)} \right)}_{\text{Erreur en poursuite}} + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

Le terme de l'erreur qui dépend de $E(p)$ est appelé : **erreur en poursuite** (entrée variable). C'est l'erreur étudiée au chapitre précédent.

$$S(p) = \frac{H_1(p).H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.E(p) - \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)$$

$$E_r(p) = \underbrace{E(p). \left(\frac{1}{1 + H_1(p).H_2(p)} \right)}_{\text{Erreur en poursuite}} + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

Le terme de l'erreur qui dépend de $E(p)$ est appelé : **erreur en poursuite** (entrée variable). C'est l'erreur étudiée au chapitre précédent.

Le terme de l'erreur qui dépend de la perturbation ($Pert(p)$) est appelé : **erreur en régulation** (entrée principale constante).

$$S(p) = \frac{H_1(p).H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.E(p) - \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)$$

$$E_r(p) = \underbrace{E(p). \left(\frac{1}{1 + H_1(p).H_2(p)} \right)}_{\text{Erreur en poursuite}} + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}.Pert(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

Le terme de l'erreur qui dépend de $E(p)$ est appelé : **erreur en poursuite** (entrée variable). C'est l'erreur étudiée au chapitre précédent.

Le terme de l'erreur qui dépend de la perturbation ($Pert(p)$) est appelé : **erreur en régulation** (entrée principale constante).

Là encore, la propriété de linéarité de la transformée de Laplace nous permet d'étudier chacun des deux termes séparément, puis de sommer (dans le domaine temporel) les résultats obtenus.

Choisissons une perturbation de la forme suivante et étudions l'erreur en régulation :

$$\text{Pert}(p) = \frac{A}{p^r} \quad E_{r \text{ régul}}(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)} \cdot \frac{A}{p^r}$$

$$E_{r \text{ régul } s} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E_{r \text{ régul}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)} \frac{A}{p^{r-1}}$$

$$\text{Si } H_2(p) \stackrel{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \text{ et } H_1(p) \stackrel{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{K_1}{p^{\alpha_1}}$$

$$\text{alors } E_{r \text{ régul } s} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}}}{1 + \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{K_2}{p^{\alpha_2}}} \cdot \frac{A}{p^{r-1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{A}{K_1} \cdot \frac{1}{p^{r-1-\alpha_1}}$$

REMARQUES :

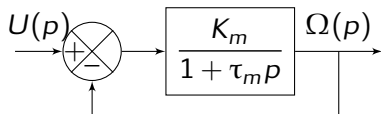
- $\alpha_1 > r - 1$, alors l'erreur statique est nulle (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est supérieur ou égal à la classe de la perturbation). On parle alors de **réjection** de la perturbation
- $\alpha_1 = r - 1$, alors l'erreur statique est non nulle mais finie : $-\frac{A}{K_1}$. La réjection de la perturbation est incomplète.
- $\alpha_1 < r - 1$, alors l'erreur statique est infinie.

L'ajout d'intégrateurs en amont de la perturbation permet d'en éliminer les effets (nombre d'intégrateurs compatible avec la nature de la perturbation)

Sommaire

Asservissement de vitesse

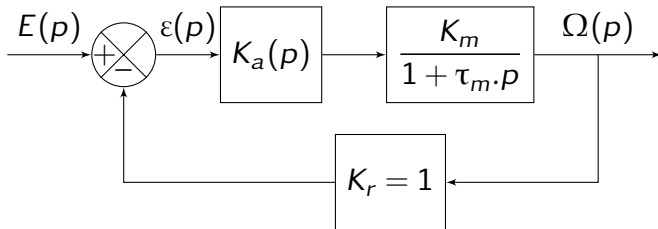
Considérons un moteur modélisé comme un premier ordre de Fonction de Transfert en vitesse suivante :



K_m le gain statique en vitesse en $\text{rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$

τ_m étant la constante de temps mécanique en s.

Bouclons maintenant le système par un retour unitaire.



Un amplificateur de gain K_a est inséré avant le moteur pour permettre le réglage du gain de la chaîne directe. K_a est donc sans unité. Le gain K_m est une donnée constructeur et ne peut être réglable. Son unité est rad/(s.V).

REMARQUES :

- Nous considérons donc le moteur comme un système qui transforme une tension en vitesse.
- K_a est sans unité car l'ampli considéré ici transforme des Volts en Volts.
- Les deux grandeurs $s(t)$ et $e(t)$ sont algébriquement comparables car la boucle de retour possède un gain unitaire, $K_r = 1$ V.rad.

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) du schéma donc :

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 + \tau_m \cdot p} \quad \text{avec} \quad K = K_m \cdot K_a \cdot K_r$$

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 + \tau_m \cdot p} \quad \text{avec} \quad K = K_m \cdot K_a \cdot K_r$$

La Fonction de Transfert en Boucle Fermée du schéma notée $FTBF(p)$ est alors donnée par la relation :

$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{\Omega(p)}{U_c(p)} = \frac{\frac{K_a \cdot K_m}{1 + \tau_m \cdot p}}{1 + \frac{K_a \cdot K_m \cdot K_r}{1 + \tau_m \cdot p}} \stackrel{K_r=1}{=} \frac{K}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K} \cdot p} \\ &= H(p) = \frac{K'}{1 + \tau' \cdot p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K' = \frac{K}{1 + K} \\ \tau' = \frac{\tau_m}{1 + K} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% étant défini par $T_{5\%} = 3 \cdot \tau$, on en conclut donc que le **bouclage a augmenté la rapidité** du système d'autant plus que le gain statique en boucle ouverte est grand.

Remarques sur les autres performances

- Le bouclage n'a pas modifié l'ordre du système
- Le bouclage du système diminue le gain du système. Si le système était parfaitement précis en boucle ouverte, il devient moins précis en boucle fermée. Cependant, si le système n'était pas précis en BO, une augmentation du gain K améliorera sa précision.
- Le système est stable de façon inconditionnelle. C'est un premier ordre, le déphasage maxi est de 90° .

Généralisation

Un système en boucle fermée aura tendance à être plus rapide qu'un système en boucle ouverte et ce quelque soit l'ordre de la fonction de transfert

Bande passante

DÉFINITION : Bande passante

|| *Plage de valeurs pour laquelle le Gain en décibel est positif*

Bande passante

DÉFINITION : Bande passante

|| *Plage de valeurs pour laquelle le Gain en décibel est positif*

Plus la bande passante est grande, plus le système est rapide. Cette tendance mise en évidence pour un système du premier ordre peut se généraliser à tous les ordres de systèmes physiques.

Bande passante

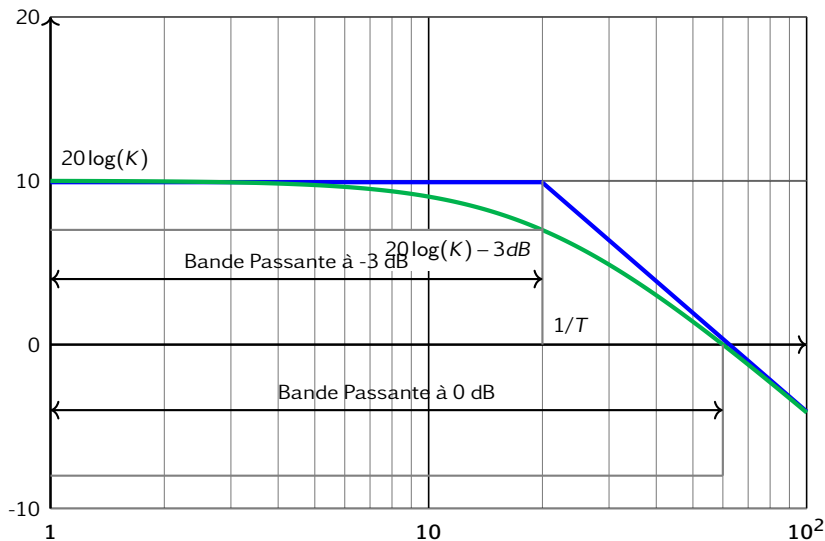
REMARQUE : La bande passante doit être définie sur la réponse fréquentielle en boucle fermée. Cependant, beaucoup de sujets de concours demandent de définir une bande passante sur le diagramme fréquentielle de la FTBO. Cela est dû tout simplement au fait que les diagrammes de la FTBO ont été tracés pour l'étude de stabilité. Disons que ce n'est pas gênant dans la mesure où une augmentation de la bande passante de la FTBO joue dans le même sens qu'une augmentation de la bande passante de la FTBF.

Bande passante

REMARQUE : La bande passante doit être définie sur la réponse fréquentielle en boucle fermée. Cependant, beaucoup de sujets de concours demandent de définir une bande passante sur le diagramme fréquentielle de la FTBO. Cela est dû tout simplement au fait que les diagrammes de la FTBO ont été tracés pour l'étude de stabilité. Disons que ce n'est pas gênant dans la mesure où une augmentation de la bande passante de la FTBO joue dans le même sens qu'une augmentation de la bande passante de la FTBF.

La bande passante à $-3dB$ correspond à la plage de fréquence pour lesquelles l'amplitude $|H(j\omega)|$ ne se trouve pas diminuée de plus de 30% de la valeur $|H(0)|$.

Bande passante à -3dB



Généralisation

Plus la plage de fréquence selon une limite fixée (atténuation de 3dB, GdB supérieur à 0dB) est grande, plus le système sera rapide. La mesure de cette plage devrait être effectuée en toute rigueur sur les courbes de la FTBF, mais une lecture sur celles de la FTBO (disponibles pour la stabilité) est acceptable.