

# CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

## CI-2-0 : Machines à Courant Continu (MCC)

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

Germain Gondor



# Sommaire

- 1 Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway
- 2 Moteur à courant continu
- 3 Réponses indicielle et fréquentielle

# Objectifs

## MODELISER RESOUDRE

A l'issue de la séquence, l'élève doit être capable, à partir des équations temporelles du moteur à courant continu de

- transposer les équations dans le domaine de Laplace
- établir le schéma bloc du système
- déterminer la réponse temporelle du système
- évaluer le temps de réponse à 5%
- déterminer la réponse en fréquence du système

# Sommaire

- 1 Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway
- 2 Moteur à courant continu
- 3 Réponses indicielle et fréquentielle

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway

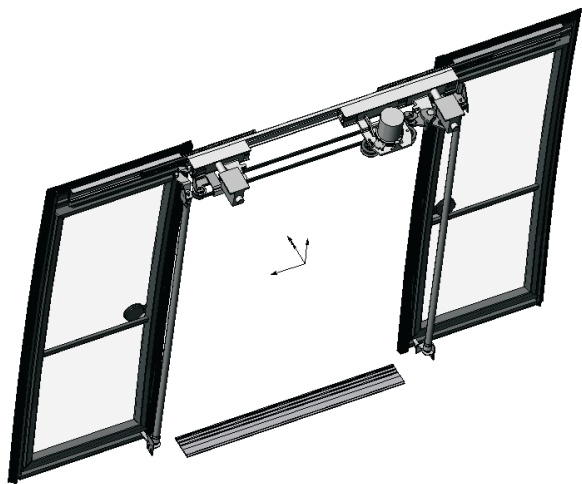


# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway

Les grandes métropoles répondent au problème du déplacement des populations par le développement des transports en commun. Dans ce contexte, il est possible d'augmenter le débit des passagers en augmentant la vitesse de déplacement et en diminuant les temps d'arrêt aux gares. Ce dernier point implique que les dispositifs d'accès des passagers aux voitures soient optimisés.

Le support de ce Cours-Td est le système d'ouverture et de fermeture des portes de voitures développé par la société FAIVELEY qui équipe des tramways, des métropolitains ou des trains express régionaux.

# Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway





# Sommaire

- 1 Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway
- 2 **Moteur à courant continu**
  - Valeurs numériques
  - Principe de fonctionnement
  - Technologie du moteur à courant continu
  - Équations du modèle
  - Schéma bloc
- 3 Réponses indicielle et fréquentielle

## Moteur à courant continu

Un moteur électrique est utilisé pour convertir l'énergie électrique du réseau en énergie mécanique. On considèrera pour l'étude, que l'inertie sur l'axe moteur vaut  $0,01 \text{ Kg.m}^2$ .

On considère alors les valeurs numériques suivantes pour le moteur:

$$R=20 \Omega$$

$$L=0,1 \text{ H}$$

$$K_e=1,2 \text{ V.}(\text{rad.s}^{-1})^{-1}$$

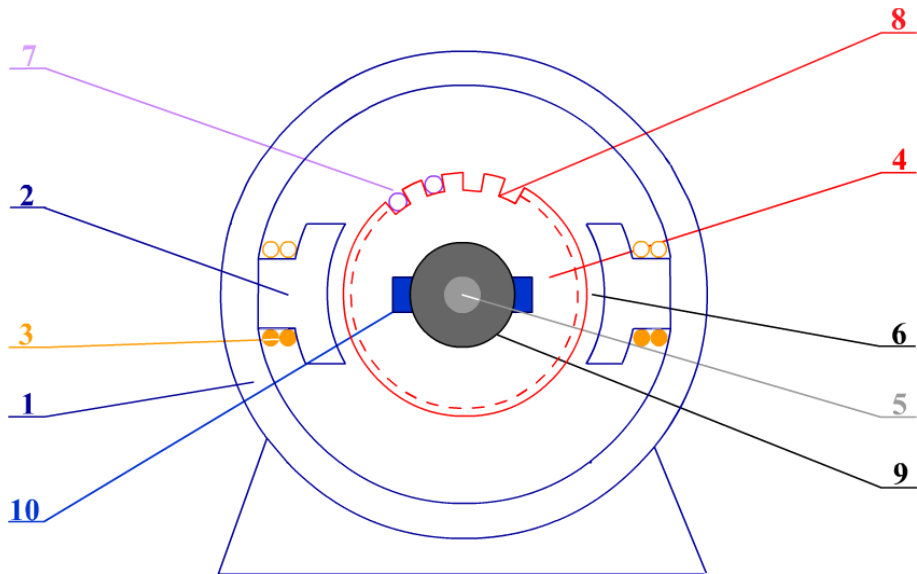
$$K_c=1,2 \text{ Nm.A}^{-1}$$

$$J=0,01 \text{ Kg.m}^2$$

# Principe de fonctionnement

Moteur à courant continu

# Technologie du moteur à courant continu



- 1 Stator
- 2 Inducteur
- 3 Bobines de l'inducteur
- 4 Rotor
- 5 Arbre
- 6 Champ magnétique
- 7 Bobinage Induit
- 8 Conducteur de l'induit
- 9 Collecteur
- 10 Porte balai

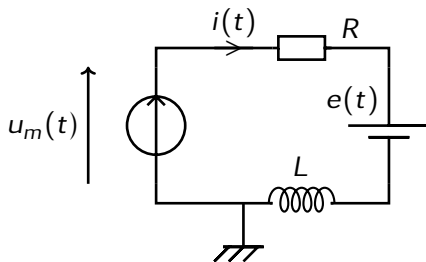
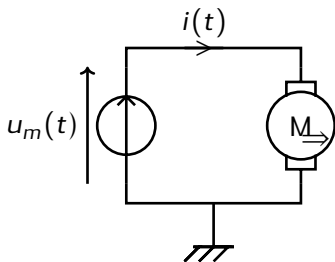
## Technologie du moteur à courant continu

# Équations du modèle

Écrivons les modèles de connaissances pour déterminer les relations entre la tension d'alimentation  $u_m(t)$ , l'intensité  $i(t)$ , la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  et les couples moteur  $C_m(t)$  et résistant  $C_r(t)$ .

# Équation électrique

Pour alimenter le moteur on applique à ses bornes une tension  $u_m(t)$ . Le moteur peut être modélisé par une résistance  $R$  en série avec une inductance  $L$  et une force électromotrice induite  $e(t)$ .



On obtient alors l'équation électrique

$$u_m(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + e(t)$$

# Équation mécanique

L'application du moment dynamique sur l'axe moteur soumis aux actions mécaniques du couple moteur  $C_m$  et du couple résistant  $C_r$

conduit à

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$



## Couple moteur

# Couplage électromoteur

L'action mécanique de la force de Laplace ( $\vec{dF} = i(t) \cdot \vec{dl} \wedge \vec{B}$  et  $d\phi = B \cdot dS$ ) sur le rotor donne la relation entre le couple moteur et l'intensité

$$C_m(t) = K_c \cdot i(t)$$

## Couple moteur

# Force électromagnétique induite

La loi de Lenz conduit à la relation entre la vitesse de rotation et le force électromagnétique induite

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$$

## Flux magnétique à travers une spire

## Force électromotrice induite

# Schéma bloc

Afin de trouver les lois d'entrées-sorties, passons les équations temporelle dans le domaine symbolique de Laplace

# Construction des blocs

Le modèle de connaissance permet d'obtenir 4 équations pour le moteur à courant continu:

$$\begin{aligned}u_m(t) &= R.i(t) + L.\frac{di}{dt} + e(t) && \Rightarrow \\J.\frac{d\omega_m}{dt} &= C_m(t) - C_r(t) && \Rightarrow \\C_m(t) &= K_C.i(t) && \Rightarrow \\e(t) &= K_e.\omega_m(t) && \Rightarrow\end{aligned}$$



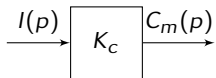
# Construction des blocs

Le modèle de connaissance permet d'obtenir 4 équations pour le moteur à courant continu:

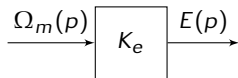
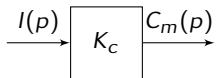
$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= R.i(t) + L.\frac{di}{dt} + e(t) \Rightarrow U_m(p) = R.I(p) + L.p.I(p) + E(p) \\
 J.\frac{d\omega_m}{dt} &= C_m(t) - C_r(t) \Rightarrow J.p.\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p) \\
 C_m(t) &= K_c.i(t) \Rightarrow C_m(p) = K_c.I(p) \\
 e(t) &= K_e.\omega_m(t) \Rightarrow E(p) = K_e.\Omega_m(p)
 \end{aligned}$$

Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :

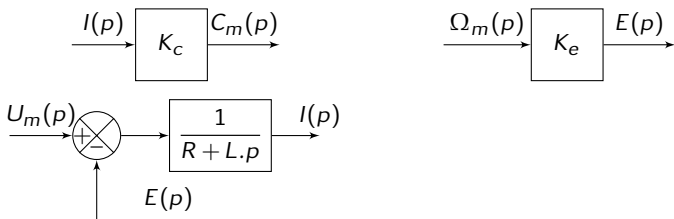
Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :



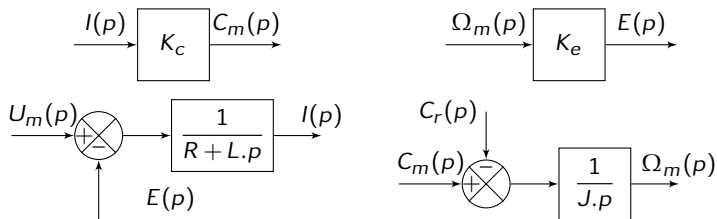
Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :



Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :

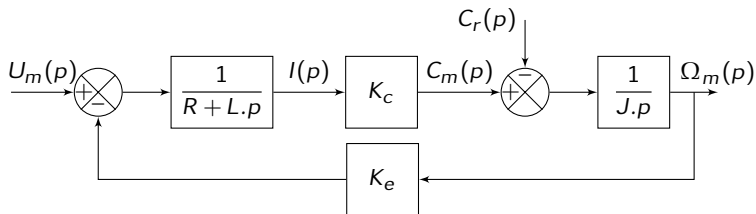


Ce qui permet de construire les éléments du schéma bloc :



# Schéma bloc du moteur à courant continu

L'assemblage des modèles de connaissances et de comportements (ici uniquement de connaissances) permet de construire le schéma bloc complet:



# Fonction de transfert

Il est possible de déterminer la fonction de transfert à partir des équations mais on peut également déplacer les blocs pour se ramener à un schéma bloc élémentaire.

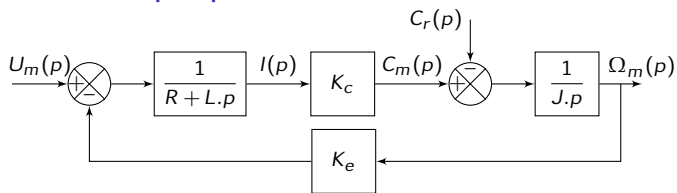


# Fonction de transfert

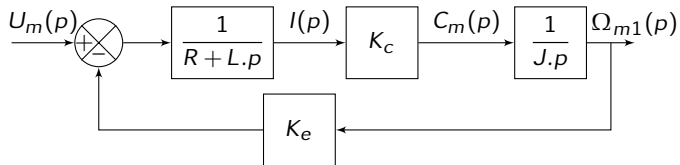
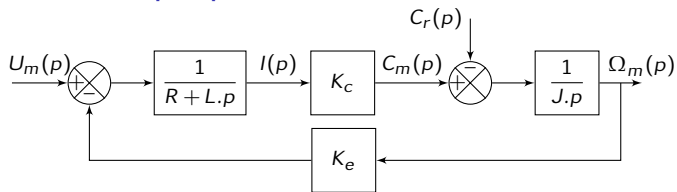
Il est possible de déterminer la fonction de transfert à partir des équations mais on peut également déplacer les blocs pour se ramener à un schéma bloc élémentaire.

De plus à partir du principe de superposition :  $\Omega_m(p) = \Omega_{m1}(p) + \Omega_{m2}(p)$

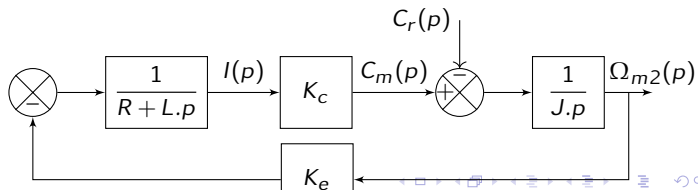
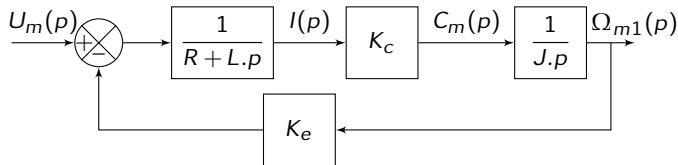
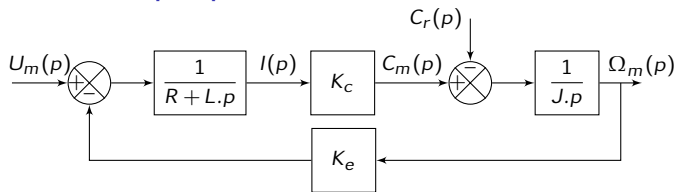
# Théorème de superposition

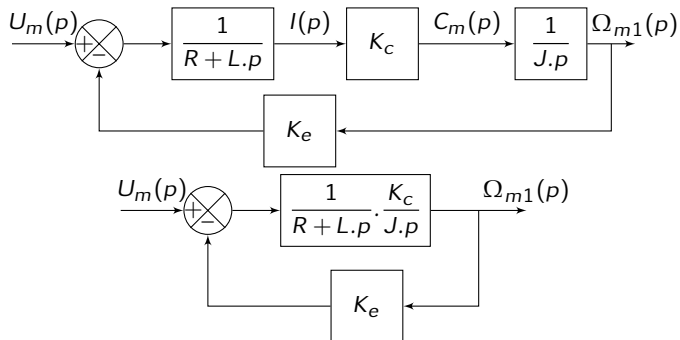


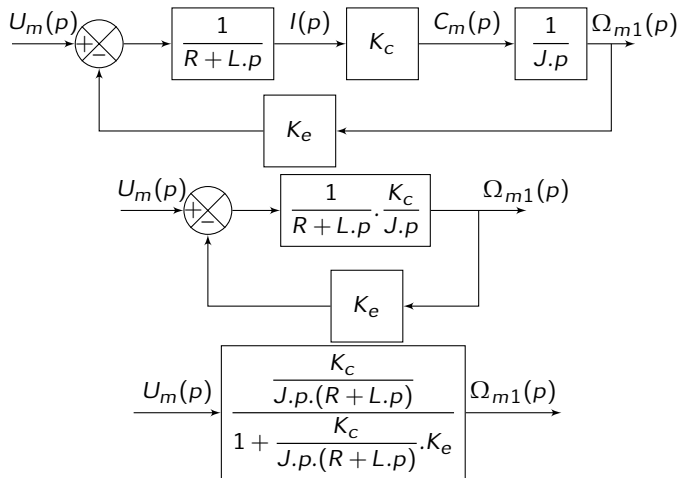
# Théorème de superposition

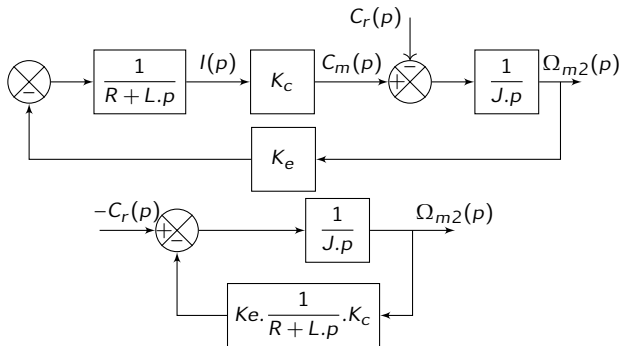


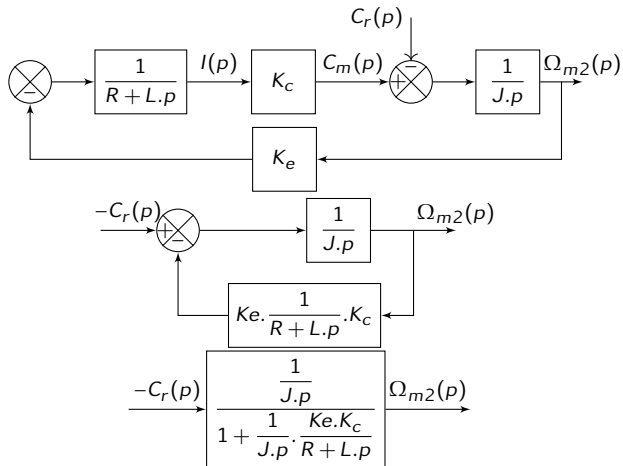
# Théorème de superposition













D'après le théorème de superposition :

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)}}{1 + \frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)} \cdot K_e} \cdot U_m(p) - \frac{\frac{1}{J \cdot p}}{1 + \frac{1}{J \cdot p} \cdot \frac{K_e \cdot K_c}{R + L \cdot p}} \cdot C_r(p)$$

Après simplifications:

$$\Omega_m(p) = \frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c} \cdot U_m(p) - \frac{R + L \cdot p}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c} \cdot C_r(p)$$

D'après le théorème de superposition :

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)}}{1 + \frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)} \cdot K_e} \cdot U_m(p) - \frac{\frac{1}{J \cdot p}}{1 + \frac{1}{J \cdot p} \cdot \frac{K_e \cdot K_c}{R + L \cdot p}} \cdot C_r(p)$$

Après simplifications:

$$\Omega_m(p) = \frac{K_c}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c} \cdot U_m(p) - \frac{R + L \cdot p}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c} \cdot C_r(p)$$

ou bien:

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J \cdot R}{K_e \cdot K_c} \cdot p + \frac{J \cdot L}{K_e \cdot K_c} \cdot p^2} \cdot U_m(p) - \frac{R}{K_e \cdot K_c} \cdot \frac{1 + \frac{L}{R} \cdot p}{1 + \frac{J \cdot R}{K_e \cdot K_c} \cdot p + \frac{J \cdot L}{K_e \cdot K_c} \cdot p^2} \cdot C_r(p)$$

# Sommaire

- 1 Système d'ouverture et de fermeture de portes de tramway
- 2 Moteur à courant continu
- 3 Réponses indicielle et fréquentielle**
  - Pulsation propre et coefficient d'amortissement
  - Réponse temporelle à un échelon
  - Réponse fréquentielle

# Pulsation propre et coefficient d'amortissement

D'après l'équation du moteur à courant continue établie précédemment, le système est du second ordre. Déterminons alors par identification les paramètres caractéristiques  $\xi$  et  $\omega_0$ :

$$1 + \frac{J.R}{K_e.K_c}.p + \frac{J.L}{K_e.K_c}.p^2 = 1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_e.K_c}{J.L}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{J}{L.K_e.K_c}}$$

APPLICATION NUMÉRIQUE :

$$\omega_0 = 38 \text{ rad.s}^{-1} \quad \xi = 2.65$$

# Réponse temporelle à un échelon

On impose un échelon de tension  $u_m(t) = U_0 \cdot u(t)$  avec  $U_0 = 100 \text{ V}$ .

Par transformée de Laplace,  $U_m(p) = \frac{U_0}{p}$

# Réponse temporelle à un échelon

On impose un échelon de tension  $u_m(t) = U_0 \cdot u(t)$  avec  $U_0 = 100 \text{ V}$ .

Par transformée de Laplace,  $U_m(p) = \frac{U_0}{p}$

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J.R}{K_e.K_c} \cdot p + \frac{J.L}{K_e.K_c} p^2} \cdot \frac{U_0}{p} = \frac{K \cdot U_0}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

avec  $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$  et  $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$

# Réponse temporelle à un échelon

On impose un échelon de tension  $u_m(t) = U_0 \cdot u(t)$  avec  $U_0 = 100 \text{ V}$ .

Par transformée de Laplace,  $U_m(p) = \frac{U_0}{p}$

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J.R}{K_e.K_c} \cdot p + \frac{J.L}{K_e.K_c} p^2} \cdot \frac{U_0}{p} = \frac{K \cdot U_0}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

avec  $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$  et  $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$

$$\omega_m(t) = K \cdot U_0 \left[ 1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2}) \right]$$

$$\omega_{m\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega_m(p) = K \cdot U_0 = \frac{U_0}{K_e}$$

# Réponse temporelle à un échelon

On impose un échelon de tension  $u_m(t) = U_0 \cdot u(t)$  avec  $U_0 = 100 \text{ V}$ .

Par transformée de Laplace,  $U_m(p) = \frac{U_0}{p}$

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J.R}{K_e.K_c} \cdot p + \frac{J.L}{K_e.K_c} p^2} \cdot \frac{U_0}{p} = \frac{K \cdot U_0}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

avec  $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$  et  $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0 \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$

$$\omega_m(t) = K \cdot U_0 \left[ 1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2}) \right]$$

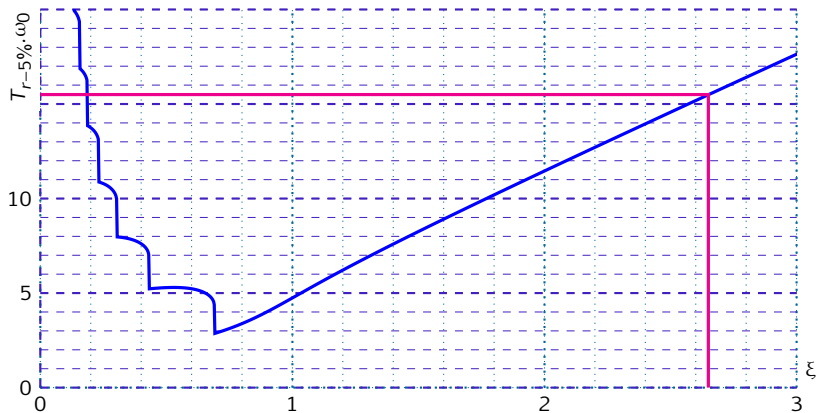
$$\omega_{m\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega_m(p) = K \cdot U_0 = \frac{U_0}{K_e}$$

## APPLICATION NUMÉRIQUE :

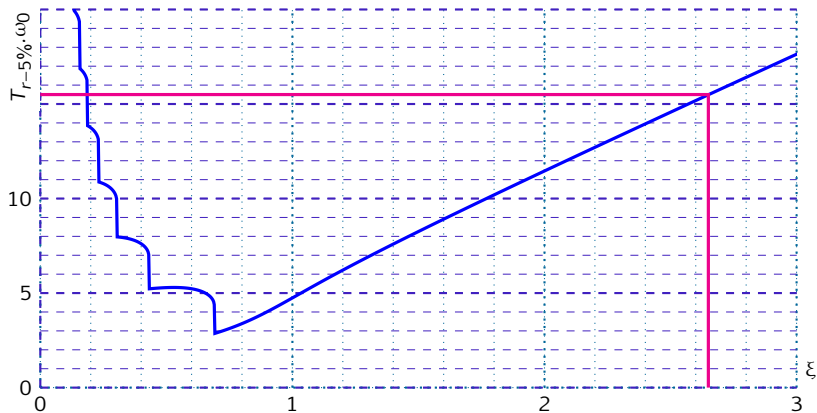
$\omega_1 \approx 7,47 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_2 \approx 193 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\tau_1 \approx 0,13 \text{ s}$ ,  $\tau_2 \approx 5,2 \text{ ms}$  et  $\omega_\infty \approx 83 \text{ rad/s}$



# Temps de réponse à 5%

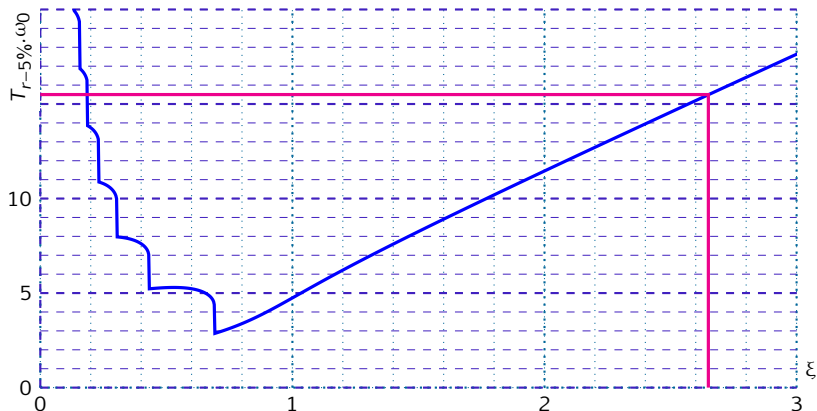


# Temps de réponse à 5%



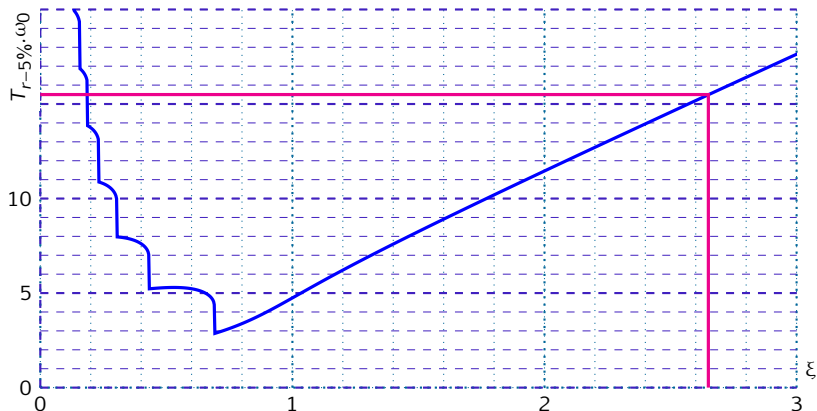
$$T_{rr} = t_{r5\%} \cdot \omega_0$$

# Temps de réponse à 5%



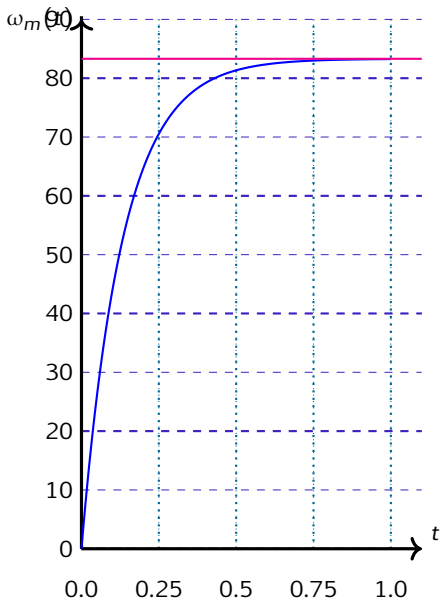
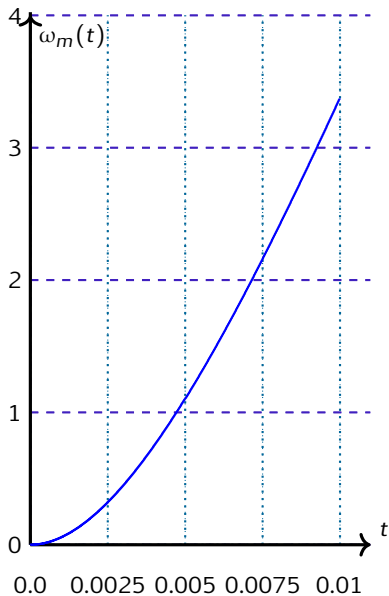
$$T_{rr} = t_{r5\%} \cdot \omega_0 \Rightarrow t_{r5\%} = \frac{T_{rr}}{\omega_0}$$

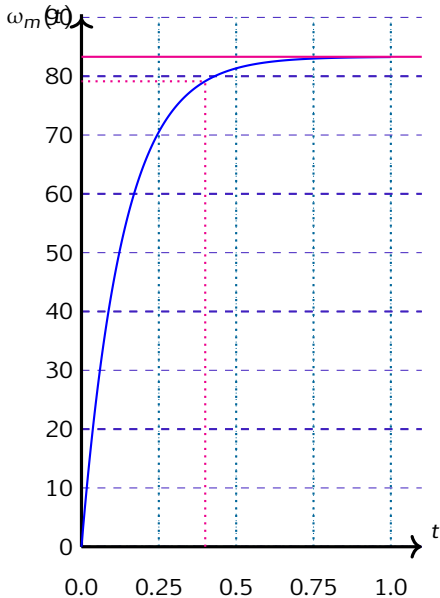
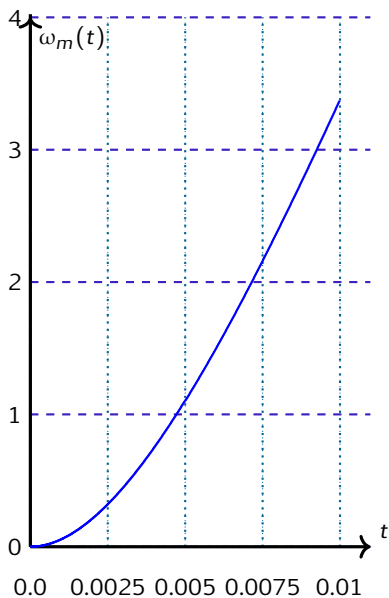
# Temps de réponse à 5%



$$T_{rr} = t_{r5\%} \cdot \omega_0 \Rightarrow t_{r5\%} = \frac{T_{rr}}{\omega_0} \Rightarrow t_{r5\%} \approx 0,4 \text{ s}$$

Réponse temporelle sans perturbation



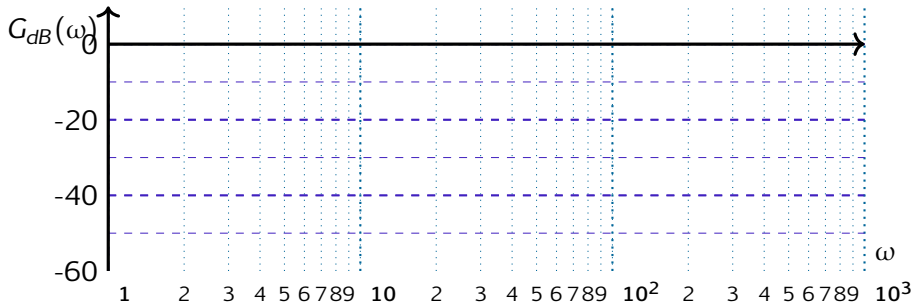


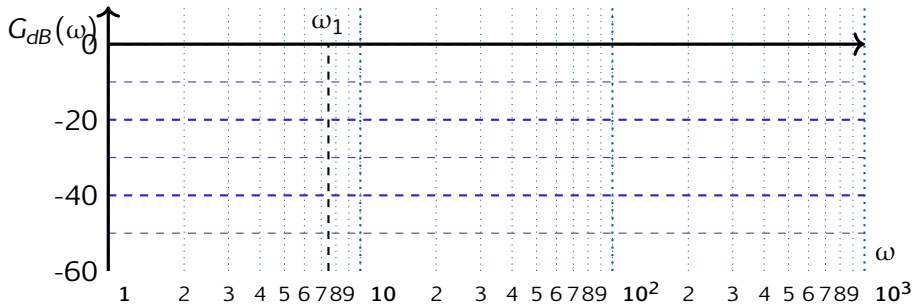
# Réponse fréquentielle

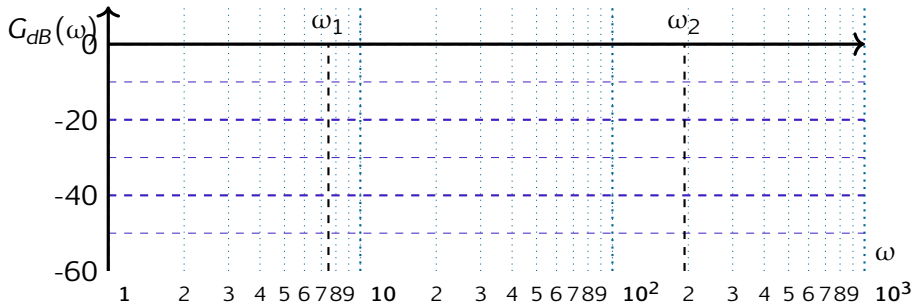
Soit la fonction de transfert  $H(p)$  définie par:

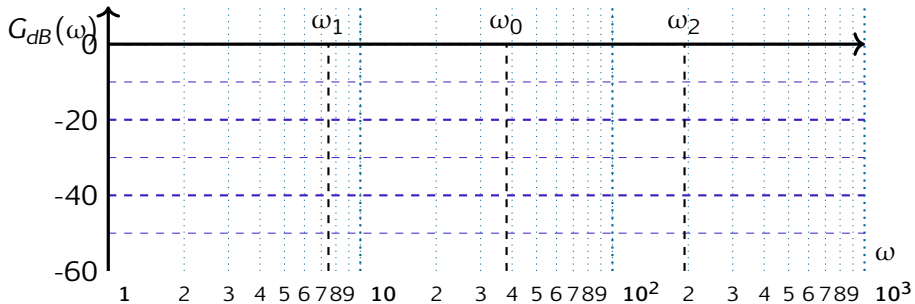
$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{J.R}{K_e.K_c} \cdot p + \frac{J.L}{K_e.K_c} \cdot p^2} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

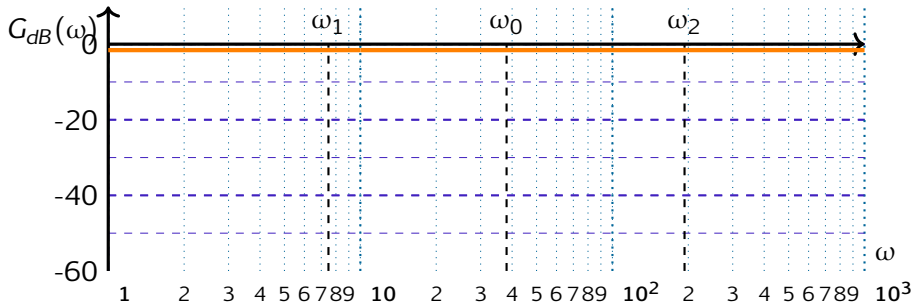


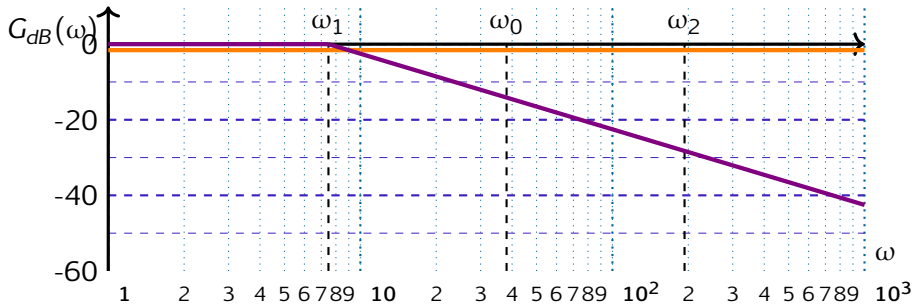


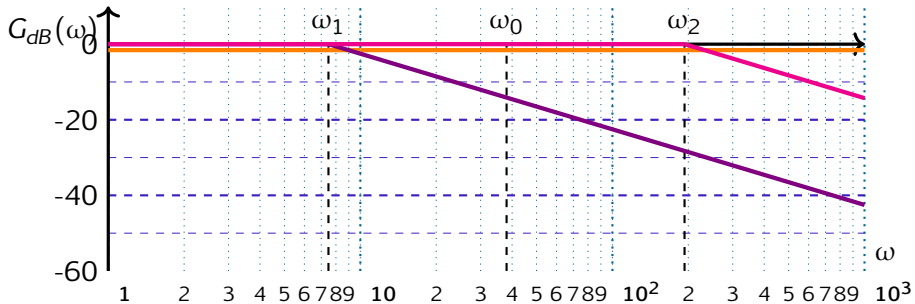


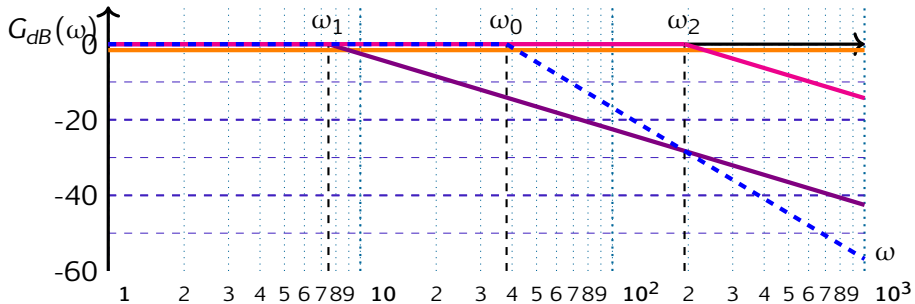




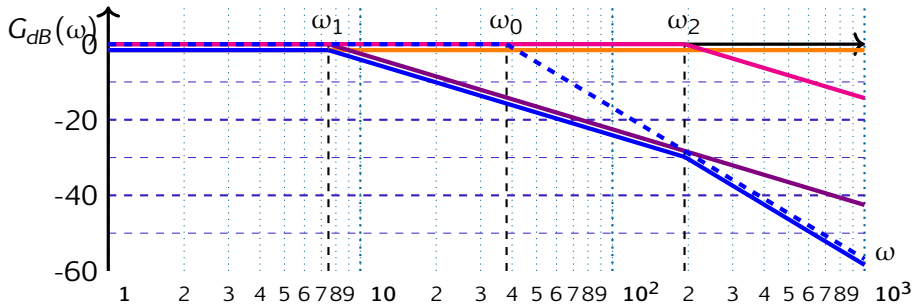


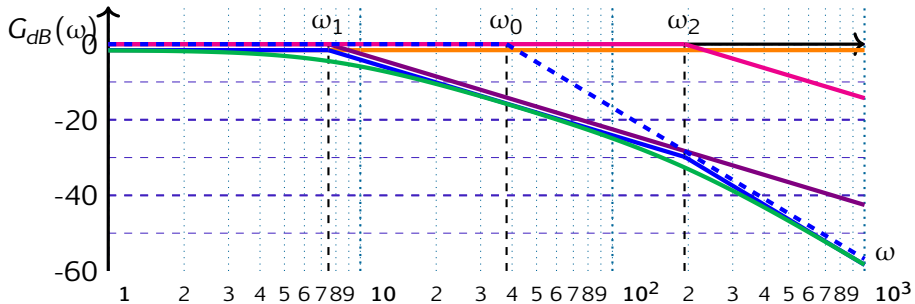


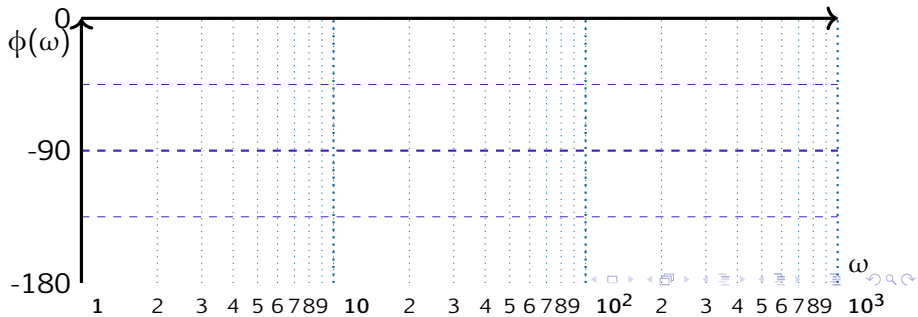
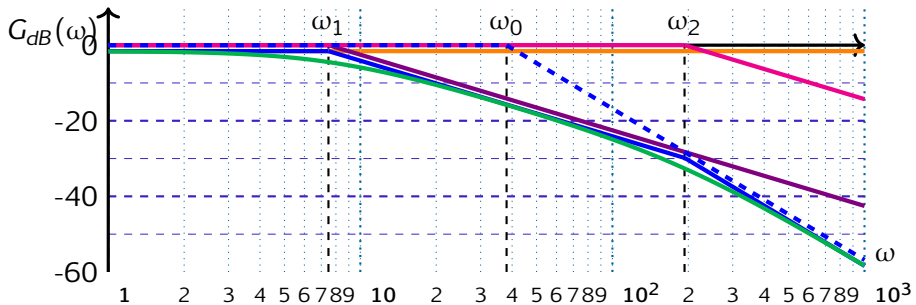


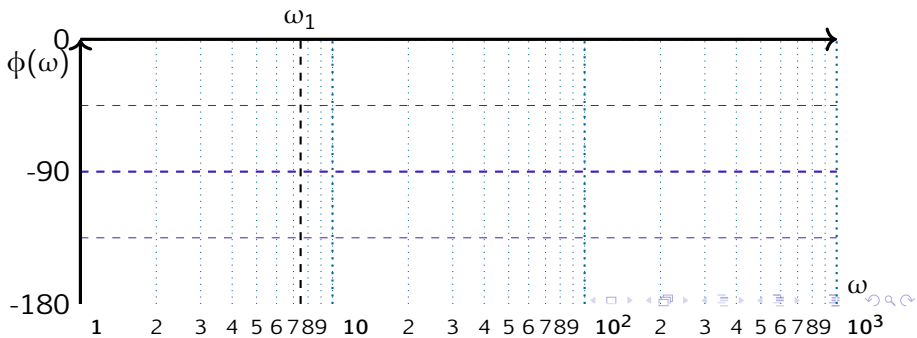
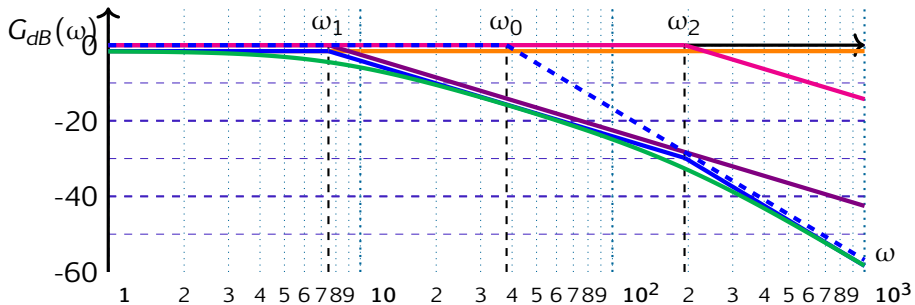


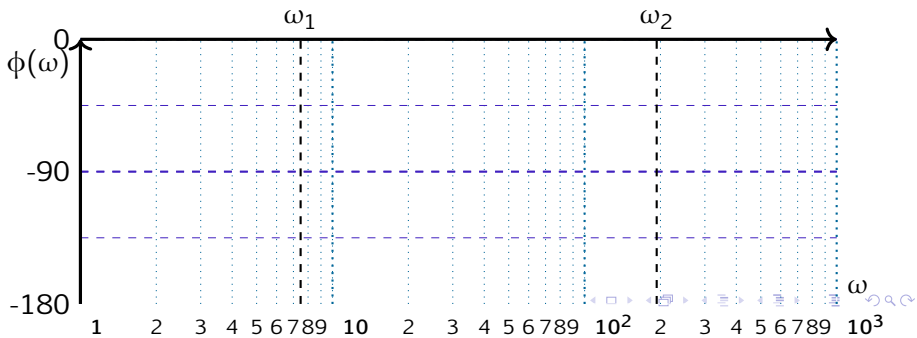
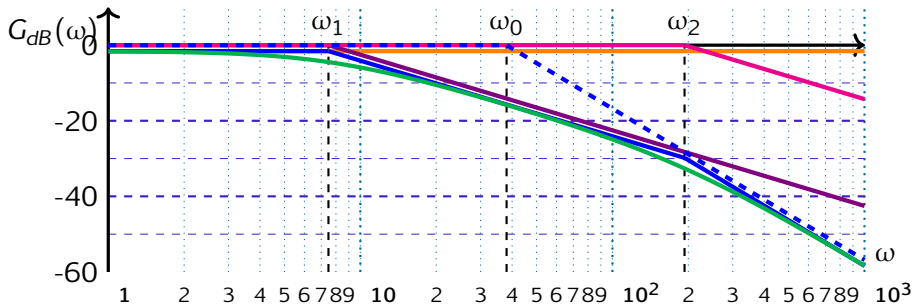


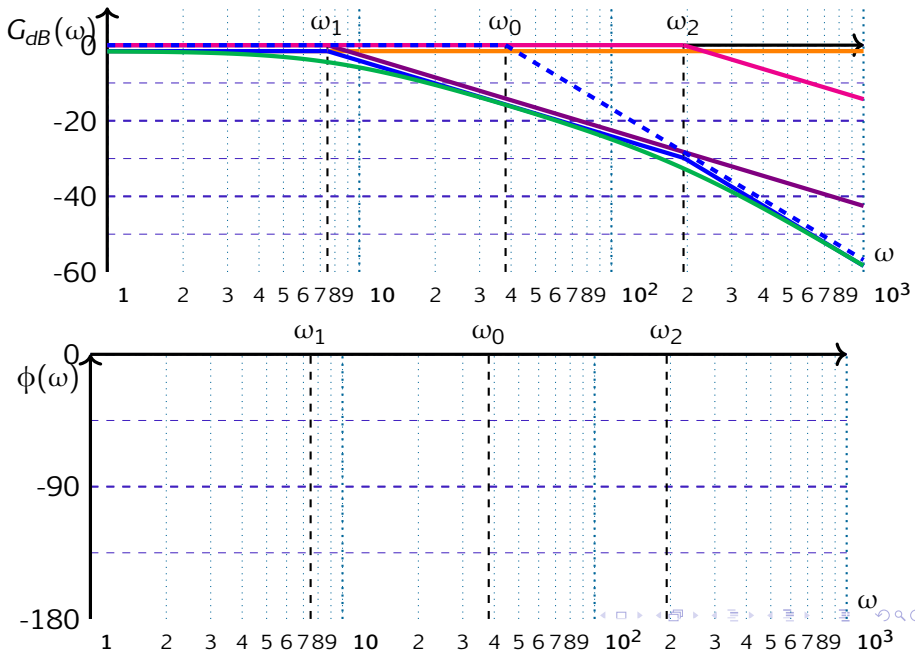


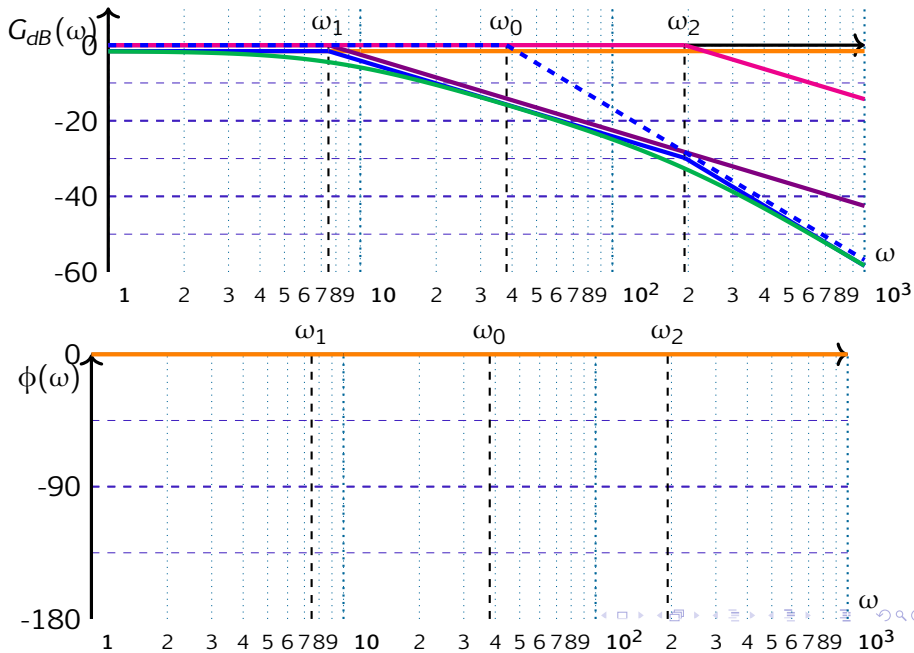


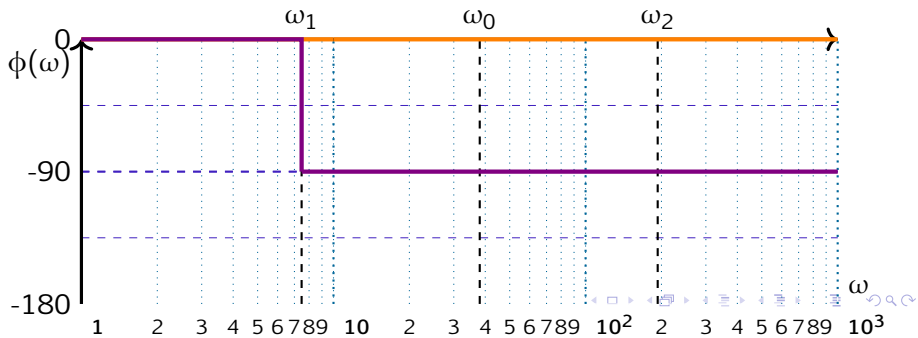
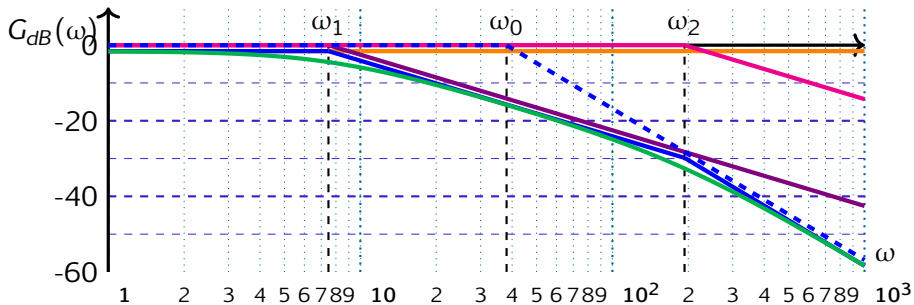




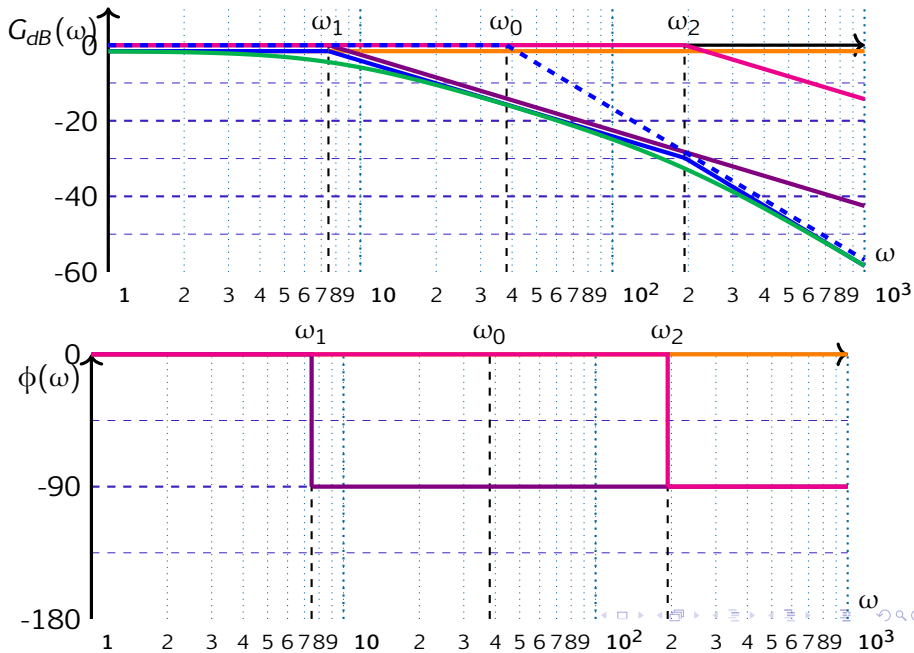


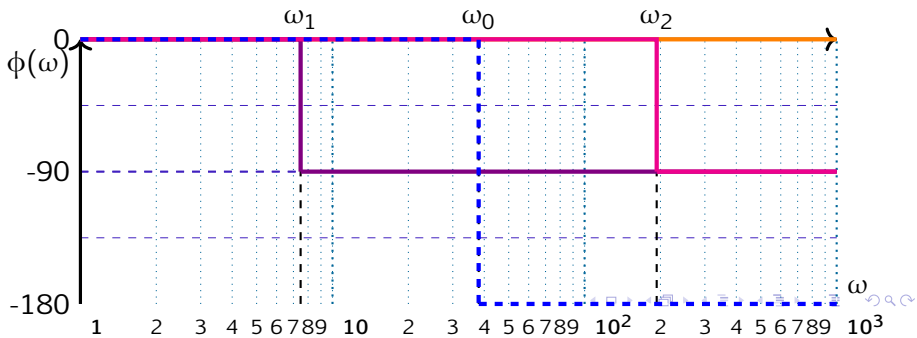
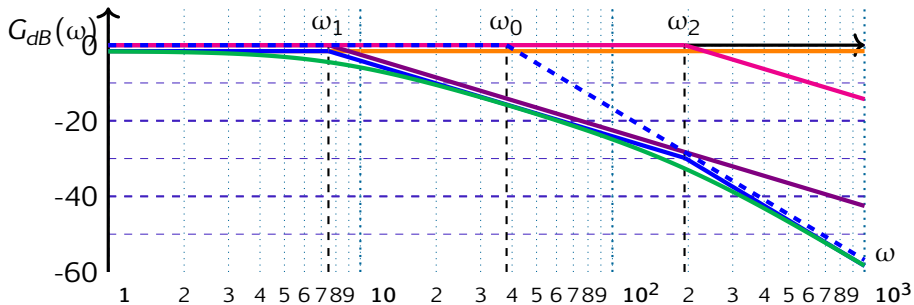


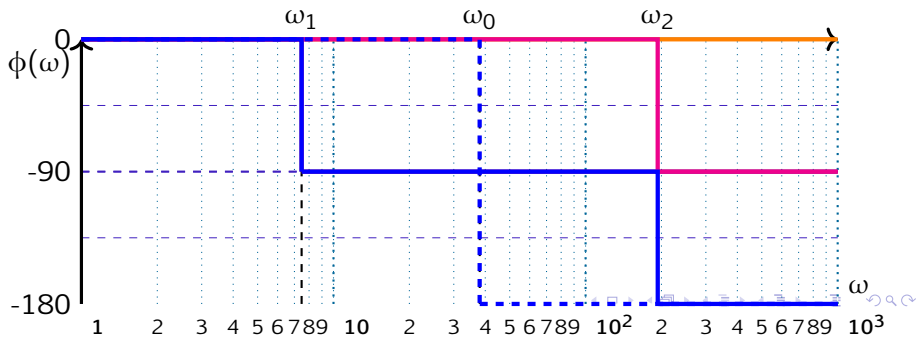
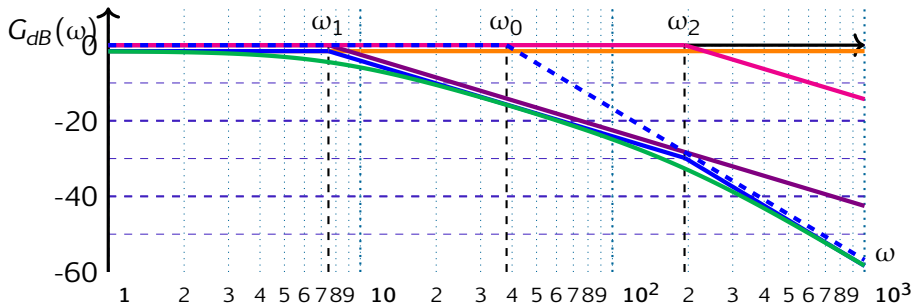


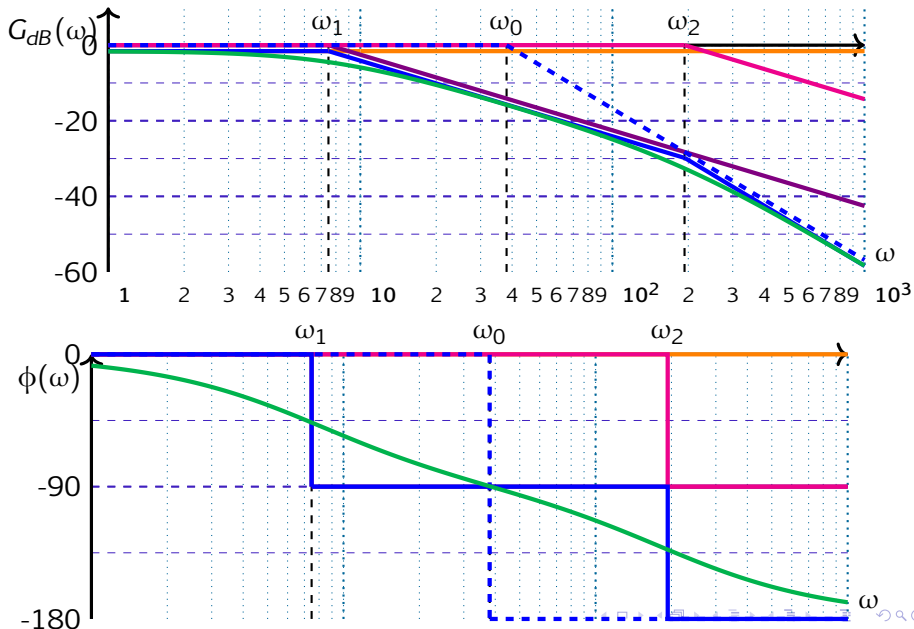












# Méthode lente

Par définition du gain,  $G_B(j\omega)$  vaut:

$$\begin{aligned} G_B(H(j\omega)) &= 20.\log(|H(j.\omega)|) \\ &= 20.\log(K) - 20.\log(|1 + j.\tau_1.\omega|) - 20\log(|1 + j.\tau_2.\omega|) \\ &= 20.\log(K) - 20.\log(\sqrt{1 + (\tau_1.\omega)^2}) - 20\log(\sqrt{1 + (\tau_2.\omega)^2}) \end{aligned}$$

En ce qui concerne la phase:

$$\begin{aligned} \phi_\omega(H(j\omega)) &= \arctan\left(\frac{\text{Im}(H(j.\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right) \\ &= -\arctan(\tau_1.\omega) - \arctan(\tau_2.\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_B(H(j.\omega)) &= 20.\log(K) - 20.\log(\sqrt{1 + (\tau_1.\omega)^2}) - 20.\log(\sqrt{1 + (\tau_2.\omega)^2}) \\ \phi_\omega(H(j.\omega)) &= -\arctan(\tau_1.\omega) - \arctan(\tau_2.\omega) \end{aligned}$$

Trois cas se présentent suivant les valeurs de  $\omega$

- $\omega \ll \omega_1 \ll \omega_2$

$$G_B(H(j.\omega)) \simeq 20.\log(K) \quad \phi_\omega(H(j.\omega)) = 0$$

- $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$

$$G_B(H(j.\omega)) \simeq 20.\log\left(\frac{K}{\tau_1}\right) - 20.\log(\omega) \quad \phi_\omega(H(j.\omega)) = -\frac{\pi}{2}$$

- $\omega_2 \ll \omega$

$$G_B(H(j.\omega)) \simeq 20.\log\left(\frac{K}{\tau_1.\tau_2}\right) - 40.\log(\omega) \quad \phi_\omega(H(j.\omega)) = -\pi$$