

CI-2 : Modéliser et simuler les systèmes linéaires continus invariants.

CI-2-4 Prévoir les réponses fréquentielles de systèmes
élémentaires

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

Germain Gondor

Sommaire

- 1 Intérêt de l'analyse fréquentielle
- 2 Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale
- 3 Représentation du comportement harmonique

Endosquelette

Objectifs

MODELISER SIMULER RESOUDRE EXPERIMENTER

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
 - Identifier les paramètres d'un modèle.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
 - Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.
 - Compléter un modèle multiphysique.
 - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
 - Simplifier un modèle.
- **B3** Valider un modèle
 - Préciser les limites de validité d'un modèle.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
 - Déterminer la réponse temporelle.
- **D2** Proposer et justifier un protocole expérimental
 - Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation.
 - Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix.
 - Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement.

Sommaire

- 1 Intérêt de l'analyse fréquentielle
 - Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier
 - Transformée de Fourier d'un signal quelconque
- 2 Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale
- 3 Représentation du comportement harmonique

Intérêt de l'analyse fréquentielle

Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Si $f(t)$ est un signal périodique de période T_0 alors:

- $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$

- $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} F_{-k} e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

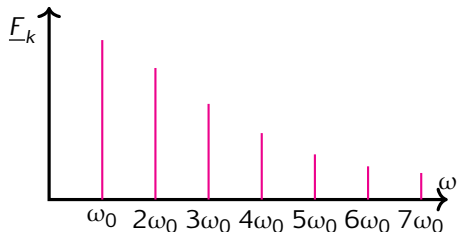
Intérêt de l'analyse fréquentielle

Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

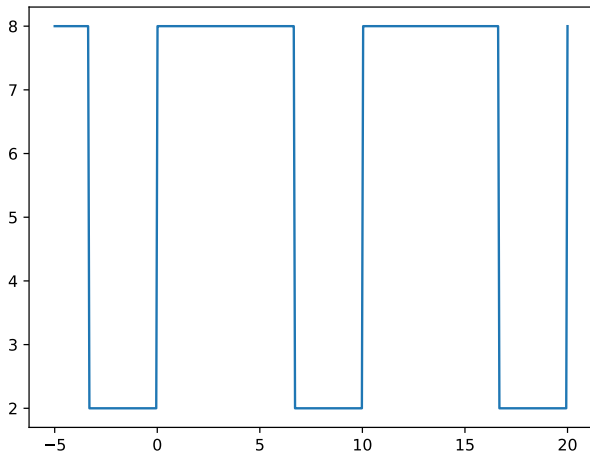
Si $f(t)$ est un signal périodique de période T_0 alors:

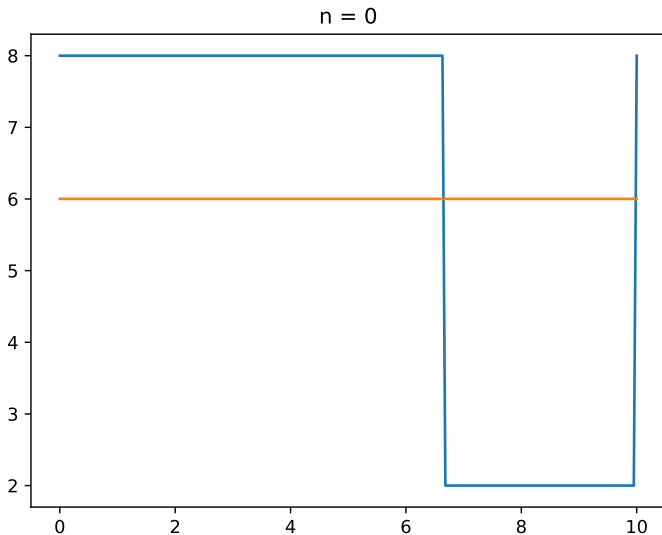
- $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$

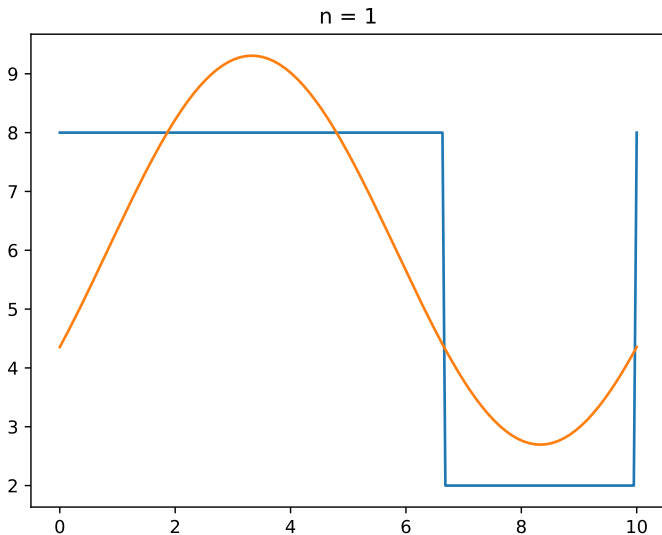
- $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} F_{-k} e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

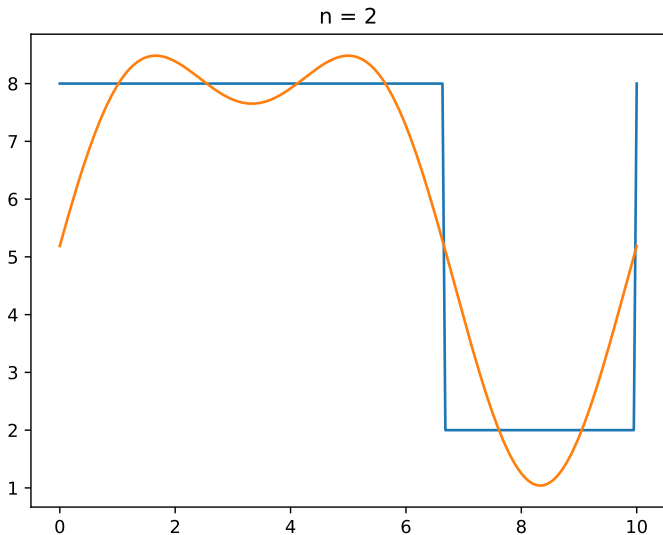


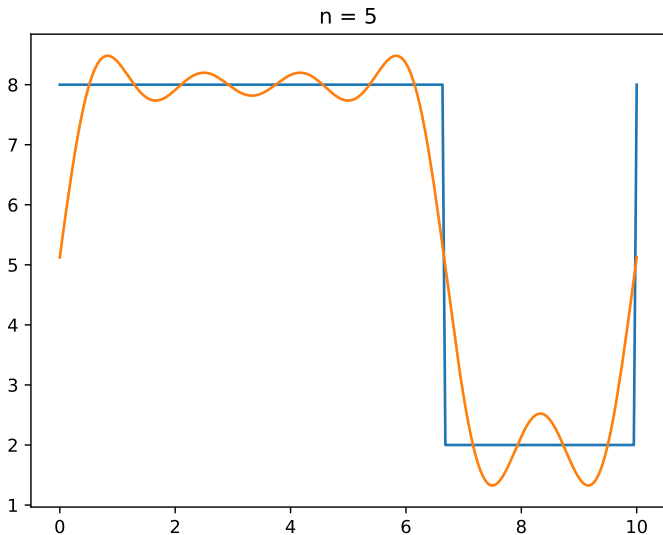
Exemple de décomposition d'un signal créneau en série de Fourier.
La série est tronquée pour différentes valeurs de $n \in \{0, 1, 2, 5, 10, 50\}$.

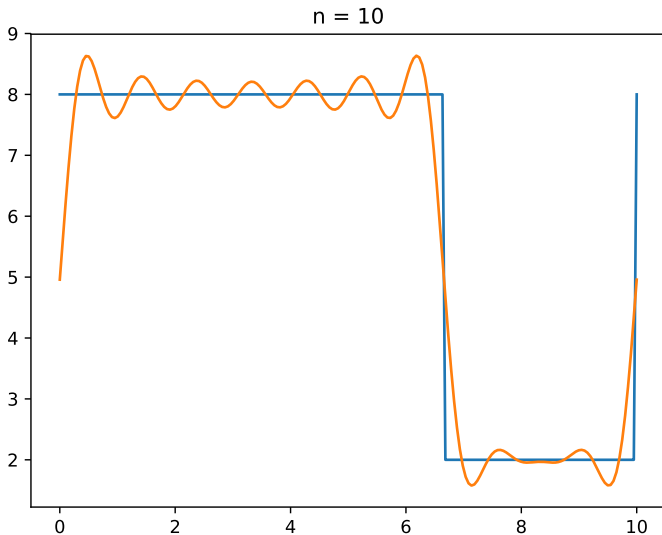


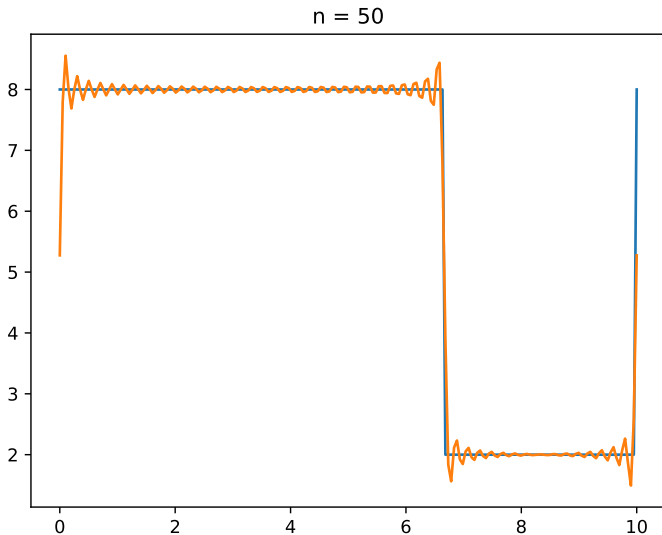




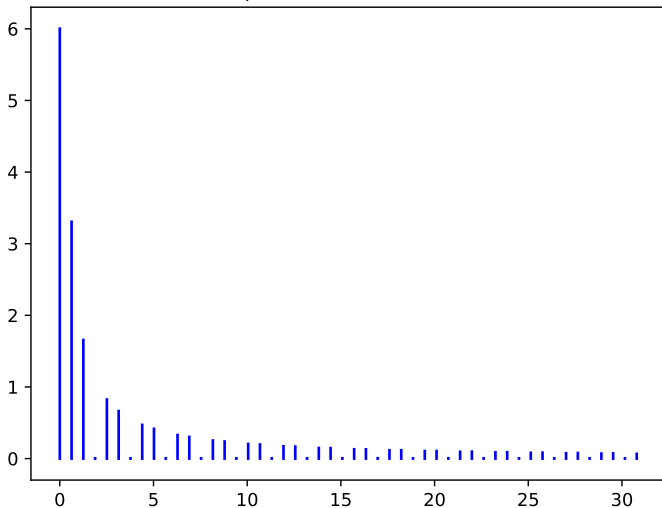






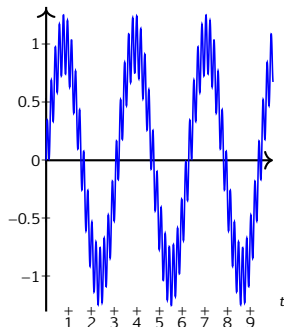


Spectre de la fonction



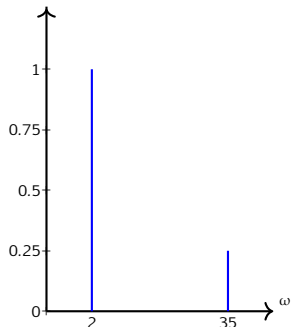
Transformée de Fourier d'un signal quelconque

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega).e^{j.\omega.t} d\omega$$

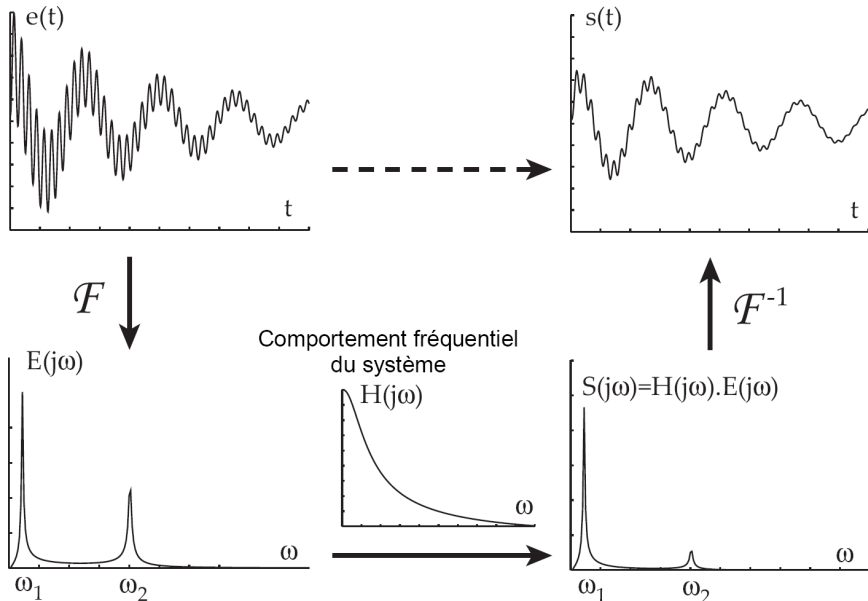


Par transformée de
Fourier
 \Rightarrow
 $f(t) = \sin(2.t) + 0.25.\sin(35.t)$

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-j.\omega.t} dt$$



filtrage passe bas d'un signal



Sommaire

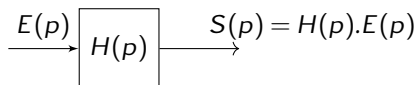
- 1 Intérêt de l'analyse fréquentielle
- 2 Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale**
- 3 Représentation du comportement harmonique

Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale

L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)u(t) = \text{Re}(e_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)})$

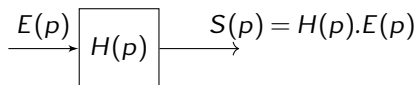
Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale

L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)u(t) = \text{Re}(e_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)})$



Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale

L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)u(t) = \text{Re}(e_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)})$

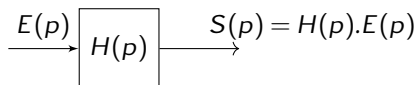


En régime permanent :

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}(e_0 \cdot H(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \Phi)}) \\ &= e_0 \cdot |H(j \cdot \omega)| \cos(\omega \cdot t + \Phi + \arg(H(j \cdot \omega))) \end{aligned}$$

Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale

L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)u(t) = \text{Re}(e_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)})$



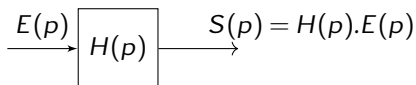
En régime permanent :

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}(e_0 \cdot H(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \Phi)}) \\ &= e_0 \cdot |H(j \cdot \omega)| \cos(\omega \cdot t + \Phi + \arg(H(j \cdot \omega))) \end{aligned}$$

La réponse d'un système linéaire continu invariant à une entrée sinusoïdale est une réponse sinusoïdale de même fréquence (même période et même pulsation).

Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale

L'entrée est sinusoïdale: $e(t) = e_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)u(t) = \text{Re}(e_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)})$



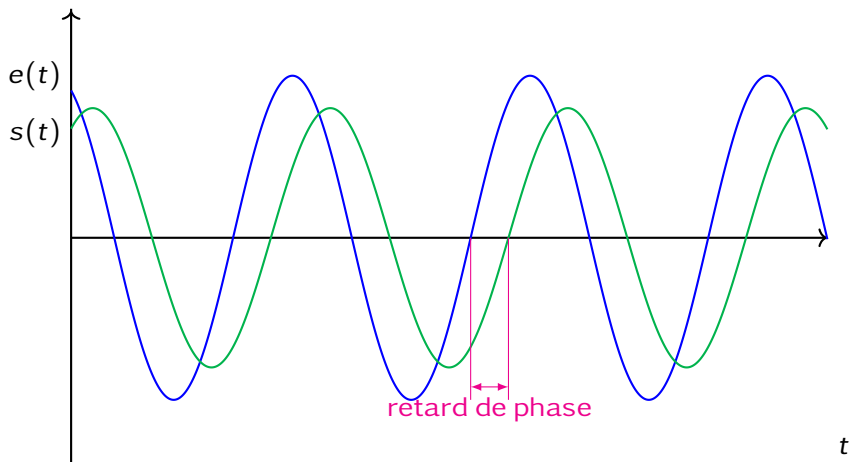
En régime permanent :

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}(e_0 \cdot H(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \Phi)}) \\ &= e_0 \cdot |H(j \cdot \omega)| \cos(\omega \cdot t + \Phi + \arg(H(j \cdot \omega))) \end{aligned}$$

La réponse d'un système linéaire continu invariant à une entrée sinusoïdale est une réponse sinusoïdale de même fréquence (même période et même pulsation).

Le signal est déphasé de $\arg(H(j \cdot \omega))$ et l'amplitude vaut $e_0 \cdot |H(j \cdot \omega)|$.

Le signal est déphasé de $\arg(H(j.\omega))$ et l'amplitude vaut $e_0 \cdot |H(j.\omega)|$.



Sommaire

- 1 Intérêt de l'analyse fréquentielle
- 2 Réponse d'un système a une entrée sinusoïdale
- 3 Représentation du comportement harmonique**
 - Ordres de grandeurs et modes de représentation
 - Diagrammes de Bode
 - Système du 1er ordre
 - Système du 2nd ordre
 - Représentation d'un système quelconque
 - Représentation de Bode asymptotique des fonctions élémentaires

Représentation du comportement harmonique

Ordres de grandeurs et modes de représentation

La fonction de transfert dépend des valeurs de ω . Pour la caractériser sur une large plage fréquentielle en donnant autant d'importance aux basses fréquences qu'aux hautes fréquences, on utilise une échelle logarithmique.

De même, les échelles de variation de $|H(j.\omega)|$ sont si étendues qu'il est préférable de faire figurer les logarithmes de ces quantités. On définit alors par:

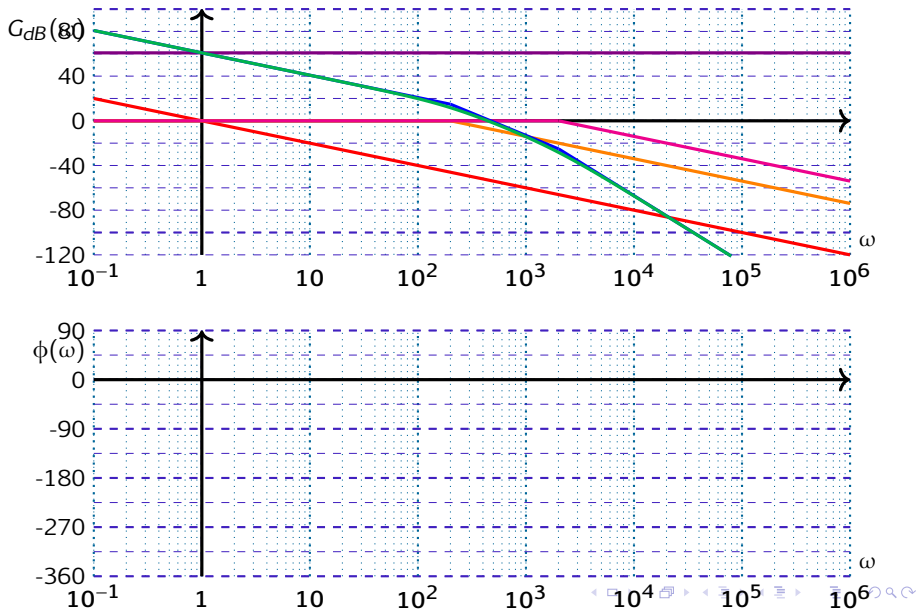
$$G_B(\omega) = 20.\log|H(j.\omega)| \quad \text{le gain en décibels (dB)}$$

Afin de représenter $H(j.\omega)$, on utilise principalement la représentation de BODE.

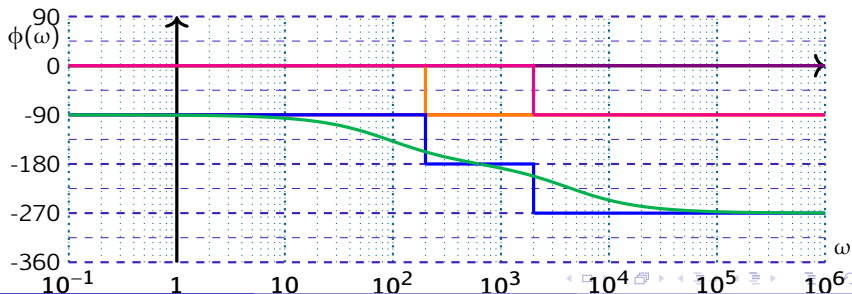
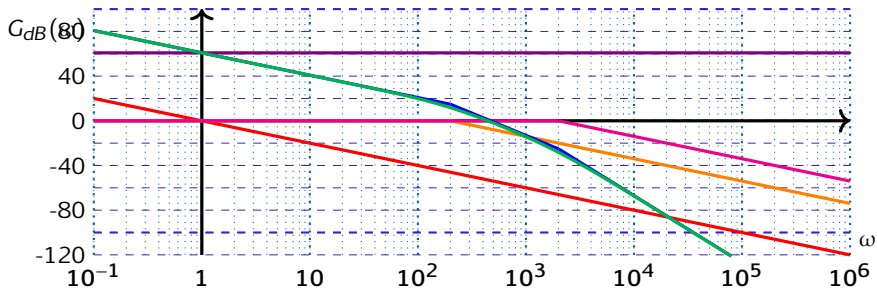
Diagrammes de Bode

Au nombre de deux, ces diagrammes représentent les variations de gain en décibel et de phase en degré en fonction de la pulsation en radian par seconde tracée sur une échelle logarithmique. On se contente dans la majorité des cas d'un tracé asymptotique.

Diagrammes de Bode



Diagrammes de Bode

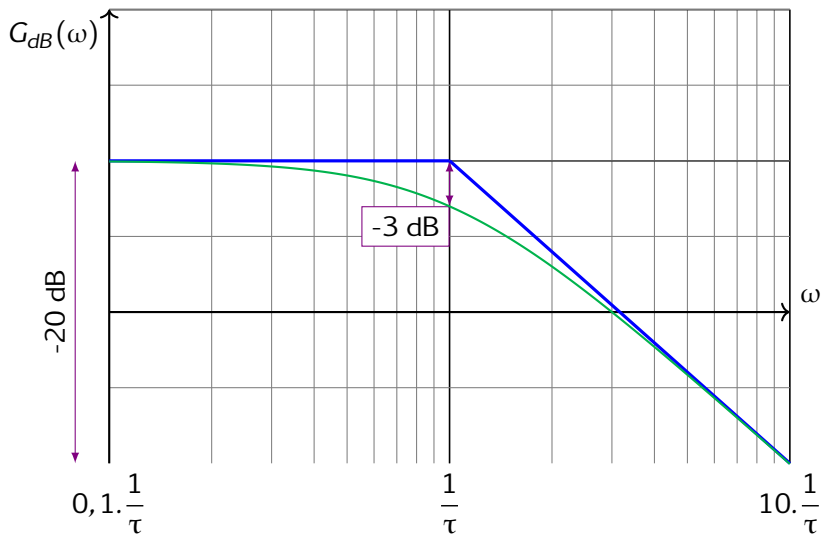


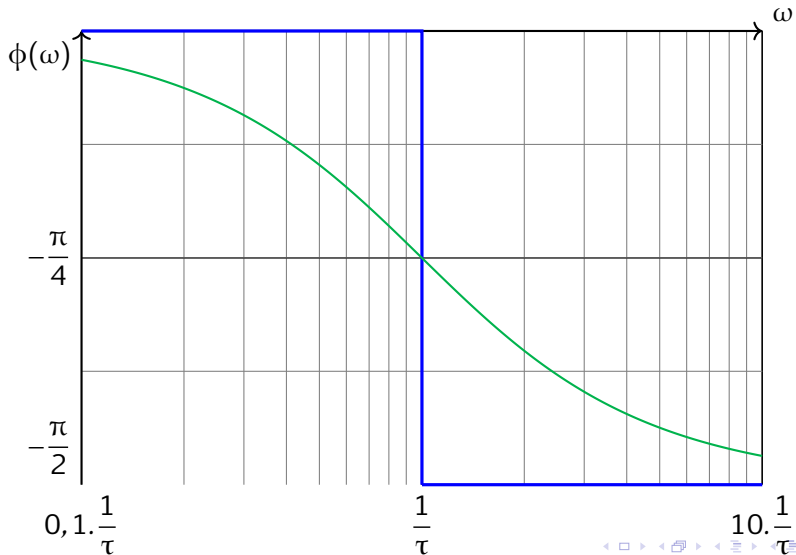
Système du 1er ordre

La transmittance (ou fonction de transfert) s'écrit sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} \Rightarrow H(j.\omega) = \frac{K}{1 + \tau.j.\omega}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) = \arg(H(j.\omega)) = -\arctan(\tau.\omega) \quad \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ puisque } \tau\omega > 0 \end{array} \right.$$

Gain en décibels $G_B(\omega)$ 

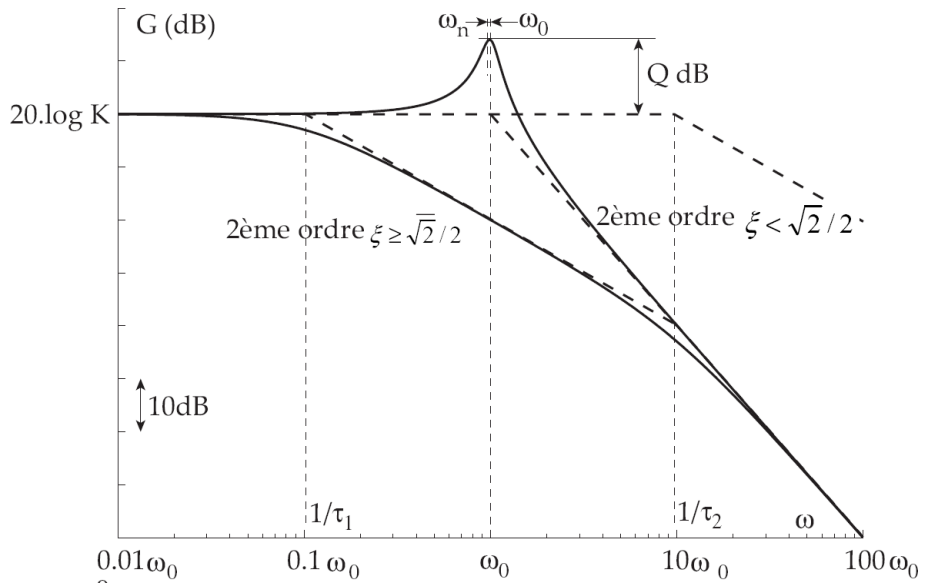
Phase $\phi_\omega(\omega)$ 

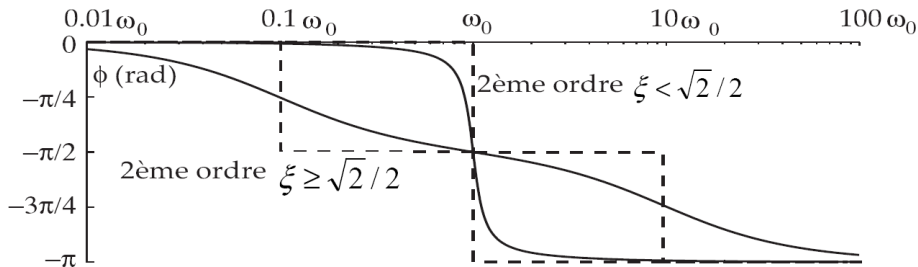
Système du 2nd ordre

La transmittance se met sous la forme :

$$H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2} \Rightarrow H(j.\omega) = \frac{K.\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j.\omega)| = \frac{K.\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4.\xi^2.\omega_0^2.\omega^2}} \\ \phi_\omega(\omega) = -\arg((\omega_0^2 - \omega^2) + 2.j.\xi.\omega_0.\omega) = -\arctan\left(\frac{2.\xi.\omega_0.\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \text{avec } \phi_\omega(\omega) \in [-\pi, 0] \end{array} \right.$$

Gain en décibels $G_B(\omega)$ 

Phase $\phi_\omega(\omega)$ 

Si $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ le diagramme de Bode présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$.

Si $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ le diagramme de Bode présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$.

En effet, puisque la fonction racine crée une bijection de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , rechercher un extremum du dénominateur de $|H(j \cdot \omega)|$ revient à chercher le minimum de la fonction $f(\omega)$ définie par:

Si $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ le diagramme de Bode présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$.

En effet, puisque la fonction racine crée une bijection de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , rechercher un extremum du dénominateur de $|H(j.\omega)|$ revient à chercher la minimum de la fonction $f(\omega)$ définie par:

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2$$

Si $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ le diagramme de Bode présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$.

En effet, puisque la fonction racine crée une bijection de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , rechercher un extremum du dénominateur de $|H(j.\omega)|$ revient à chercher la minimum de la fonction $f(\omega)$ définie par:

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2$$

$$\Rightarrow f'(\omega) = (-2 \cdot \omega) \cdot 2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_0^2 \cdot 2 \cdot \omega$$

$$f'(\omega_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2.\xi^2.\omega_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(\omega_r) = 0 &\Rightarrow -(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2.\xi^2.\omega_0^2 = 0 \\ &\Rightarrow \omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \text{On a alors:}$$

$$f'(\omega_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 2.\xi^2.\omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{On a alors:}$$

$$G_{dB}(\omega_r) = 20.\log\left(\frac{K.\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4.\xi^2.\omega_0^2.\omega_r^2}}\right)$$

$$= 20.\log\left(\frac{K}{\sqrt{(1 - (1 - 2.\xi^2))^2 + 4.\xi^2.(1 - 2.\xi^2)}}\right)$$

coefficient de
surtension

$$= 20.\log\left(\frac{K}{\sqrt{4.\xi^2 + 4.\xi^2 - 8.\xi^4}}\right) = 20.\log(K) + 20.\log\left(\frac{1}{2.\xi.\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

surtension

Premier ordre et second ordre paramétrés

Représentation d'un système quelconque

Afin de représenter un système, il est intéressant de le décomposer en fonctions élémentaires du premier, deuxième ordre et en intégrateurs ou dérivateurs.

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i \cdot p) \prod_m \left(1 + \frac{2 \cdot \xi_m}{\omega_{0m}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0m}^2} \right)}{\prod_k (1 + \tau_k \cdot p) \prod_n \left(1 + \frac{2 \cdot \xi_n}{\omega_{0n}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0n}^2} \right)}$$

Le module de la fonction de transfert en décibels est égal à la somme des modules de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
 G_B(\omega) &= 20. \log |H(j.\omega)| = 20. \log \left| \frac{K}{(j.\omega)^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i.(j.\omega)) \prod_m \left(1 + \frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2} \right)}{\prod_k (1 + \tau_k.(j.\omega)) \prod_n \left(1 + \frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2} \right)} \right| \\
 &= 20. \log \left| \frac{K}{(j.\omega)^\alpha} \right| + \sum_i 20. \log |1 + \tau_i.(j.\omega)| + \sum_m 20. \log \left| 1 + \frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2} \right| \dots \\
 &\quad \dots - \sum_k 20. \log |1 + \tau_k.(j.\omega)| - \sum_n 20. \log \left| 1 + \frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2} \right|
 \end{aligned}$$

L'argument de la fonction de transfert est égal à la somme des arguments de chaque fonction élémentaire.

$$\begin{aligned}
 \phi_\omega(\omega) &= \arg(H(j.\omega)) = \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i.(j.\omega)) \prod_m \left(1 + \frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right)}{\prod_k (1 + \tau_k.(j.\omega)) \prod_n \left(1 + \frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)}\right) \\
 &= \arg\left(\frac{K}{(j.\omega)^\alpha}\right) + \sum_i \arg(1 + \tau_i.(j.\omega)) + \sum_m \arg\left(1 + \frac{2.\xi_m}{\omega_{0m}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0m}^2}\right) \dots \\
 &\quad \dots - \sum_k \arg(1 + \tau_k.(j.\omega)) - \sum_n \arg\left(1 + \frac{2.\xi_n}{\omega_{0n}}.(j.\omega) + \frac{(j.\omega)^2}{\omega_{0n}^2}\right)
 \end{aligned}$$

Action proportionnelle

$$H(p) = K$$

Action proportionnelle

$$H(p) = K$$

$$G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|K|)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = 20.\log(K)$$

Action proportionnelle

$$H(p) = K$$

$$G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|K|)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = 20.\log(K)$$

$$\phi(H(j.\omega)) = \arg(K)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0$$

Action proportionnelle

$$H(p) = K$$

$$G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|K|)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = 20.\log(K)$$

$$\phi(H(j.\omega)) = \arg(K)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0$$

$$H(p) = K$$

Action proportionnelle

$$H(p) = K$$

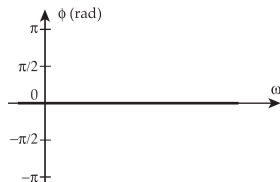
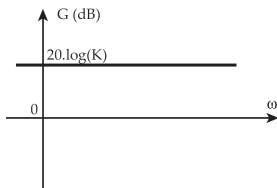
$$G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|K|)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = 20.\log(K)$$

$$\phi(H(j.\omega)) = \arg(K)$$

$$K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0$$

$$H(p) = K$$



Action intégrale et action dérivée

$$H(p) = p^\alpha \Rightarrow \left\{ \right.$$

Action intégrale et action dérivée

$$H(p) = p^\alpha \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) & = 20.\log(|(j.\omega)^\alpha|) = \alpha.20.\log(|j.\omega|) \\ & = \alpha.20.\log(\omega) = \alpha.20.X \end{cases}$$

Action intégrale et action dérivée

$$H(p) = p^\alpha \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) &= 20.\log(|(j.\omega)^\alpha|) = \alpha.20.\log(|j.\omega|) \\ &= \alpha.20.\log(\omega) = \alpha.20.X \\ \phi(H(j.\omega)) &= \arg((j.\omega)^\alpha) = \alpha.\arg(0 + j.\omega) \stackrel{\omega \geq 0}{=} \alpha.\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Action intégrale et action dérivée

$$H(p) = p^\alpha \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) &= 20.\log(|(j.\omega)^\alpha|) = \alpha.20.\log(|j.\omega|) \\ &= \alpha.20.\log(\omega) = \alpha.20.X \\ \phi(H(j.\omega)) &= \arg((j.\omega)^\alpha) = \alpha.\arg(0+j.\omega) \stackrel{\omega \geq 0}{=} \alpha.\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Action intégrale

$$H(p) = \frac{1}{p}$$



Action dérivée

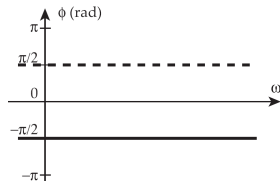
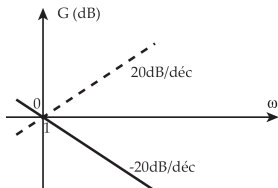
$$H(p) = p$$

Action intégrale et action dérivée

$$H(p) = p^\alpha \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(H(j.\omega)) &= 20.\log(|(j.\omega)^\alpha|) = \alpha.20.\log(|j.\omega|) \\ &= \alpha.20.\log(\omega) = \alpha.20.X \\ \phi(H(j.\omega)) &= \arg((j.\omega)^\alpha) = \alpha.\arg(0 + j.\omega) \stackrel{\omega \geq 0}{=} \alpha.\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Action intégrale

$$H(p) = \frac{1}{p}$$



Action dérivée

$$H(p) = p$$

Systèmes du premier ordre

$$H(p) = (1 + \tau.p)^\alpha$$

Systèmes du premier ordre

$$H(p) = (1 + \tau.p)^\alpha$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|(1 + \tau.j.\omega)^\alpha|) \\ = \alpha.20.\log(|1 + j.\tau.\omega|) \\ = \alpha.20.\log(\sqrt{1 + (\tau.\omega)^2}) \end{array} \right.$$

Systèmes du premier ordre

$$H(p) = (1 + \tau.p)^\alpha$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB}(H(j.\omega)) = 20.\log(|(1 + \tau.j.\omega)^\alpha|) \\ \phantom{G_{dB}(H(j.\omega))} = \alpha.20.\log(|1 + j.\tau.\omega|) \\ \phantom{G_{dB}(H(j.\omega))} = \alpha.20.\log(\sqrt{1 + (\tau.\omega)^2}) \\ \phi(H(j.\omega)) = \arg((1 + \tau.j.\omega)^\alpha) \\ = \alpha.\arg(1 + j.\tau.\omega) = \alpha.\arctan(\tau.\omega) \end{array} \right.$$

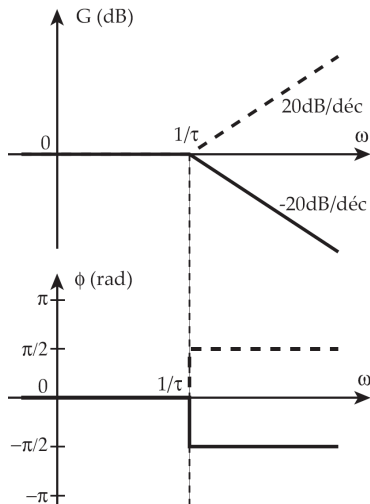
Systèmes du premier ordre

	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\omega = \frac{1}{\tau}$	$\omega \gg \frac{1}{\tau}$
$G_{dB}(H(j.\omega)) \approx$	$\alpha.20.\log(1) = 0$	$\alpha.20.\log\left(\sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau}}\right) = -3.\alpha$	$\alpha.(20.\log(\tau) + 20.\log(\omega)) = \alpha.(20.\log(\tau) + 20.X)$
	$\begin{aligned} \alpha.20.\log(1) &= \alpha.(20.\log(\tau) + 20.\log(\omega)) \\ 0 &= 20.\log(\tau.\omega) \end{aligned}$ <p>Intersection des asymptotes de gain au point $\left(\omega = \frac{1}{\tau}, G_{dB} = 0\right)$</p>		
$\phi(H(j.\omega)) \approx$	$\alpha.\arctan(0) = 0$	$\alpha.\arctan\left(\frac{\tau}{\tau}\right) = \frac{\pi}{4}.\alpha$	$\alpha.\arctan(+\infty) = \alpha.\frac{\pi}{2}$

Systèmes du premier ordre

$$H(p) = 1 + \tau.p$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau.p}$$



Systèmes du second ordre

$$H(p) = \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)^\alpha$$

Systèmes du second ordre

$$H(p) = \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB}(H(j \cdot \omega)) = 20 \cdot \log \left(\left| \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot j \cdot \omega + \frac{(j \cdot \omega)^2}{\omega_0^2} \right)^\alpha \right| \right) \\ = \alpha \cdot 20 \cdot \log \left(\left| 1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot j \cdot \omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \right) \\ = \alpha \cdot 20 \cdot \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right) \\ \phi(H(j \cdot \omega)) = \arg \left(\left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot j \cdot \omega + \frac{(j \cdot \omega)^2}{\omega_0^2} \right)^\alpha \right) \\ = \alpha \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \end{array} \right.$$

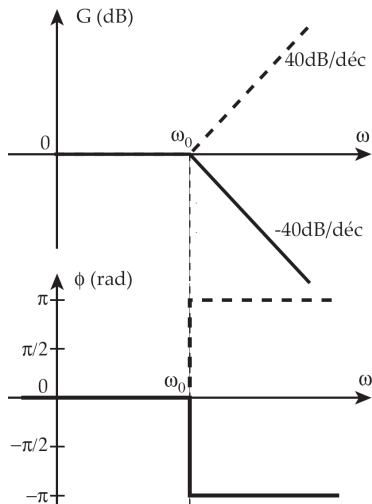
Systèmes du second ordre

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$G_{dB}(H(j.\omega)) \approx$	$\alpha.20.\log(1) = 0$	$\alpha.20.\log(2.\xi)$	$\alpha.20.\log\left(\sqrt{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}\right) = -\log\left(\omega_0^{(\alpha.40)}\right) + \alpha.420.X$
	$\alpha.20.\log(1) = \alpha.40.\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $0 = \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ Intersection des asymptotes de gain au point $(\omega = \omega_0, G_{dB} = 0)$		
$\phi(H(j.\omega)) \approx$	0	$\frac{\pi}{2}.\alpha$	$\alpha.\arctan(0^-) = \alpha.\pi$

Si $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors le diagramme de Bode en gain présente une résonance pour $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2}$.

$$\text{si } \xi \in]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[\Rightarrow G_{dB}(H(j.\omega_r)) = 20.\log\left(\frac{K}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}\right) \text{ avec } \omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2}$$

Systèmes du second ordre



$$H(p) = 1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

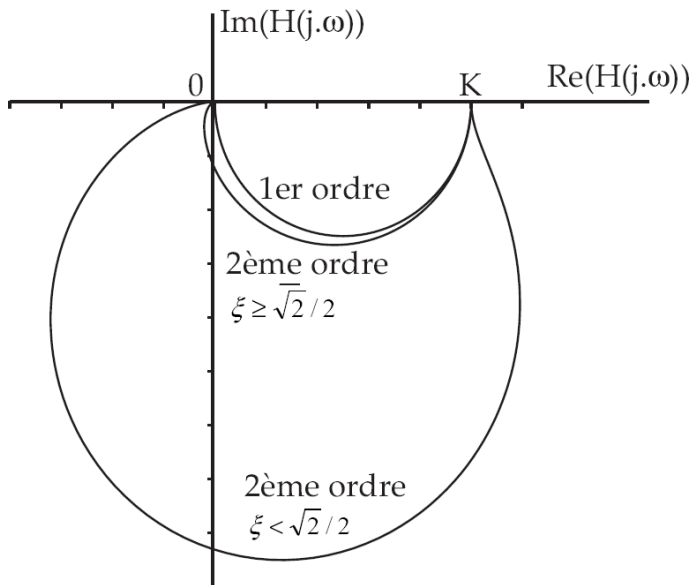
$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Représentation Nyquist

Le diagramme de Nyquist présente la courbe $H(j.\omega)$ dans le plan complexe (partie imaginaire en fonction de la partie réelle).

L'interprétation peut se faire en coordonnées cartésiennes ($\text{Re}[H(j.\omega)], \text{Im}[H(j.\omega)]$) ou en coordonnées polaires ($|H(j.\omega)|, \arg[H(j.\omega)]$).

Représentation Nyquist



Représentation de Black

Le diagramme de Black présente le module $G_B(\omega) = 20 \cdot \log |H(j \cdot \omega)|$ en décibels en fonction de la phase $\phi_\omega(\omega) = \arg(H(j \cdot \omega))$.

Représentation de Black

