

CI-3 :

Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes.

CI-3-4 Déterminer les lois entrées/sorties de transmetteurs de puissance

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

Germain Gondor

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin
- 5 Schématisation des engrenages
- 6 Les trains d'engrenages
- 7 Système poulie/courroie

Objectifs

MODELISER CALCULER RESOUDRE

A la fin de la séquence, l'élève devra être capable de :

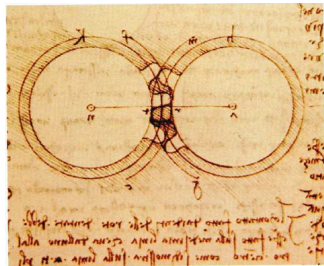
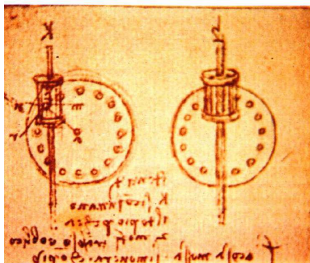
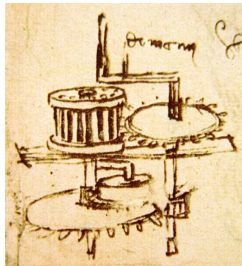
- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
 - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
 - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
 - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
 - Simplifier un modèle de mécanisme.
- **C1** Proposer une démarche de résolution
 - Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
 - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

Sommaire

- 1 Introduction
 - Historique
 - Roues de friction
 - Roues de friction
 - Définitions
 - Définitions
 - Principe de l'engrènement
 - Profil de la denture
 - Profil de la denture
 - Taillage d'un engrenage
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin

Historique

L'entraînement positif entre deux axes a été l'objet de nombreuses évolutions au cours des âges, comme en témoignent des dessins de Léonard de Vinci (fin du XV^{ème}).



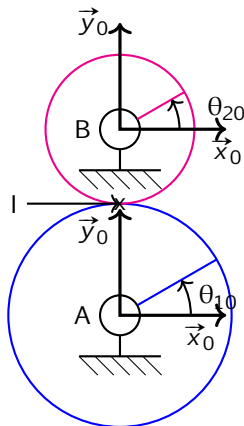
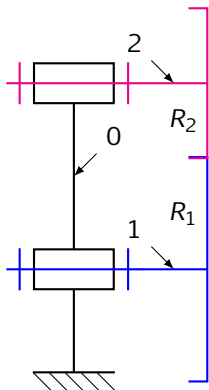
Roues de friction

On appelle transmission par roues de friction un mécanisme constitué de deux roues roulant sans glisser l'une sur l'autre.

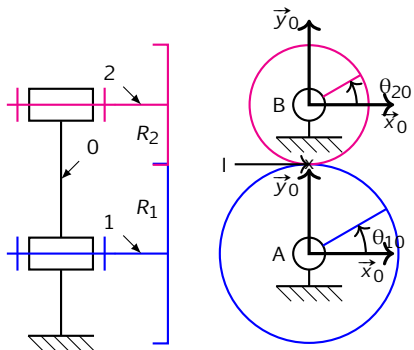
Pour réaliser, la condition de roulement sans glissement, il faut appliquer une importante force de contact entre les deux pièces. Pour palier ce problème, on utilise un entraînement par obstacle.

La condition de non glissement (d'adhérence) en I entre les solides 1 et 2, se traduit par $\vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0}$, ce qui conduit à :

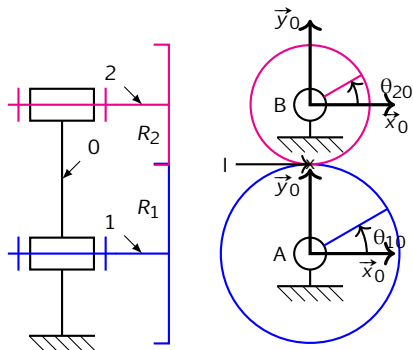
$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2}$$



Roues de friction

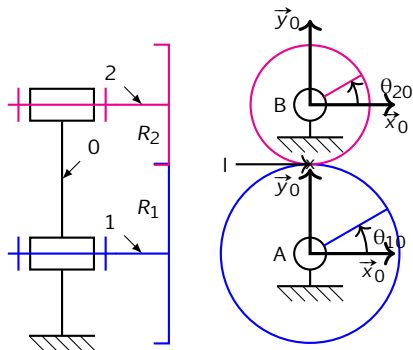


Roues de friction



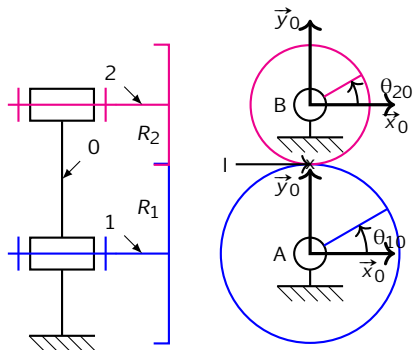
$$\vec{\omega} = \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/0)} - \vec{V}_{(I,1/0)}$$

Roues de friction



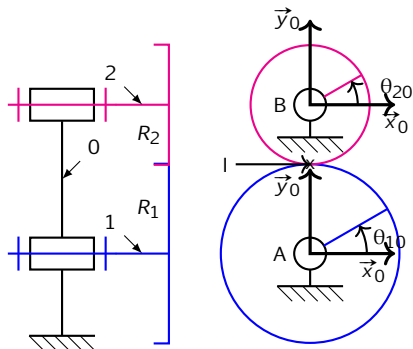
$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/0)} - \vec{V}_{(I,1/0)} \\ &= \vec{V}_{(B,2/0)} + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} - \vec{V}_{(A,1/0)} - \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)}\end{aligned}$$

Roues de friction



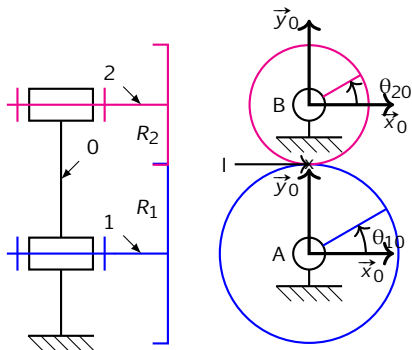
$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} &= \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/0)} - \vec{V}_{(I,1/0)} \\
 &= \vec{V}_{(B,2/0)} + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} - \vec{V}_{(A,1/0)} - \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} \\
 &= R_2 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 - (-R_1 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{10} \cdot \vec{z}_0)
 \end{aligned}$$

Roues de friction



$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} &= \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/0)} - \vec{V}_{(I,1/0)} \\
 &= \vec{V}_{(B,2/0)} + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} - \vec{V}_{(A,1/0)} - \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} \\
 &= R_2 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 - (-R_1 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{10} \cdot \vec{z}_0) = (R_2 \cdot \omega_{20} + R_1 \cdot \omega_{10}) \cdot \vec{x}_0
 \end{aligned}$$

Roues de friction



$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} &= \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/0)} - \vec{V}_{(I,1/0)} \\
 &= \vec{V}_{(B,2/0)} + \vec{IB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} - \vec{V}_{(A,1/0)} - \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} \\
 &= R_2 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 - (-R_1 \cdot \vec{y}_0 \wedge \omega_{10} \cdot \vec{z}_0) = (R_2 \cdot \omega_{20} + R_1 \cdot \omega_{10}) \cdot \vec{x}_0
 \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2}$$

Ce qui conduit à :

Définitions

DÉFINITION : Engrenage

Ensemble de deux roues munies de dents assurant un entraînement dit positif (sans glissement possible) entre deux axes peu éloignés l'un de l'autre.

DÉFINITION : Pignon

Plus petite des roues dentées d'un engrenage

Définitions

DÉFINITION : engrenage non gauche

Mécanisme constitué de 2 roues dentées cinématiquement équivalent à deux roues de friction.

DÉFINITION : engrenage gauche

Tout mécanisme constitué de deux roues dentées engrenant l'une avec l'autre sans qu'il y ait d'équivalent cinématique dans les roues de friction.

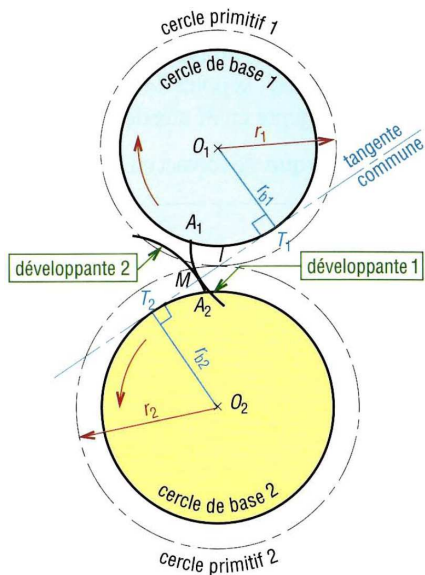
Principe de l'engrènement

Soient deux cercles de base, C_1 et C_2 . Si une droite Δ roule sans glisser en T_1 avec C_1 et en T_2 avec C_2 alors les vitesses de rotations des deux cercles de bases par rapport au repère fixe sont **proportionnelles**.

Principe de l'engrènement

Soient deux cercles de base, C_1 et C_2 . Si une droite Δ roule sans glisser en T_1 avec C_1 et en T_2 avec C_2 alors les vitesses de rotations des deux cercles de bases par rapport au repère fixe sont **proportionnelles**.

Le point I de la droite Δ appartenant à la droite passant par les centres de rotation des cercles de base (O_1 et O_2) est le point pour lequel la vitesse de glissement est nulle : $\vec{V}_{(I, C_2/C_1)}$. L'étude revient alors à celle de deux roues de frictions de rayon O_1I et O_2I qu'on appelle alors **rayons primitifs**.



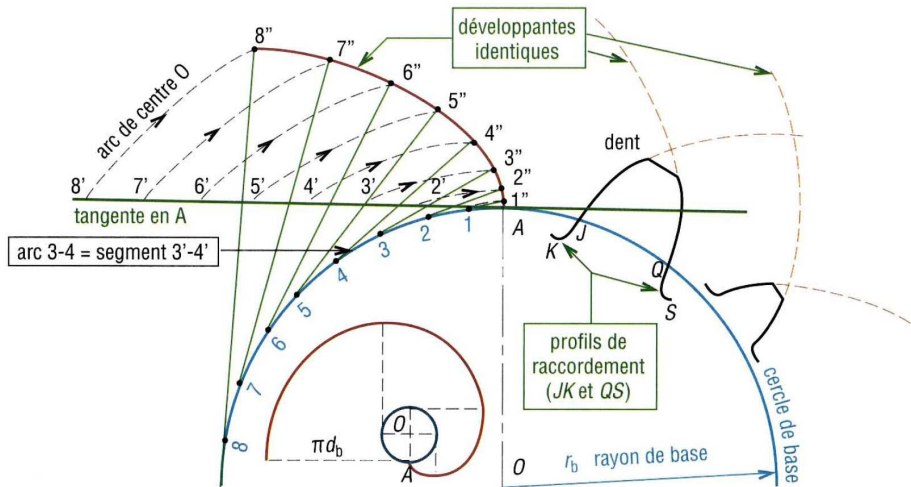
Profil de la denture

Le profil des dents est, dans presque tous les cas, une courbe dite en développante de cercle.

Cette courbe est obtenue, en développant un cercle appelé **cercle de base**.

Seule une faible partie de la courbe est utilisée pour la denture. On pourra donc modifier la tête et les pieds de la dent.

Profil de la denture



Par ailleurs, les trajectoires des points de la droite Δ dans un repère lié à un cercle de base forment des **développantes de cercle**. Ainsi, les engrenages construits à partir des développantes des cercles de bases assurent un entraînement homocinétique par obstacle se ramenant à l'étude de roues de friction dont les rayons sont les rayons primitifs.

Par ailleurs, les trajectoires des points de la droite Δ dans un repère lié à un cercle de base forment des **développantes de cercle**. Ainsi, les engrenages construits à partir des développantes des cercles de bases assurent un entraînement homocinétique par obstacle se ramenant à l'étude de roues de friction dont les rayons sont les rayons primitifs.

On appelle **angle de pression** l'angle α entre la ligne d'action Δ et la tangente commune aux cercles primitifs.

Par ailleurs, les trajectoires des points de la droite Δ dans un repère lié à un cercle de base forment des **développantes de cercle**. Ainsi, les engrenages construits à partir des développantes des cercles de bases assurent un entraînement homocinétique par obstacle se ramenant à l'étude de roues de friction dont les rayons sont les rayons primitifs.

On appelle **angle de pression** l'angle α entre la ligne d'action Δ et la tangente commune aux cercles primitifs.

On peut montrer que si r_0 est le rayon primitif et r_b le rayon de base alors :

$$r_b = r_0 \cdot \cos \alpha$$

Par ailleurs, les trajectoires des points de la droite Δ dans un repère lié à un cercle de base forment des **développantes de cercle**. Ainsi, les engrenages construits à partir des développantes des cercles de bases assurent un entraînement homocinétique par obstacle se ramenant à l'étude de roues de friction dont les rayons sont les rayons primitifs.

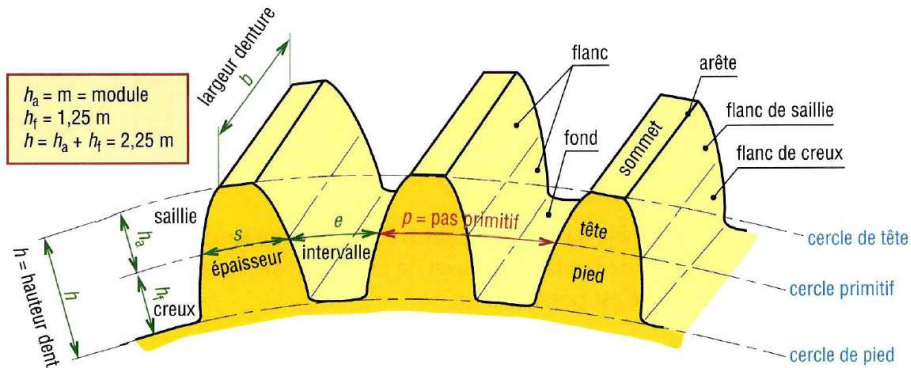
On appelle **angle de pression** l'angle α entre la ligne d'action Δ et la tangente commune aux cercles primitifs.

On peut montrer que si r_0 est le rayon primitif et r_b le rayon de base alors :

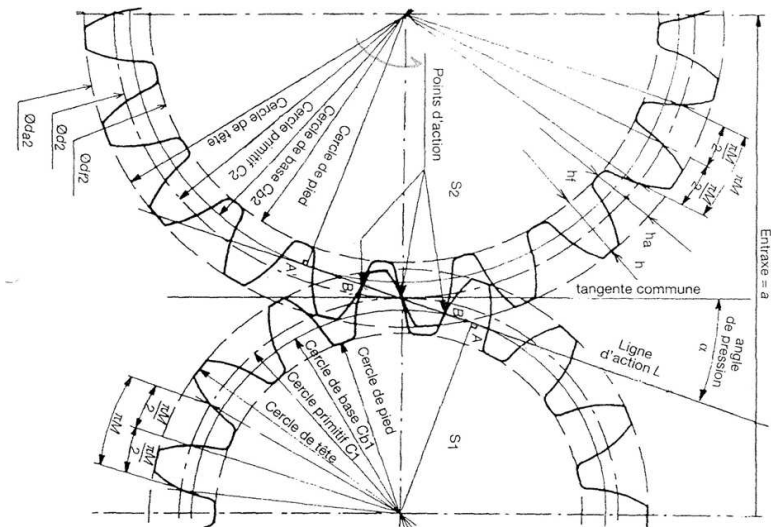
$$r_b = r_0 \cdot \cos \alpha$$

L'angle de pression α vaut 20° dans le cas général. Il peut cependant varier (15° à 30°), ce qui permet de définir des dentures spécifiques pour certaines applications.

Principe de l'engrènement

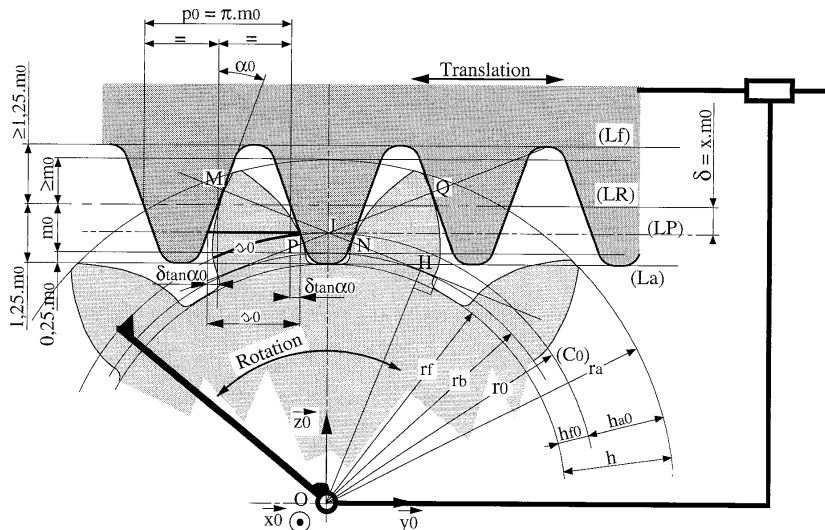


Principe de l'engrènement



Taillage d'un engrenage

Le taillage des roues dentées est réalisé par un outil crémaillère. Les mouvements de l'outil et de la future roue dentée sont synchronisés:



Sommaire

1 Introduction

2 Engrenages cylindriques

- Transformation de mouvement
- Engrenages cylindriques à denture droite
- Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale

3 Engrenages coniques

4 Engrenages à roue et vis sans fin

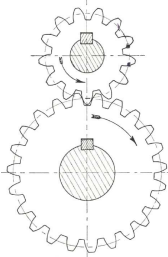
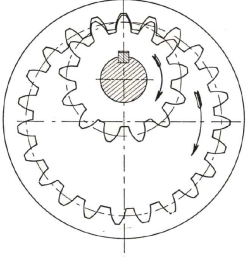
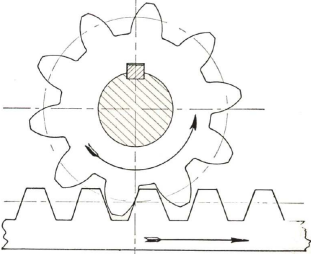
5 Schématisation des engrenages

6 Les trains d'engrenages

7 Système poulie/courroie

Transformation de mouvement

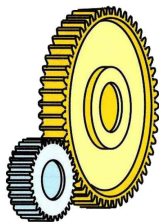
A partir de l'étude cinématique des roues de friction:

Engrenage à contact extérieur	Engrenage à contact intérieur	Système pignon crémaillère
		
$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2}$	$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2}$	$ V = R \cdot \omega $

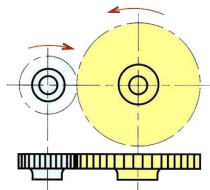
Engrenages cylindriques à denture droite



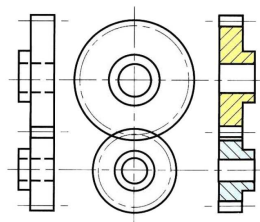
perspective



principe



dessin normalisé



Module d'un engrenage

Le pas primitif p est la distance, sur le cercle primitif, entre deux dents.

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{Z}$$

On a donc $p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{Z}$ avec Z le nombre de dents.

Deux roues engrenant doivent avoir le même pas primitif p . Cela implique que

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{Z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{Z_2}.$$

On appelle alors m le module d'un engrenage, tel que $m = \frac{2 \cdot R}{Z}$.

Module d'un engrenage

Le pas primitif p est la distance, sur le cercle primitif, entre deux dents.

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{Z}$$

On a donc avec Z le nombre de dents.

Deux roues engrenant doivent avoir le même pas primitif p . Cela implique que

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{Z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{Z_2}.$$

On appelle alors m le module d'un engrenage, tel que $m = \frac{2 \cdot R}{Z}$.

ATTENTION ! Deux roues dentées doivent donc avoir même le module m pour pouvoir engrener ensemble !

Module d'un engrenage

Le module m choisi parmi les modules normalisés est déterminé par un calcul de résistance des matériaux.

Valeurs normalisées du module m									
valeurs principales en mm					valeurs secondaires en mm				
0,06	0,25	1,25	5	20	0,07	0,28	1,125	5,5	22
0,08	0,30	1,5	6	25	0,09	0,35	1,375	7	28
0,10	0,40	2	8	32	0,11	0,45	1,75	9	36
0,12	0,50	2,5	10	40	0,14	0,55	2,75	11	45
0,15	0,75	3	12	50	0,18	0,7	3,5	14	55
0,20	1,0	4	16	60	0,22	0,9	4,5	18	70

Module d'un engrenage

Une relation permettant un calcul de ce module est

$$m = 2,34 \cdot \sqrt{\frac{T}{K \cdot R_e}}$$

avec :

- T , l'effort sur la dent
- k , coefficient de largeur de denture
- R_e , la limite élastique du matériau

Module d'un engrenage

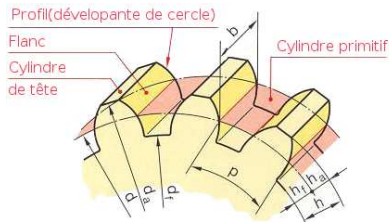
Il existe un nombre minimal de dents pour avoir un engrènement correct pignon A/roue B :

Nombre minimal de dents (sans déport de denture)					
Z_A	13	14	15	16	17
Z_B	13 à 16	13 à 26	13 à 45	13 à 101	13 à ∞

Principales dimensions

Diamètre primitif	$d = m \cdot Z$
Diamètre de tête	$d_a = d + 2 \cdot m$
Diamètre de pied	$d_f = d - 2,5 \cdot m$
Pas de la denture	$p = \pi \cdot m$
Largeur de denture	$b = k \cdot m$
Entraxe	$a = m \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{2}$

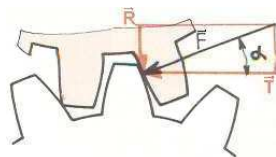
avec $k = 8$ ou 10 en général. On comprend alors la dépendance des dimensions vis-à-vis de m et Z .



Efforts sur les dentures - Couple transmis

L'effort \vec{F} normal à la dent étant incliné de l'angle de pression α (20° en général), on considère les deux projections de \vec{F} suivante :

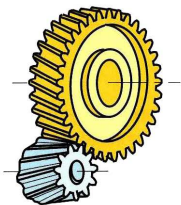
- la tangente commune aux diamètres primitifs : \vec{T}
- la normale commune aux cercles primitifs : \vec{R}



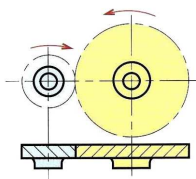
Engrenages cylindriques à denture hélicoïdale



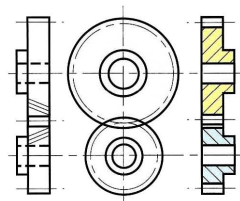
perspective



principe



dessin normalisé



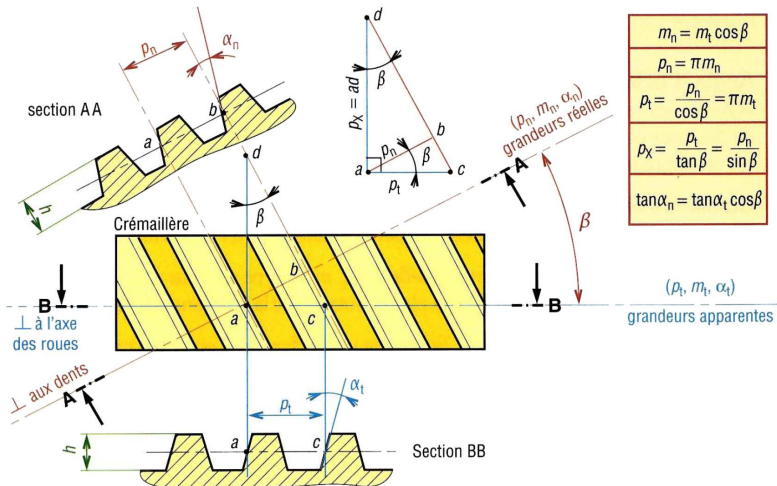
Les deux roues à dentures hélicoïdales doivent avoir leurs angles d'hélice de sens opposés mais de mêmes valeurs pour engrener ensemble.

Avantage - Inconvénient

Les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale ont un rapport de conduite (nombre de dents en prises) plus important. L'engrènement est plus progressif que pour les engrenages à denture droite, et de ce fait réduisent notablement les bruits et vibrations engendrés durant l'engrènement.

En revanche, ils sont plus chers et l'inclinaison de l'effort entre les dentures du fait de l'hélice engendre un effort axial durant l'engrènement.

Dimensions



Dimensions

Les dimensions d'une roue à denture hélicoïdale sont déterminées à partir:

- du module normalisé, appelé ici module normal (ou réel) et désigné par m_n ,
- du nombre de dents Z
- de l'angle d'inclinaison de l'hélice β

La relation entre pas normal P_n et pas tangentiel P_t permet de définir un module tangentiel (ou apparent) m_t .

Les dimensions de la roue dépendent alors de ce module tangentiel.

$$P_n = P_t \cdot \cos(\beta) \quad m_n = m_t \cdot \cos(\beta) \quad d = m_t \cdot Z$$

Efforts

L'effort sur la denture peut se décomposer ici en trois forces :
 $\vec{F} = A \cdot \vec{x} - R \cdot \vec{y} - T \cdot \vec{z}$.

Si l'axe de rotation de la roue dentée est (O, \vec{x}) et I , le point d'application de l'effort \vec{F} tel que $\vec{OI} = \frac{d}{2} \cdot \vec{y}$ alors le couple $C \cdot \vec{x}$ généré sur cet axe de rotation est:

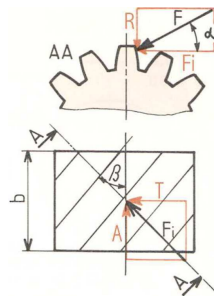
$$C = (\vec{OI} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{x} = \frac{d}{2} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{F} = \frac{d}{2} \cdot \vec{z} \cdot \vec{F}$$

- Effort tangentiel \vec{T} , souvent déterminé à partir du couple C :

$$T = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)| = \frac{2}{d} \cdot C$$

- Effort radial \vec{R} , déterminé par la relation : $R = T \cdot \left| \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\beta)} \right|$

- Effort axial \vec{A} , déterminé par la relation : $A = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)| \cdot |\sin(\beta)| = T \cdot |\tan(\beta)|$

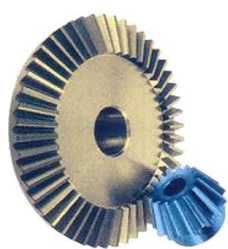


Sommaire

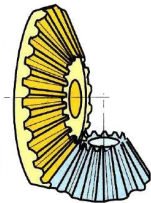
- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques**
 - Efforts sur la denture
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin
- 5 Schématisation des engrenages
- 6 Les trains d'engrenages
- 7 Système poulie/courroie

Engrenages coniques

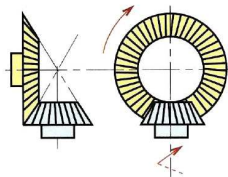
L'étude qui suit porte plus particulièrement sur les dentures droites.



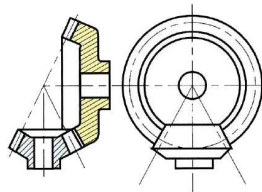
perspective



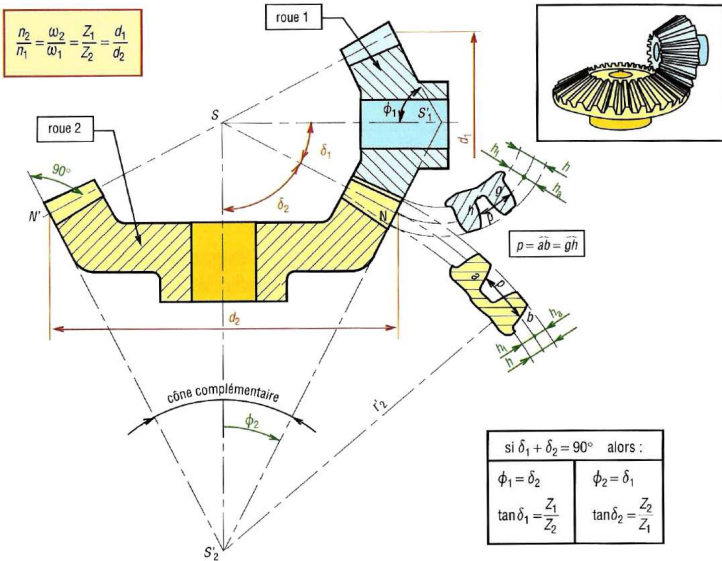
principe



dessin normalisé



Principe de fonctionnement



Principe de fonctionnement

Soient:

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- R_1 et R_2 les rayons des cônes primitifs au point M .

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- R_1 et R_2 les rayons des cônes primitifs au point M .

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{Or} \quad \begin{cases} R_1 = SM \cdot \sin(\delta_1) \\ R_2 = SM \cdot \sin(\delta_2) \end{cases}$$

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- R_1 et R_2 les rayons des cônes primitifs au point M .

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{Or} \quad \begin{cases} R_1 = SM \cdot \sin(\delta_1) \\ R_2 = SM \cdot \sin(\delta_2) \end{cases}$$

On obtient la relation :

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\delta_1)}$$

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- R_1 et R_2 les rayons des cônes primitifs au point M .

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{Or} \quad \begin{cases} R_1 = SM \cdot \sin(\delta_1) \\ R_2 = SM \cdot \sin(\delta_2) \end{cases}$$

On obtient la relation :

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\delta_1)}$$

Le rapport des vitesses détermine donc les demi-angles au sommet.

Principe de fonctionnement

Soient:

- ω_{10} et ω_{20} les vitesses respectives des roues coniques **1** et **2**.
- δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes primitifs.
- un point M sur la génératrice de contact des cônes primitifs.
- S le sommet commun des cônes primitifs.
- R_1 et R_2 les rayons des cônes primitifs au point M .

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{Or} \quad \begin{cases} R_1 = SM \cdot \sin(\delta_1) \\ R_2 = SM \cdot \sin(\delta_2) \end{cases}$$

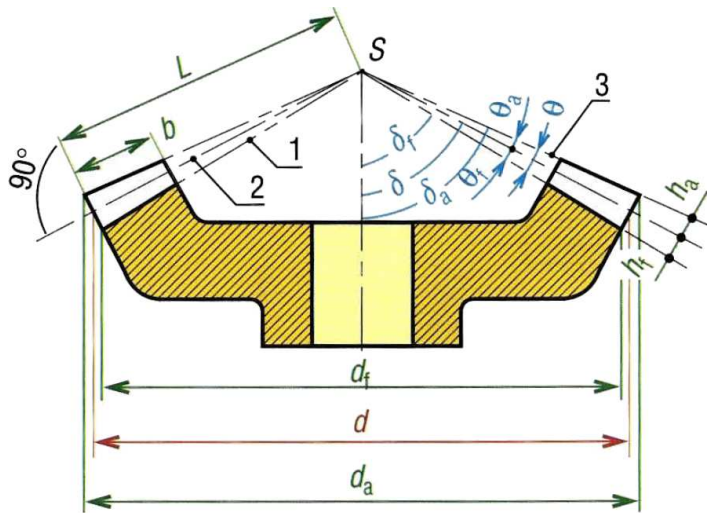
On obtient la relation :

$$\left| \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \right| = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\delta_1)}$$

Le rapport des vitesses détermine donc les demi-angles au sommet.

Les dimensions normalisées doivent être mesurées sur la partie de la denture la plus éloignée du sommet des cônes.

Efforts sur la denture



1 : cône de pied

2 : cône primitif

3 : cône de tête

Efforts sur la denture

L'effort normal à la denture \vec{F} donne ici trois efforts en projection sur les trois directions principales de la roue dentée (tangentielle, axiale et radiale).

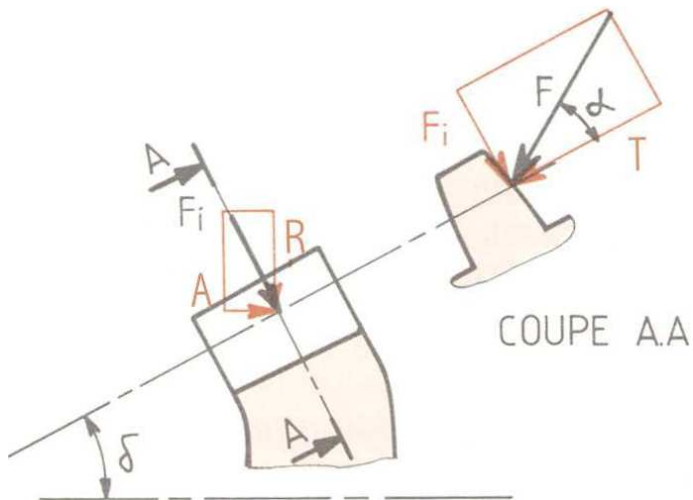
Si T est l'effort tangentiel déterminé à partir du couple, les relations s'écrivent:

$$T = \|\vec{F}\| \cdot |\cos(\alpha)|$$

$$A = T \cdot |\tan(\alpha)| \cdot |\sin(\delta)|$$

$$R = T \cdot |\tan(\alpha)| \cdot |\cos(\delta)|$$

Efforts sur la denture



Sommaire

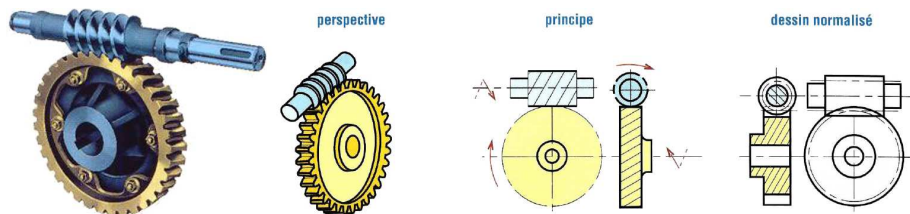
- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin**
 - Principe de fonctionnement
 - Avantages - Inconvénients
 - Efforts
 - Irréversibilité du système roue et vis

5 Schématisation des engrenages

6 Les trains d'engrenages

7 Système poulie/courroie

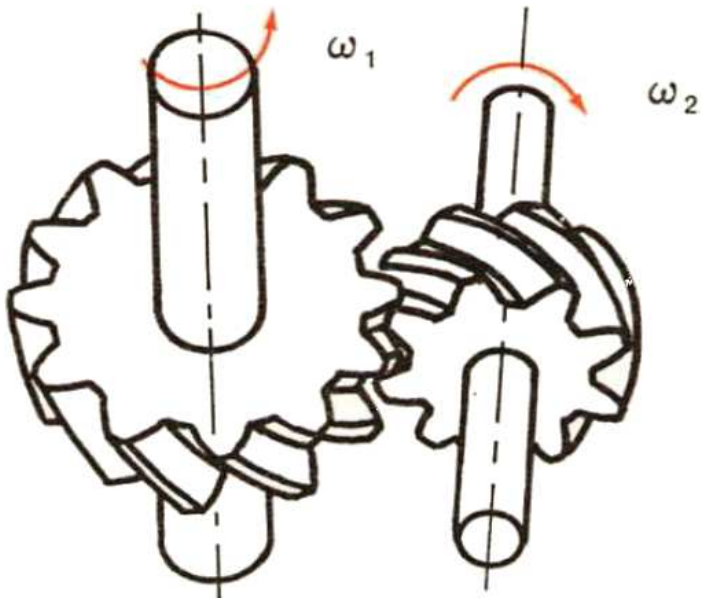
Engrenages à roue et vis sans fin



Cas particulier des engrenages gauches hélicoïdaux, un système roue-vis sans fin est tel que l'une des roues a un très petit nombre de dents (1 à 8). Elle est alors appelée vis.

Pour engrener ensemble, la roue et la vis doivent avoir leurs hélices de même sens.

Principe de fonctionnement

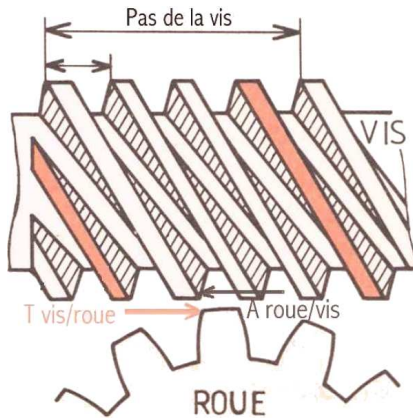


Avantages - Inconvénients

- Ce mécanisme permet d'obtenir un grand rapport de réduction avec seulement deux roues dentées (1/200).
- Les systèmes roue-vis sans fin sont presque toujours irréversibles. On peut donc les utiliser pour maintenir une orientation.
- L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dentures, donc usure et rendement faible (60%)
- La vis supporte un effort axial important.

Efforts

On constate en examinant la figure ci-contre représentant un système à roue et vis sans fin (vis à 4 filets), que l'effort tangentiel sur la roue est transmis comme effort axial sur la vis.



Engrenages à vis (4 filets)

Irréversibilité du système roue et vis

Si la vis peut toujours entraîner la roue, en revanche, l'inverse n'est pas toujours possible. Lorsque l'angle d'inclinaison de l'hélice β_R est suffisamment petit (moins de 6 à 10°) le système devient irréversible et la roue ne peut pas entraîner la vis, il y a blocage en position. Cette propriété est intéressante pour des dispositifs exigeant un non retour.

Ce phénomène est comparable à l'irréversibilité du système vis écrou. Les engrenages roue et vis sont les seuls à posséder cette propriété.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin
- 5 Schématisation des engrenages**
- 6 Les trains d'engrenages
- 7 Système poulie/courroie

		Types de dentures*			
		Droite	Hélicoïdale	Chevron	Spirale
Roue à denture extérieure					
Roue à denture intérieure					
		* Indication facultative.			
		Exemples d'applications			
Roue cônica					
Secteur denté					
Vis sans fin					
Crémaillère					

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin
- 5 Schématisation des engrenages
- 6 Les trains d'engrenages**
 - Les trains simples
 - Les trains épicycloïdaux
- 7 Système poulie/courroie

DÉFINITION : Trains simples

Trains d'engrenages possédant tous ses axes fixes, dans un même repère, au cours du temps.

DÉFINITION : Epicycloïde

Courbe décrite par un point fixe d'un cercle qui roule extérieurement sans glisser sur un autre cercle.

DÉFINITION : Hypocycloïde

Courbe décrite par un point fixe d'un cercle qui roule intérieurement sans glisser sur un autre cercle.

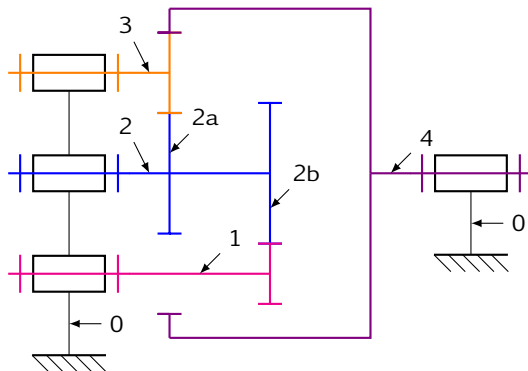
DÉFINITION : Train épicycloïdal

Train d'engrenages à axes de position relative variable mettant en mouvement des points dont les trajectoires sont des épicycloïdes.

Les trains simples

- Roue 1 :
 D_1, Z_1, ω_1
- Roue 2 :

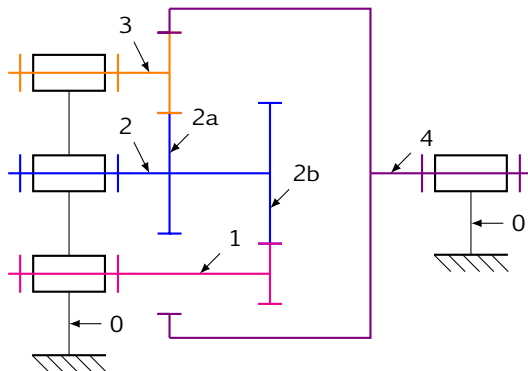
$$\begin{cases} D_{2a}, Z_{2a}, \omega_2 \\ D_{2b}, Z_{2b}, \omega_2 \end{cases}$$
- Roue 3 :
 D_3, Z_3, ω_3
- Roue 4 :
 D_4, Z_4, ω_4



Les trains simples

- Roue 1 :
 D_1, Z_1, ω_1
- Roue 2 :

$$\begin{cases} D_{2a}, Z_{2a}, \omega_2 \\ D_{2b}, Z_{2b}, \omega_2 \end{cases}$$
- Roue 3 :
 D_3, Z_3, ω_3
- Roue 4 :
 D_4, Z_4, ω_4



D'après l'étude cinématique des roues de frictions, on remarquera qu'un contact extérieur inverse le sens de rotation, alors qu'avec un contact intérieur, le sens est conservé.

Les trains simples

Par conséquent, la raison d'un train d'engrenage sera donnée par la formule :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} &= (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}}\end{aligned}$$

avec n nombre de contacts extérieurs

Les trains simples

Par conséquent, la raison d'un train d'engrenage sera donnée par la formule :

$$\frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}}$$

avec n nombre de contacts extérieurs

EXEMPLE : Dans le cas du schéma cinématique précédent :

$$\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}}$$

Les trains simples

Par conséquent, la raison d'un train d'engrenage sera donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} &= (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} \end{aligned}$$

avec n nombre de contacts extérieurs

EXEMPLE : Dans le cas du schéma cinématique précédent :

$$\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_{2b}} \cdot \frac{Z_{2a}}{Z_3} \cdot \frac{Z_3}{Z_4}$$

Les trains simples

Par conséquent, la raison d'un train d'engrenage sera donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} &= (-1)^n \cdot \frac{\text{Produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{Produit des nombres de dents des roues menées}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{menantes}}}{\prod Z_{\text{menées}}} \end{aligned}$$

avec n nombre de contacts extérieurs

EXEMPLE : Dans le cas du schéma cinématique précédent :

$$\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_{2b}} \cdot \frac{Z_{2a}}{Z_3} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{Z_1 \cdot Z_{2a}}{Z_{2b} \cdot Z_4}$$

Les trains simples

Si le train d'engrenages n'est pas uniquement composé de trains d'engrenages parallèles alors il faut d'abord calculer la valeur absolue du rapport de réduction globale avec la relation établie ci-dessus puis déterminer le signe en observant la rotation de chaque roue.

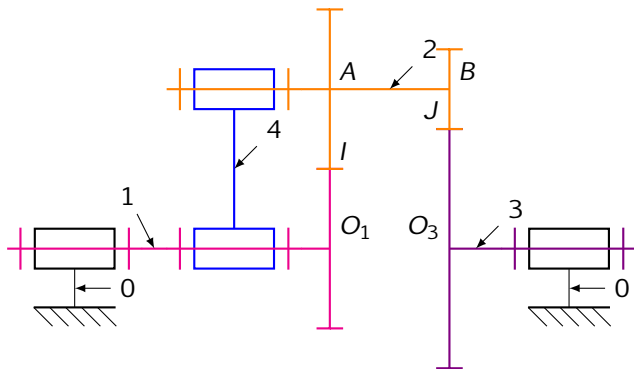
Le train d'engrenages à axes de position relative invariable dans le même repère permet d'obtenir un grand rapport de réduction mais l'encombrement est important. La solution pour remédier à ces inconvénients est le train épicycloïdal.

Caractéristiques d'un train épicycloïdal

Un **pignon** qui tourne **autour d'un axe en mouvement** dans le repère lié au bâti est appelé **satellite**. Le satellite est le premier élément qu'il faut repérer quand on étudie un train épicycloïdal. Lorsqu'on a déterminé le satellite, on peut rechercher les trois "entrées" du train :

- le **porte satellite** est en liaison pivot avec le(s) satellite(s). Il porte le(s) satellite(s).
- les **deux planétaires** sont en **contact avec les dentures du satellite**. Les planétaires tournent autour d'axes fixes dans le repère de l'observateur et engrènent avec le satellite. Les planétaires peuvent être des pignons ou des couronnes dentées intérieures.

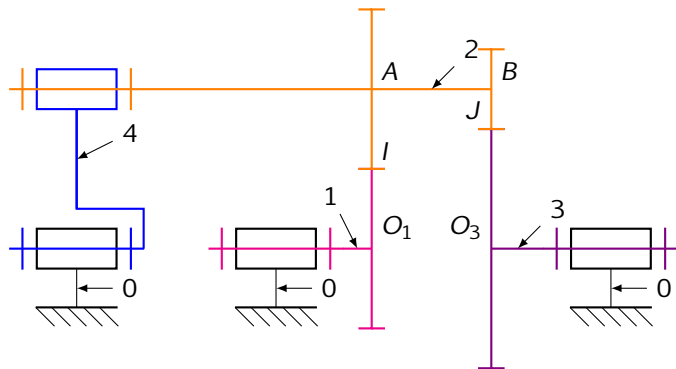
Caractéristiques d'un train épicycloïdal



Pour ce train épicycloïdal:

- satellite: pièce **2**
- porte satellite: pièce **4**
- planétaires: pièces **1** et **3**. Il s'agit ici de deux pignons.

Caractéristiques d'un train épicycloïdal



Pour ce train épicycloïdal:

- satellite: pièce 2
- porte satellite: pièce 4
- planétaires: pièces 1 et 3. Il s'agit ici de deux pignons.

Caractéristiques d'un train épicycloïdal

Caractéristiques d'un train épicycloïdal

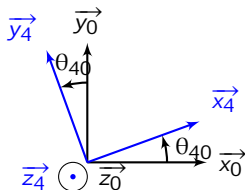
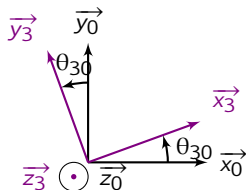
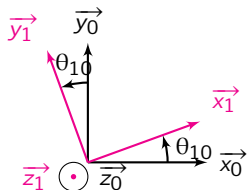
Les roulements sans glissement de ce trains épicycloïdal se traduisent par:

$$\vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{(J,2/3)} = \vec{0}$$

Caractéristiques d'un train épicycloïdal

Les roulements sans glissement de ce trains épicycloïdal se traduisent par:

$$\vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{(J,2/3)} = \vec{0}$$



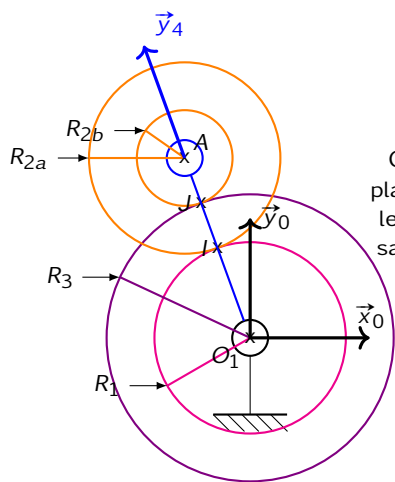
$$\text{et } \omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt} \quad ; \quad \omega_{30} = \frac{d\theta_{30}}{dt} \quad \text{et} \quad \omega_{40} = \frac{d\theta_{40}}{dt}$$

Relation de Willis

Un train épicycloïdal est un système à deux degrés de libertés. Il convient de fixer deux paramètres pour déterminer toutes les inconnues cinématiques du problème. La formule de Willis permet de relier les vitesses de rotation du porte satellite et des deux planétaires.

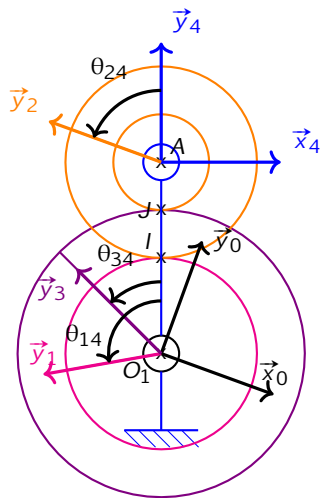
La technique la plus simple consiste à se ramener à l'étude d'un train à axes de position relative invariable dans le même repère (trains simples).

Relation de Willis



On se place sur le porte satellite

\Rightarrow



Relation de Willis

Pour un observateur lié au porte-satellite **4**, le train est un train simple, dans lequel la roue **1** entraîne la roue 2_a .

Relation de Willis

Pour un observateur lié au porte-satellite **4**, le train est un train simple, dans lequel la roue **1** entraîne la roue **2_a**.

La roue **2_b** entraîne, quant à elle, la roue **3**. Dans ce train simple:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} &= (-1)^2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_{2b}}{R_{2a} \cdot R_3} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Relation de Willis

Pour un observateur lié au porte-satellite **4**, le train est un train simple, dans lequel la roue **1** entraîne la roue 2_a .

La roue 2_b entraîne, quant à elle, la roue **3**. Dans ce train simple:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} &= (-1)^2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_{2b}}{R_{2a} \cdot R_3} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

On utilise alors la composition des vitesses $\omega_{i/k} = \omega_{i/j} + \omega_{j/k}$ pour introduire les vecteurs vitesses de rotation par rapport au bâti:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = \lambda$$

Relation de Willis

Pour un observateur lié au porte-satellite **4**, le train est un train simple, dans lequel la roue **1** entraîne la roue 2_a .

La roue 2_b entraîne, quant à elle, la roue **3**. Dans ce train simple:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} &= (-1)^2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_{2b}}{R_{2a} \cdot R_3} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

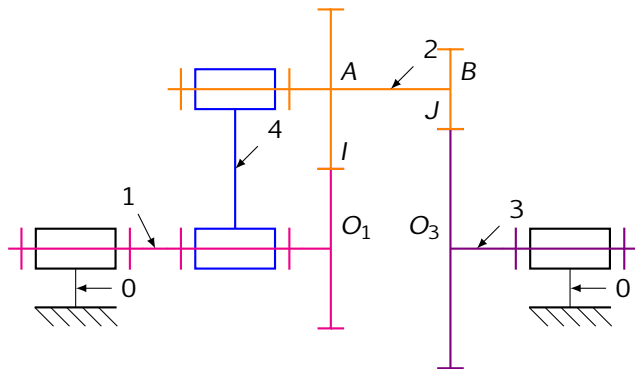
On utilise alors la composition des vitesses $\omega_{i/k} = \omega_{i/j} + \omega_{j/k}$ pour introduire les vecteurs vitesses de rotation par rapport au bâti:

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = \lambda \quad \text{d'où la loi entrée-sortie (relation de Willis) :}$$

$$\lambda = \frac{\omega_{PL_2} - \omega_{PS}}{\omega_{PL_1} - \omega_{PS}} = (-1)^n \cdot \frac{Z_{PL_1}}{Z_{SAT_1}} \cdot \frac{Z_{SAT_2}}{Z_{PL_2}} \quad \text{ou} \quad \omega_{PL_2} - \lambda \cdot \omega_{PL_1} + (\lambda - 1) \cdot \omega_{PS} = 0$$

λ est la raison du train épicycloïdal

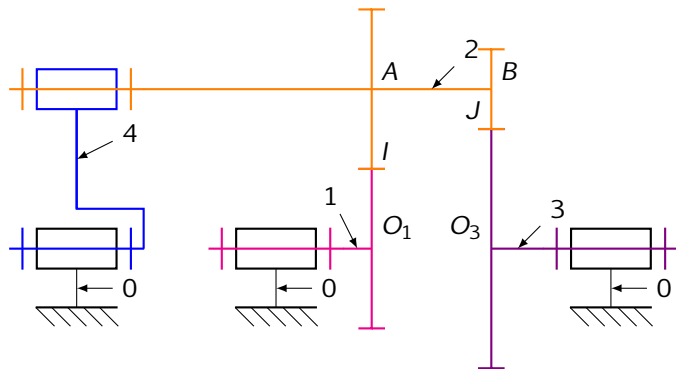
Caractéristiques d'un train épicycloïdal



Pour ce train épicycloïdal:

- satellite: pièce 2
- porte satellite: pièce 4
- planétaires: pièces 1 et 3. Il s'agit ici de deux pignons.

Caractéristiques d'un train épicycloïdal



Pour ce train épicycloïdal:

- satellite: pièce 2
- porte satellite: pièce 4
- planétaires: pièces 1 et 3. Il s'agit ici de deux pignons.

En utilisant les roulements sans glissement

On peut retrouver ce résultat à partir des roulements sans glissements et en faisant un graphe de liaison.

En utilisant les roulements sans glissement

$$\vec{0} = \vec{V}_{(I,2/1)} = \vec{V}_{(I,2/4)} - \vec{V}_{(I,1/4)}$$

$$\vec{0} = \vec{V}_{(J,2/3)} = \vec{V}_{(J,2/4)} - \vec{V}_{(J,3/4)}$$

$$\text{Or } \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{(I,2/4)} = \vec{V}_{(A,2/4)} + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(2/4)} \\ \quad = \vec{0} + R_{2a} \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{24} \cdot \vec{z}_4 \\ \quad = R_{2a} \cdot \omega_{24} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{(I,1/4)} = \vec{V}_{(O_1,1/4)} + \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{(1/4)} \\ \quad = \vec{0} - R_1 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{14} \cdot \vec{z}_4 \\ \quad = -R_1 \cdot \omega_{14} \cdot \vec{x}_4 \end{array} \right. \quad \text{Or } \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{(J,2/4)} = \vec{V}_{(B,2/4)} + \vec{JB} \\ \quad = \vec{0} + R_{2b} \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{24} \cdot \vec{z}_4 \\ \quad = R_{2b} \cdot \omega_{24} \cdot \vec{x}_4 \\ \vec{V}_{(J,3/4)} = \vec{V}_{(O_3,3/4)} + \vec{JO} \\ \quad = \vec{0} - R_3 \cdot \vec{y}_4 \wedge \omega_{34} \cdot \vec{z}_4 \\ \quad = -R_3 \cdot \omega_{34} \cdot \vec{x}_4 \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \vec{0} = R_{2a} \cdot \omega_{24} \cdot \vec{x}_4 + R_1 \cdot \omega_{14} \cdot \vec{x}_4 \quad \text{donc } \vec{0} = R_{2b} \cdot \omega_{24} \cdot \vec{x}_4 + R_3 \cdot \omega_{34} \cdot \vec{x}_4$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{24}}{\omega_{14}} = -\frac{R_1}{R_{2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{24}}{\omega_{34}} = -\frac{R_3}{R_{2b}}$$

$$\text{On retrouve donc le résultat précédent } \frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} \cdot \frac{\omega_{24}}{\omega_{14}} = (-1)^2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_{2b}}{R_{2a} \cdot R_3} = \lambda.$$

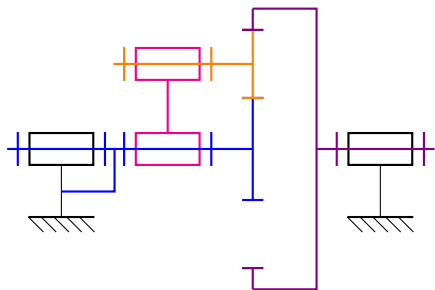
Fonctionnement d'un train épicycloïdal

Pour faire fonctionner un train épicycloïdal, il faut imposer la vitesse de rotation de deux des trois " entrées ". La manière la plus courante consiste à fixer l'une des entrées par rapport au repère d'observation (bâti), d'imposer le mouvement d'une des deux autres et de récupérer la sortie sur la troisième.

Il est alors possible à partir d'embrayages ou de roues à cliquets d'obtenir deux vitesses de déplacement (treuil sur pont roulant, poulie Winch).

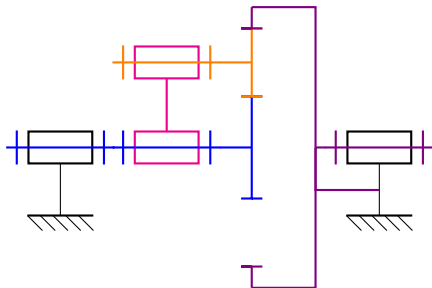
Fonctionnement d'un train épicycloïdal

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \lambda \Rightarrow \frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = \lambda$$



Planétaire 1 bloqué: $\omega_{10} = 0$

$$\frac{\omega_{30}}{\omega_{40}} = 1 - \lambda$$

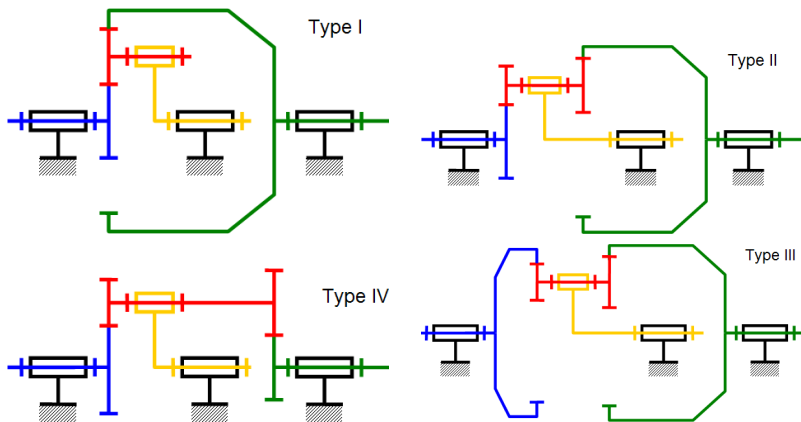


Planétaire 3 bloqué: $\omega_{30} = 0$

$$\frac{\omega_{40}}{\omega_{10}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Trains épicycloïdaux élémentaires

On distingue 4 types de trains épicycloïdaux suivant la nature des planétaires: pignon ou couronne.



Association de trains épicycloïdaux

Comment s'aperçoit-on qu'on est en présence d'un train composé ?

En examinant le mécanisme, on peut détecter un certain nombre de symptômes caractéristiques d'une telle situation, par exemple :

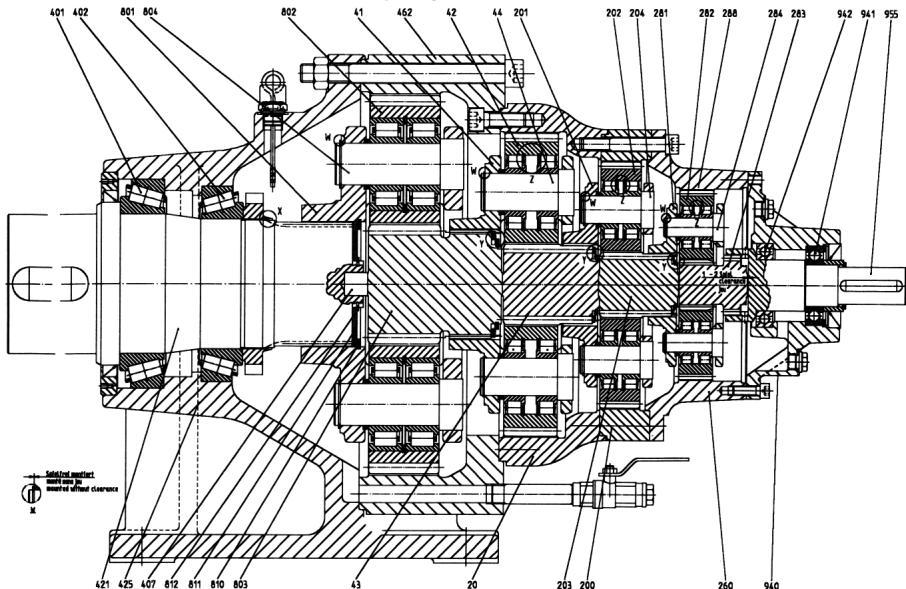
- il y a plusieurs satellites guidés par des portes satellites différents
- un satellite est en contact avec plus de deux planétaires
- un même porte satellite guide deux satellites qui ne sont pas en contact avec les mêmes planétaires

Association de trains épicycloïdaux

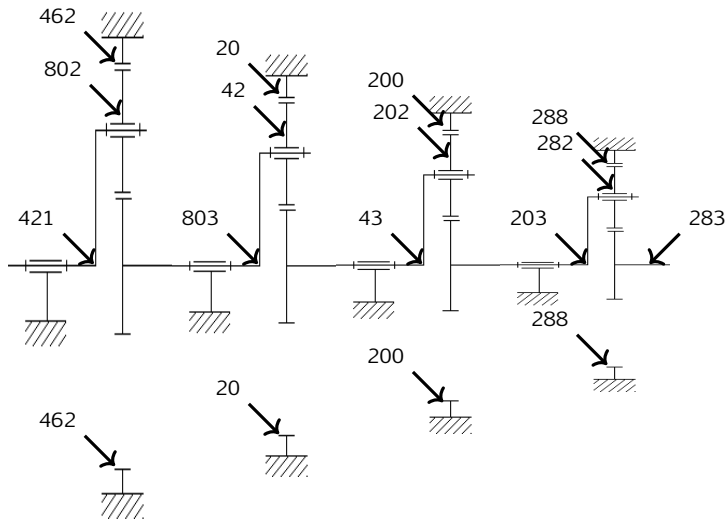
Méthode de mise en équation :

- Rechercher les trains épicycloïdaux élémentaires. Pour cela on envisage chaque satellite séparément, et chaque couple de planétaires en contact avec ce satellite.
- Écrire les relations de Willis pour chacun de ces trains élémentaires, indépendamment de leur mode de fonctionnement dans l'ensemble.
- Traduire les liens entre ces trains élémentaires.
- Traduire les conditions de fonctionnement.

Association de trains épicycloïdaux



Association de trains épicycloïdaux

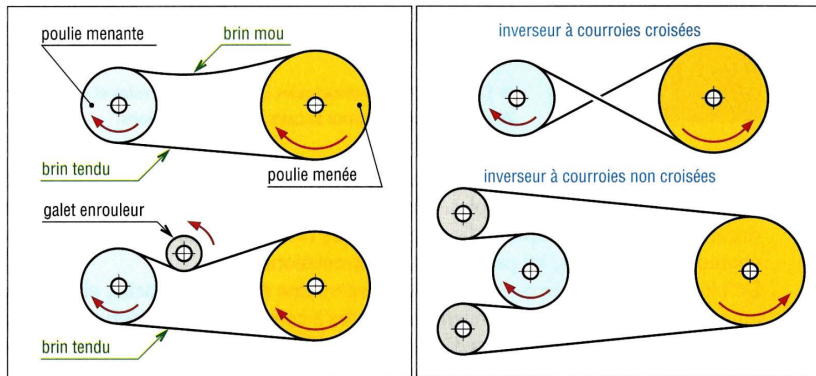


Pièces 282, 202 et 42 : 29 dents. Pièces 283, 203 et 43 : 19 dents. Pièce 802 : 27 dents et 803 : 23 dents.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Engrenages cylindriques
- 3 Engrenages coniques
- 4 Engrenages à roue et vis sans fin
- 5 Schématisation des engrenages
- 6 Les trains d'engrenages
- 7 Système poulie/courroie**
 - Principe de fonctionnement
 - Avantages/inconvénients

Système poulie/courroie



Principe de fonctionnement

Tout comme dans la partie 1.4, l'étude des systèmes poulie/courroie peut être ramenée au roulement sans glissement entre une droite (brin de courroie tendu) et deux roues.

Dans le cas de l'inverseur à courroies croisées, le schéma est identique à celui de présentant le principe de l'engrènement. Le théorème de Thalès permet de liés les rapports des rayons des poulies et les rapports des « pseudos cercles primitifs ». On en déduit que le rapport des vitesses de rotation est l'inverse des rapports des rayons.

Par ailleurs, concernant le signe, il faut tenir compte du trajet de la courroie entre les poulies ; les sens de rotation peuvent alors être inversés.

Avantages/inconvénients

La mise en place de systèmes poulie courroie est beaucoup plus souples que pour les systèmes à engrenages. Pas de problème d'entraxe à calculer et au moyen de galets pour le renvoi d'angle, il est possible de relier plusieurs poulies avec une seule courroie. De plus, les courroies étant souples, elles génèrent moins de vibrations et de chocs que les engrenages.

Cependant, leur souplesse est aussi un inconvénient car elles subissent du glissement sur les poulies (sauf pour courroies crantées), ce qui génère de l'usure. Les efforts transmissibles sont bien plus faibles que pour des engrenages de taille comparable.