CI-3 : Prévoir et vérifier les performances cinématiques des systèmes.

CI-3-3 Déterminer les trajectoires, vitesses et accélérations d'un point de l'espace ou appartenant à un solide.

Lycée Carnot - Dijon, 2024 - 2025

Germain Gondor

Sommaire

Objectifs

MODELISER REPRESENTER

A la fin de la séquence, l'élève devra être capable de:

- **B1** Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
  - Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.
- **B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Simplifier un modèle de mécanisme.
- **C2** Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
  - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

Sommaire

Dérivation vectorielle et vecteur instantané de rotation

Nous cherchons à établir la formule ci-dessous où $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est appelé vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ ($\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0$). On le note aussi simplement $\overrightarrow{\Omega}_{(1/0)}$:

$$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u}}$$

Existence d'un vecteur instantané de rotation

Soit la BOND $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associée au repère $\mathcal{R}_1$.

Dérivons la deuxième ligne dans $\mathcal{R}_0$ ou plus précisément, dans la base $\mathcal{B}_0$ associée à $\mathcal{R}_0$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \left\|\overrightarrow{x_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{y_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{z_1}\right\| = 1 \\ \vec{x}_1.\vec{x}_1 = \vec{y}_1.\vec{y}_1 = \vec{z}_1.\vec{z}_1 = 1 \\ \vec{x}_1.\vec{y}_1 = \vec{y}_1.\vec{z}_1 = \vec{z}_1.\vec{x}_1 = 0 \end{array}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{x}_1.\vec{x}_1=1\\ \vec{y}_1.\vec{y}_1=1\\ \vec{z}_1.\vec{z}_1=1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{x}_1=0\\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{y}_1=0\\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{z}_1=0\end{array}\right. \Rightarrow \exists(x_y,x_z,y_x,y_z,z_x,z_y)\in\mathbb{R}^6/\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{x}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}=x_y.\vec{y}_1+x_z.\vec{z}_1\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}=y_z.\vec{z}_1+y_x.\vec{x}_1\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_{\mathcal{B}_0}=z_x.\vec{x}_1+z_y.\vec{y}_1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{x}_1.\vec{x}_1=1\\ \vec{y}_1.\vec{y}_1=1\\ \vec{z}_1.\vec{z}_1=1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{x}_1=0\\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{y}_1=0\\ 2.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{z}_1=0\end{array}\right. \Rightarrow \exists(x_y,x_z,y_x,y_z,z_x,z_y)\in\mathbb{R}^6/\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=x_y.\vec{y}_1+x_z.\vec{z}_1\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=y_z.\vec{z}_1+y_x.\vec{x}_1\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=z_x.\vec{x}_1+z_y.\vec{y}_1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{x}_1.\vec{y}_1=0\\ \vec{y}_1.\vec{z}_1=0\\ \vec{z}_1.\vec{x}_1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{y}_1+\vec{x}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=0\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{z}_1+\vec{y}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=0\\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}.\vec{x}_1+\vec{z}_1.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x_y+y_x=0\\ y_z+z_y=0\\ z_x+x_z=0\end{array}\right.$$

Ce qui nous conduit à :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = x_y.\vec{y}_1 - z_x.\vec{z}_1 \\[2em] \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = y_z.\vec{z}_1 - x_y.\vec{x}_1 \\[2em] \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = z_x.\vec{x}_1 - y_z.\vec{y}_1 \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = x_y.\vec{y}_1 - z_x.\vec{z}_1 \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = y_z.\vec{z}_1 - x_y.\vec{x}_1 \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = z_x.\vec{x}_1 - y_z.\vec{y}_1 \end{array}\right.$$

En posant $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = y_z.\vec{x}_1 + z_x.\vec{y}_1 + x_y.\vec{z}_1$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1 \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1 \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{z}_1 \end{array}\right.$$

$\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est appelé vecteur rotation instantanée de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$.

Changement de base de dérivation

Soit le vecteur $\vec{u}(t) = u_x(t).\vec{x}_1 + u_y(t).\vec{y}_1 + u_z(t).\vec{z}_1$:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{dt}}.\vec{x}_1 + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{dt}}.\vec{y}_1 + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{dt}}.\vec{z}_1}_{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1}} + u_x(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} + u_y(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} + u_z(t).\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{z}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1} + u_x(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1 + u_y(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1 + u_z(t).\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{z}_1 \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \underbrace{\left[u_x(t).\vec{x}_1 + u_y(t).\vec{y}_1 + u_z(t).\vec{z}_1\right]}_{\vec{u}(t)}
\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{u}\right)\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u}}$$

Propriétés du vecteur rotation

Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)} \wedge \vec{u}$$

Propriétés du vecteur rotation

Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)} \wedge \vec{u}$$

et $$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u}$$

Propriétés du vecteur rotation

Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)} \wedge \vec{u}$$

et $$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u}$$

La somme de ces deux équations se met sous la forme : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}\right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Propriétés du vecteur rotation

Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)} \wedge \vec{u}$$

$$\text{et} \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u}$$

La somme de ces deux équations se met sous la forme : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}\right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Cette relation étant vraie $\forall \vec{u}$, il apparaît alors que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} = -\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}$.

Propriétés du vecteur rotation

Propriété d'antisymétrie

Soient les référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)} \wedge \vec{u}$$

et $$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u}$$

La somme de ces deux équations se met sous la forme : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}\right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Cette relation étant vraie $\forall \vec{u}$, il apparaît alors que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} = -\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}$.

Ainsi $\boxed{\forall \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j,\ \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} = -\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)}}$

Composition des vecteurs instantanés de rotation

Soient les référentiels $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \qquad (1)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u} \qquad (2)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \qquad (3)$$

Composition des vecteurs instantanés de rotation

Soient les référentiels $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \quad (1)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u} \quad (2)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \quad (3)$$

En effectuant (1)+(2)-(3), il vient : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} - \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)}\right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Composition des vecteurs instantanés de rotation

Soient les référentiels $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. La formule de changement de base de dérivation permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \quad (1)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} \wedge \vec{u} \quad (2)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{u})\right]_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{u} \quad (3)$$

En effectuant (1)+(2)-(3), il vient : $\left[\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)} - \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0)}\right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Cette relation étant vraie $\forall \vec{u}$, la composition des vitesses se traduit par :

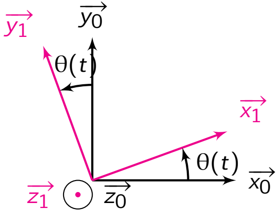
$$\boxed{\forall \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_k \qquad \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_k)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_j)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_j/\mathcal{B}_k)}}$$

Formulation

Soient deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ayant un vecteur commun. Prenons par exemple $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$.
La base $\mathcal{B}_1$ peut alors être repéré dans la base $\mathcal{B}_0$ par l'angle $\theta(t)$:

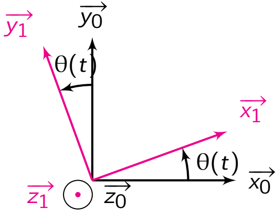
Formulation

Soient deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ayant un vecteur commun. Prenons par exemple $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. La base $\mathcal{B}_1$ peut alors être repéré dans la base $\mathcal{B}_0$ par l'angle $\theta(t)$:



Formulation

Soient deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ayant un vecteur commun. Prenons par exemple $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. La base $\mathcal{B}_1$ peut alors être repéré dans la base $\mathcal{B}_0$ par l'angle $\theta(t)$:



$$\begin{array}{rcl} (\vec{x}_0, \vec{x}_1) & = & \theta(t) \\ (\vec{y}_0, \vec{y}_1) & = & \theta(t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \vec{x}_1 & = & \cos\theta(t).\vec{x}_0 + \sin\theta(t).\vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 & = & -\sin\theta(t).\vec{x}_0 + \cos\theta(t).\vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 & = & \vec{z}_0 \end{array}$$

Formulation

Sous forme matricielle, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ $M_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_0}$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Formulation

Sous forme matricielle, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ $M_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_0}$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

et $$\boxed{M^{-1}_{\mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_0} = M_{\mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Formulation

Or, les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ valent :

Formulation

Or, les dérivées des vecteurs $\overrightarrow{x}_1$ et $\overrightarrow{y}_1$ valent :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 \text{ et } \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1$$

Formulation

Or, les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ valent :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1 \text{ et } \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{y}_1$$

En reprenant les expressions de $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ dans $\mathcal{B}_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{x}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}\left(\cos\theta(t)\right)}{\mathrm{dt}}.\vec{x}_0 + \frac{\mathrm{d}\left(\sin\theta(t)\right)}{\mathrm{dt}}.\vec{y}_0 \\ &= -\dot{\theta}.\sin\theta(t).\vec{x}_0 + \dot{\theta}.\cos\theta(t).\vec{y}_0 \\ &= \dot{\theta}.\left[-\sin\theta(t).\vec{x}_0 + \cos\theta(t).\vec{y}_0\right] = \dot{\theta}.\vec{y}_1 \end{aligned}$$

Formulation

Ainsi $\dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1$, ce qui implique que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\overrightarrow{y}_1$.

Formulation

Ainsi $\dot{\theta}.\vec{y}_1 = \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \vec{x}_1$, ce qui implique que $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\vec{y}_1$.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{y}_1)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}(-\sin\theta(t))}{\mathrm{dt}}.\vec{x}_0 + \frac{\mathrm{d}(\cos\theta(t))}{\mathrm{dt}}.\vec{y}_0 \\
&= -\dot{\theta}.\cos\theta(t).\vec{x}_0 - \dot{\theta}.\sin\theta(t).\vec{y}_0 \\
&= -\dot{\theta}.[\cos\theta(t).\vec{x}_0 + \sin\theta(t).\vec{y}_0] = -\dot{\theta}.\vec{x}_1
\end{aligned}$$

Formulation

Ainsi $\dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1$, ce qui implique que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\overrightarrow{y}_1$.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{y}_1\right)\right]_{\mathcal{B}_0} &= \frac{\mathrm{d}\left(-\sin\theta(t)\right)}{\mathrm{dt}}.\overrightarrow{x}_0 + \frac{\mathrm{d}\left(\cos\theta(t)\right)}{\mathrm{dt}}.\overrightarrow{y}_0 \\
&= -\dot{\theta}.\cos\theta(t).\overrightarrow{x}_0 - \dot{\theta}.\sin\theta(t).\overrightarrow{y}_0 \\
&= -\dot{\theta}.\left[\cos\theta(t).\overrightarrow{x}_0 + \sin\theta(t).\overrightarrow{y}_0\right] = -\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1
\end{aligned}
$$

Ainsi $-\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1$, ce qui implique que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ n'a pas de composantes sur $\overrightarrow{x}_1$.

Formulation

Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\overrightarrow{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{y}_1 \\
-\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{y}_1 = -\lambda.\overrightarrow{x}_1
\end{aligned}$$

Formulation

Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\overrightarrow{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{y}_1 \\ -\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{y}_1 = -\lambda.\overrightarrow{x}_1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \dot{\theta}(t).\overrightarrow{z}_1}$

Formulation

Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\overrightarrow{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{y}_1 \\ -\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{y}_1 = -\lambda.\overrightarrow{x}_1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \dot{\theta}(t).\overrightarrow{z}_1}$

En conclusion, lorsque deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ont un vecteur commun, le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est porté par ce vecteur et sa composante est la dérivée de l'angle (positive dans le sens direct) qui repère la position de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$).

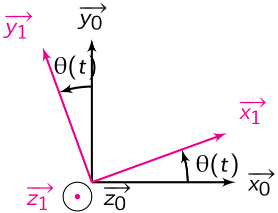
Formulation

Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\overrightarrow{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{y}_1 \\ -\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 &= \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{y}_1 = -\lambda.\overrightarrow{x}_1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \dot{\theta}(t).\overrightarrow{z}_1}$

En conclusion, lorsque deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ont un vecteur commun, le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est porté par ce vecteur et sa composante est la dérivée de l'angle (positive dans le sens direct) qui repère la position de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$).



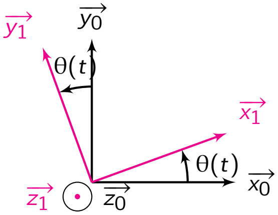
Formulation

Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \lambda.\overrightarrow{z}_1$. Or :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}.\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1 = \lambda.\overrightarrow{y}_1 \\ -\dot{\theta}.\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{y}_1 = \lambda.\overrightarrow{z}_1 \wedge \overrightarrow{y}_1 = -\lambda.\overrightarrow{x}_1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)} = \dot{\theta}(t).\overrightarrow{z}_1}$

En conclusion, lorsque deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ont un vecteur commun, le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)}$ est porté par ce vecteur et sa composante est la dérivée de l'angle (positive dans le sens direct) qui repère la position de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$).



En mécanique, on compose très souvent ce type de repérage (mouvement de rotation autour d'un axe). Il suffira alors pour formuler le vecteur rotation d'utiliser la propriété précédente et la composition des vecteurs rotation.

Sommaire

Vecteur vitesse d'un point

Définition : Vecteur vitesse

On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Remarques :

Vecteur vitesse d'un point

DÉFINITION : Vecteur vitesse

On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

REMARQUES :

- L'origine O du repère $\mathcal{R}$ est importante.

Vecteur vitesse d'un point

Définition : Vecteur vitesse

On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Remarques :

- L'origine O du repère $\mathcal{R}$ est importante.
- La vitesse s'exprime en "m/s".

Vecteur vitesse d'un point

Définition : Vecteur vitesse

On appelle vitesse de M à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

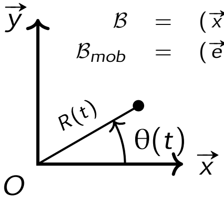
$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

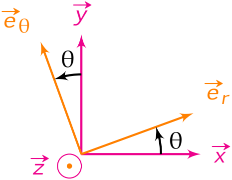
Remarques :

- L'origine O du repère $\mathcal{R}$ est importante.
- La vitesse s'exprime en "m/s".
- $$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)\right]_{\mathcal{B}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(x(t).\vec{x}+y(t).\vec{y}+z(t).\vec{z}\right)\right]_{\mathcal{B}} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}}.\vec{x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}.\vec{y}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dt}}.\vec{z}\end{aligned}$$

Exemple

$$\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$
$$\mathcal{B}_{mob} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$





$\overrightarrow{OM} = R.\vec{e}_r = R.\cos(\theta).\vec{x} + R.\sin(\theta).\vec{y}$ et
$\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} = \dot{\theta}.\vec{e}_z$

Exemple

Exemple

- Si R est constant :

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\vec{e}_r\end{aligned}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\overrightarrow{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\overrightarrow{y} = R.\dot{\theta}.\overrightarrow{e}_{\theta} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\overrightarrow{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\overrightarrow{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\overrightarrow{e}_r \\
&= \dot{\theta}.\overrightarrow{e}_z \wedge R.\overrightarrow{e}_r = R.\dot{\theta}.\overrightarrow{e}_{\theta}
\end{aligned}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\overrightarrow{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\overrightarrow{y} = R.\dot{\theta}.\overrightarrow{e}_{\theta} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\overrightarrow{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\overrightarrow{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\overrightarrow{e}_r \\
&= \dot{\theta}.\overrightarrow{e}_z \wedge R.\overrightarrow{e}_r = R.\dot{\theta}.\overrightarrow{e}_{\theta}
\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\overrightarrow{V}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R(t).\overrightarrow{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overrightarrow{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R(t).\overrightarrow{e}_r$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\vec{e}_r \\
&= \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r = R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}
\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R(t).\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R(t).\vec{e}_r \\
&= \dot{R}.\vec{e}_r + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r
\end{aligned}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\vec{e}_r \\
&= \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R(t).\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R(t).\vec{e}_r \\
&= \dot{R}.\vec{e}_r + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r \\
&= \dot{R}.\vec{e}_r + R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= -R.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x} + R.\dot{\theta}.\cos(\theta).\vec{y} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}} = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R.\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R.\vec{e}_r \\
&= \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(R(t).\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge R(t).\vec{e}_r \\
&= \dot{R}.\vec{e}_r + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge R.\vec{e}_r \\
&= \dot{R}.\vec{e}_r + R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ : Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire :

$$\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} = \lim_{dt \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \lim_{dt \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}$$

Définition : Accélération

On appelle accélération de M par rapport à $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{M/\mathcal{R}}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{B}}$$

Remarque :

Définition : Accélération

On appelle accélération de M par rapport à $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{M/\mathcal{R}}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{B}}$$

Remarque :

- L'origine du repère O est importante.

DÉFINITION : Accélération

On appelle accélération de M par rapport à $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{M/\mathcal{R}}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\left[\overrightarrow{OM}\right]_{\mathcal{B}}$$

REMARQUE :

- L'origine du repère O est importante.
- L'accélération s'exprime de m/s^2.

Exemple

Exemple

- Si R est constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right) \\ &= R.\ddot{\theta}.\vec{e}_{\theta} - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r\end{aligned}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right) \\
&= R.\ddot{\theta}.\vec{e}_{\theta} - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r
\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)$$

$$= R.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$$

- Si R n'est pas constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)$$

$$= R.\ddot{\theta}.\vec{e}_{\theta} - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$$

- Si R n'est pas constant :

$$\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\dot{R}(t)}{\mathrm{dt}}.\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}(R(t).\dot{\theta})}{\mathrm{dt}}.\vec{e}_{\theta} + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)$$

$$= \ddot{R}(t).\vec{e}_r + \left[\dot{R}(t).\dot{\theta} + R(t).\ddot{\theta}\right].\vec{e}_{\theta} + \dot{\theta}.\left(\dot{R}(t).\vec{e}_{\theta} - R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_r\right)$$

Exemple

- Si R est constant :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \overbrace{\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})}}^{\dot{\theta}.\vec{e}_z} \wedge \left(R.\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right) \\ &= R.\ddot{\theta}.\vec{e}_{\theta} - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r\end{aligned}$$

- Si R n'est pas constant :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right)\right]_{\mathcal{B}_{mob}} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{B}_{mob}/\mathcal{B})} \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}\dot{R}(t)}{\mathrm{dt}}.\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}(R(t).\dot{\theta})}{\mathrm{dt}}.\vec{e}_{\theta} + \dot{\theta}.\vec{e}_z \wedge \left(\dot{R}(t).\vec{e}_r + R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_{\theta}\right) \\ &= \ddot{R}(t).\vec{e}_r + \left[\dot{R}(t).\dot{\theta} + R(t).\ddot{\theta}\right].\vec{e}_{\theta} + \dot{\theta}.\left(\dot{R}(t).\vec{e}_{\theta} - R(t).\dot{\theta}.\vec{e}_r\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{(M/\mathcal{R})} = \left(\ddot{R} - R.\dot{\theta}^2\right).\vec{e}_r + \left(R.\ddot{\theta} + 2.\dot{R}.\dot{\theta}\right).\vec{e}_{\theta}}$$

Sommaire

Cinématique du solide indéformable

Définition

DÉFINITION : Solide indéformable

> *Un solide indéformable est un ensemble de points animés d'un mouvement de corps rigide.*

RAPPEL A tout solide indéformable on peut associer un repère et donc un référentiel.

Dans la suite, nous désignerons par solide, un solide indéformable, l'étude des déformations étant hors programme en MP2I - PCSI & MPSI et MP & PSI.

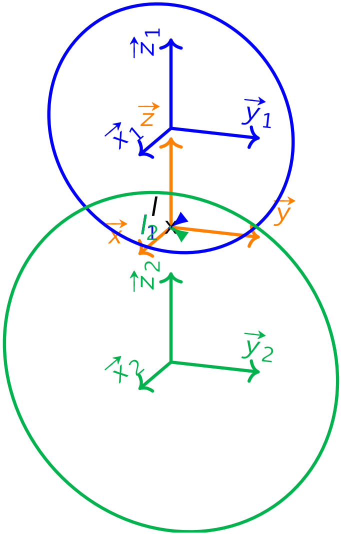
Point lié à un solide

Soit un solide S de repère associé $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Soit A un point tel que $\overrightarrow{OA} = x_A.\vec{x} + y_A.\vec{y} + z_A.\vec{z}$. On dit que A est lié à S si et seulement si x_A, y_A et z_A sont des constantes. On note $A \in S$ (A appartenant à S).

REMARQUE : Il faut faire attention à cette notion de point attaché à un solide.

Les deux solides S_1 et S_2 sont en contact en I. $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$. S_1 et S_2 tournent tous les deux autour de l'axe x. A $t = 0$, I, I_1 et I_2 sont confondus. A $t > 0$, I ne bouge pas, I_1 et I_2 bougent.

Avec cette définition, un point peut matérialiser l'espace. C'est le " point matériel ".


$\vec{z_1}$
$\vec{z}$
$\vec{x_1}$
$\vec{y_1}$
I
$\vec{y}$
$\vec{x}$
I_1
I_2
$\vec{z_2}$
$\vec{y_2}$
$\vec{x_2}$

Équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Propriété : Soient A et B deux points liés à un solide S de repère associé $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$. On a alors

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB}}$$

Équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

PROPRIÉTÉ : Soient A et B deux points liés à un solide S de repère associé $\mathcal{R}(O,\mathcal{B})$. On a alors

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})}.\overrightarrow{AB}}$$

Le champ de vitesses des points d'un solide est équiprojectif.

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

$$\begin{array}{rrcl} & \left\|\overrightarrow{AB}\right\| & = & cte \\ \Rightarrow & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} & = & cte^2 \end{array}$$

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= cte \\
\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} &= cte^2 \\
\Rightarrow \quad 2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{B}}.\overrightarrow{AB} &= 0
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= cte \\
\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} &= cte^2 \\
\Rightarrow \quad 2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{B}}.\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{B}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{B}}\right).\overrightarrow{AB} &= 0
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

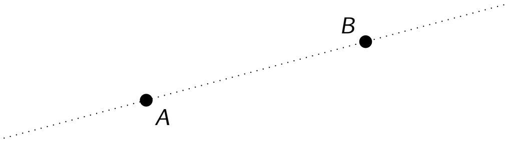
$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= cte \\
\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} &= cte^2 \\
\Rightarrow \quad 2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{B}}.\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{B}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{B}}\right).\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(-\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B/\mathcal{R})}\right).\overrightarrow{AB} &= 0
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : Le solide S étant indéformable, $\forall\ A, B \in S$, les coordonnées de A et celle de B sont constante au cours du temps dans $\mathcal{R}$. Donc :

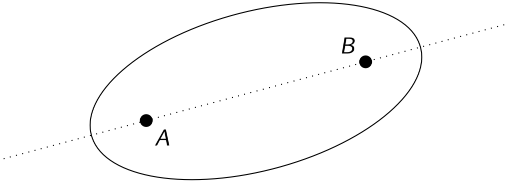
$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= cte \\
\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} &= cte^2 \\
\Rightarrow \quad 2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{B}}.\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{B}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{B}}\right).\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(-\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B/\mathcal{R})}\right).\overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(-\overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}\right).\overrightarrow{AB} &= 0
\end{aligned}
$$

Interprétation géométrique

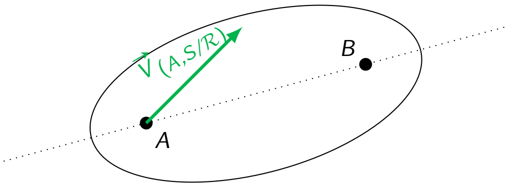
Interprétation géométrique



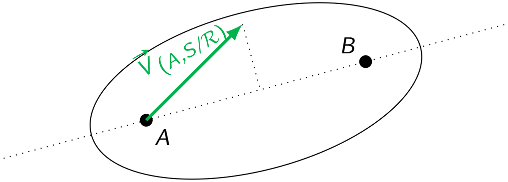
Interprétation géométrique



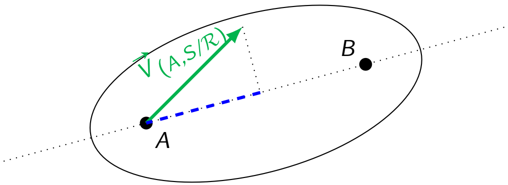
Interprétation géométrique



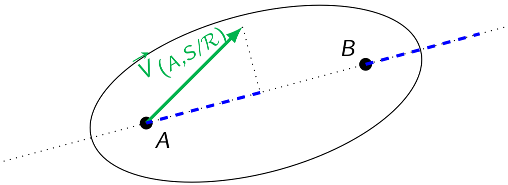
Interprétation géométrique



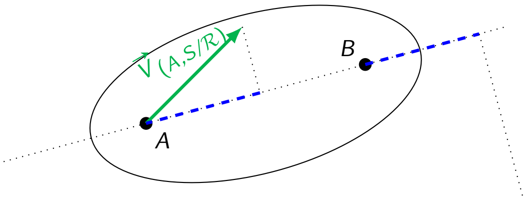
Interprétation géométrique



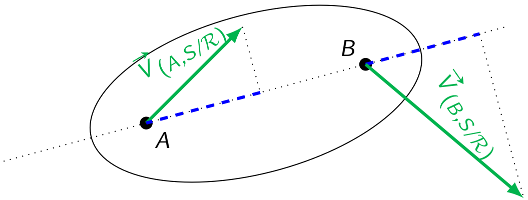
Interprétation géométrique



Interprétation géométrique



Interprétation géométrique



Torseur cinématique

PROPRIÉTÉ :

Comme le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, c'est également un champ de moments. Ainsi, il existe un vecteur qui dépend de S et de $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$, tel que :

Torseur cinématique

PROPRIÉTÉ :
Comme le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, c'est également un champ de moments. Ainsi, il existe un vecteur qui dépend de S et de $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$, tel que :

$$\boxed{\forall (A,B) \in S^2 \qquad \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}$$

Torseur cinématique

PROPRIÉTÉ :

Comme le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, c'est également un champ de moments. Ainsi, il existe un vecteur qui dépend de S et de $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$, tel que :

$$\boxed{\forall (A,B) \in S^2 \qquad \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}$$

Ce vecteur est appelé vecteur instantané de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}$. Comme le champ des vitesses d'un solide est un champ de moments, il est représentable par un torseur.

Torseur cinématique

PROPRIÉTÉ :
Comme le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, c'est également un champ de moments. Ainsi, il existe un vecteur qui dépend de S et de $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$, tel que :

$$\boxed{\forall (A,B) \in S^2 \qquad \overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}}$$

Ce vecteur est appelé vecteur instantané de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}$. Comme le champ des vitesses d'un solide est un champ de moments, il est représentable par un torseur.

DÉFINITION : Torseur cinématique

Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$ est représentable, au point A, par le torseur cinématique de $S/\mathcal{R}$: $\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Remarques :

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Remarques :

- Le torseur cinématique est défini à tout instant

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

REMARQUES :

- Le torseur cinématique est défini à tout instant
- $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$ est appelé la résultante du torseur

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Remarques :

- Le torseur cinématique est défini à tout instant
- $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$ est appelé la résultante du torseur
- $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$ est appelé le moment du torseur en M

Torseur cinématique

$$\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \\ \overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

Remarques :

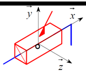
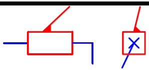
- Le torseur cinématique est défini à tout instant
- $\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}$ est appelé la résultante du torseur
- $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$ est appelé le moment du torseur en M

Les liaisons cinématiques normalisées autorisent différents degrés de libertés. Pour deux solides 1 et 0 liés par une liaison normalisée, en exprimant le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport à un solide 0 en un point idéalement choisi, la forme de ce torseur devient caractéristique de la liaisons.

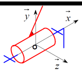
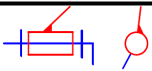
Encastrement

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S_1/S_0)} \\ \overrightarrow{V}_{(X,S_1/S_0)} \end{array} \right\}$	
0 ddl 0 tr 0 rt			$\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$	${}_M\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

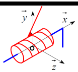
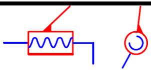
Glissière

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S_1/S_0)\\ \vec{V}(X,S_1/S_0)\end{array}\right\}$	
1 ddl 1 tr 0 rt			1 direction $\vec{x}$ $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ V.\vec{x}\end{array}\right\}$	${}_M\left\{\begin{array}{cc}0 & u_{10}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{\mathcal{B}_0}$

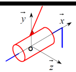
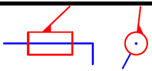
Pivot

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}$	
1 ddl 0 tr 1 rt			1 axe $(A,\vec{x})$ $\forall M \in (A,\vec{x})$	${}_M\left\{ \begin{array}{c} \omega.\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$	${}_M\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

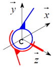
Hélicoïdale

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}_X$	
1 ddl 1 tr 1 rt			1 axe $(A, \vec{x})$ $\forall M \in (A, \vec{x})$	$_M\left\{ \begin{array}{c} \omega.\vec{x} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\}$ avec $V = \frac{p}{2.\pi}.\omega$	$_M\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & \frac{p}{2.\pi}.p_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

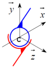
Pivot glissant

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}$	
2 ddl 1 tr 1 rt			1 axe $(A, \overrightarrow{x})$ $\forall M \in (A, \overrightarrow{x})$	${}_M\left\{ \begin{array}{c} \omega.\overrightarrow{x} \\ V.\overrightarrow{x} \end{array} \right\}$	${}_M\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

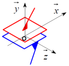
Rotule à doigt

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}$	
2 ddl 0 tr 2 rt			1 point A, centre de liaison	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}(S_1/S_0) \cdot \vec{x} = 0$	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

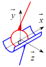
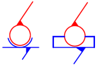
Rotule

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathcal{V}_{1/0} = {}_X\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}$	
3 ddl 0 tr 3 rt			1 point A, centre de liaison	${}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ avec $\vec{\Omega}(S_1/S_0)$ quelconque	${}_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

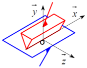
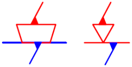
Appui plan

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_X\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)\\ \overrightarrow{V}(X,S_1/S_0)\end{array}\right\}$	
3 ddl 2 tr 1 rt			Normal au plan $\overrightarrow{y}$, $\forall M \in (\varepsilon)$	${}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)\\ \overrightarrow{V}(M,S_1/S_0)\end{array}\right\}$ avec $\overrightarrow{V}(M,S_1/S_0)\cdot\overrightarrow{y} = 0$	${}_M\left\{\begin{array}{cc}0 & u_{10}\\ q_{10} & 0\\ 0 & w_{10}\end{array}\right\}_{\mathcal{B}_0}$

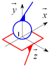
Linéaire annulaire

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = {}_X\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S_1/S_0)\\ \vec{V}(X,S_1/S_0)\end{array}\right\}$	
4 ddl 1 tr 3 rt			1 axe $(A,\vec{x})$, centre de sphère A	${}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S_1/S_0)\\ V\,\vec{x}\end{array}\right\}$ avec $\vec{\Omega}(S_1/S_0)$ quelconque	${}_A\left\{\begin{array}{cc}p_{10} & u_{10}\\ q_{10} & 0\\ r_{10} & 0\end{array}\right\}_{\mathcal{B}_0}$

Linéaire rectiligne

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}_X$	
4 ddl 2 tr 2 rt			Normal au plan $\overrightarrow{y}$, Droite de contact $(A, \overrightarrow{x})$	$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x.\overrightarrow{x} + \omega_y.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{V}(A,S_1/S_0) \end{array} \right\}_A$ avec $\overrightarrow{V}(A,S_1/S_0).\overrightarrow{y} = 0$	$\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{B}_0}$

Ponctuelle

ddl	Schéma spatial	Schéma plan	Caractéristique géométrique	Torseur cinématique $\mathscr{V}_{1/0} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{V}(X,S_1/S_0) \end{array} \right\}_X$	
5 ddl 2 tr 3 rt			Normal au plan $\overrightarrow{y}$, point de contact A	$_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{V}(A,S_1/S_0) \end{array} \right\}$ avec $\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)$ quelconque et $\overrightarrow{V}(A,S_1/S_0)\cdot\overrightarrow{y} = 0$	$_A\left\{ \begin{array}{cc} p_{10} & u_{10} \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & w_{10} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$

Champ de vecteur accélération d′un solide

PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux points d′un solide S.

Champ de vecteur accélération d'un solide

PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux points d'un solide S.

$$\boxed{\overrightarrow{A}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

Champ de vecteur accélération d'un solide

PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux points d'un solide S.

$$\boxed{\overrightarrow{A}_{(B,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A}_{(B,S/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{V}_{(B,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{V}_{(A,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{BA}\right)\right]_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} \\
&= \overrightarrow{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \left(\cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{BA}\right)\right]_{S}} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

Champ de vecteur accélération d'un solide

PROPRIÉTÉ :

Soient A et B deux points d'un solide S.

$$\boxed{\vec{A}_{(B,S/\mathcal{R})} = \vec{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \vec{AB}\right)}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{(B,S/\mathcal{R})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{BA}\right)\right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}} \\
&= \vec{A}_{(A,S/\mathcal{R})} + \left(\cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{BA}\right)\right]_{S}} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \vec{BA}\right) \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} + \vec{BA} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}\right)\right]_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

CONSÉQUENCE : Le champ d'accélération d'un solide n'est pas un champ de torseur.

Sommaire

Composition des vitesses pour le point

PROPRIÉTÉ : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Composition des vitesses pour le point

PROPRIÉTÉ : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Composition des vitesses pour le point

PROPRIÉTÉ : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

DÉMONSTRATION :

$$\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Composition des vitesses pour le point

Propriété : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Démonstration :

$$\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0O_1}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Composition des vitesses pour le point

PROPRIÉTÉ : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0O_1}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \vec{V}_{(O_1/\mathcal{R}_0)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}
\end{aligned}$$

Composition des vitesses pour le point

PROPRIÉTÉ : Soient $\mathcal{R}_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\mathcal{B}_1)$ deux référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_0O_1}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \vec{V}_{(O_1/\mathcal{R}_0)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{O_1A} \\
&= \underbrace{\vec{V}_{(O_1,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{O_1A}\right)\right]_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Définition : Composition des vitesses

- $\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)}$ *est appelée vitesse absolue.*
- $\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}$ *est appelée vitesse relative.*
- $\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ *est appelée vitesse d'entraînement. Le point A est attaché à $\mathcal{R}_1$ de manière instantanée. C'est un point coïncidant.*

Composition des vitesses pour le solide

PROPRIÉTÉ :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Composition des vitesses pour le solide

Propriété :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Composition des vitesses pour le solide

PROPRIÉTÉ :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

DÉMONSTRATION :

$$\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} \quad = \quad \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}$$

Composition des vitesses pour le solide

PROPRIÉTÉ :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $$\boxed{\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} &= \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_2)} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}_{\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} - \overrightarrow{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}}_{\overrightarrow{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Composition des vitesses pour le solide

Propriété :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} &= \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)} \\
&= \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Comme nous avions déjà :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$$

Composition des vitesses pour le solide

Propriété :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} &= \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)} \\
&= \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Comme nous avions déjà :

$\boxed{\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$, il vient :

Composition des vitesses pour le solide

PROPRIÉTÉ :

Soient $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ trois référentiels et A un point.

Alors $\boxed{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} &= \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)} \\
&= \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}} + \underbrace{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_1)} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R}_2)}}_{\vec{V}_{(A,\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)}}
\end{aligned}$$

Comme nous avions déjà :

$\boxed{\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)} = \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} + \vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}}$, il vient :

$\boxed{\mathscr{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \mathscr{V}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \mathscr{V}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}$

Fermeture cinématique

Dans une chaine cinématique fermée, pour obtenir des relations entre les différents paramètres cinématiques, on établit une fermeture de chaîne cinématique. En reprenant l'exemple du micro-moteur du cours précédent, on obtient : $\mathscr{V}_{3/2}+\mathscr{V}_{2/1}+\mathscr{V}_{1/0}=\mathscr{V}_{3/0}$

avec :

$$\mathscr{V}_{1/0} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{10}(t).\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad ; \quad \mathscr{V}_{2/1} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{21}(t).\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Fermeture cinématique

Dans une chaine cinématique fermée, pour obtenir des relations entre les différents paramètres cinématiques, on établit une fermeture de chaîne cinématique. En reprenant l'exemple du micro-moteur du cours précédent, on obtient : $\mathscr{V}_{3/2} + \mathscr{V}_{2/1} + \mathscr{V}_{1/0} = \mathscr{V}_{3/0}$

avec :

$$\mathscr{V}_{1/0} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{10}(t).\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad ; \quad \mathscr{V}_{2/1} = {}_{B}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{21}(t).\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\mathscr{V}_{3/2} = {}_{C}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{32}(t).\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad ; \quad \mathscr{V}_{3/0} = {}_{\forall M}\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t).\vec{x}_0 \end{array} \right\}$$

On pose $\omega_{ij}(t) = \dot{\theta}_{ij}(t)$. Plaçons les torseurs au point C pour ne pas faire intervenir ω_{32}.

On pose $\omega_{ij}(t) = \dot{\theta}_{ij}(t)$. Plaçons les torseurs au point C pour ne pas faire intervenir ω_{32}.

Rappel $\overrightarrow{AB} = e.\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{BC} = L.\overrightarrow{x}_2$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t).\overrightarrow{x}_0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}_{(C,1/0)} &= \cancel{\overrightarrow{V}_{(A,1/0)}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(1/0)} \\ &= -\lambda(t).\overrightarrow{x}_0 \wedge \omega_{10}(t).\overrightarrow{z}_0 = \lambda(t).\omega_{10}(t).\overrightarrow{y}_0\end{aligned}$$

On pose $\omega_{ij}(t) = \dot{\theta}_{ij}(t)$. Plaçons les torseurs au point C pour ne pas faire intervenir ω_{32}.

Rappel $\overrightarrow{AB} = e.\vec{x}_1$, $\overrightarrow{BC} = L.\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t).\vec{x}_0$.

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{V}_{(C,1/0)} & = & \cancel{\vec{V}_{(A,1/0)}} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} \\ & & = & -\lambda(t).\vec{x}_0 \wedge \omega_{10}(t).\vec{z}_0 = \lambda(t).\omega_{10}(t).\vec{y}_0 \\ \text{et} & \vec{V}_{(C,2/1)} & = & \cancel{\vec{V}_{(B,2/1)}} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ & & = & -L.\vec{x}_2 \wedge \omega_{21}(t).\vec{z}_0 = L.\omega_{21}(t).\vec{y}_2 \end{array}$$

$$\mathscr{V}_{3/2} + \mathscr{V}_{2/1} + \mathscr{V}_{1/0} = \mathscr{V}_{3/0}$$

$$\mathscr{V}_{3/2} + \mathscr{V}_{2/1} + \mathscr{V}_{1/0} = \mathscr{V}_{3/0}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\Omega}_{(3/2)} + \vec{\Omega}_{(2/1)} + \vec{\Omega}_{(1/0)} & = & \vec{\Omega}_{(3/0)} \\ \vec{V}_{(C,3/2)} + \vec{V}_{(C,2/1)} + \vec{V}_{(C,1/0)} & = & \vec{V}_{(C,3/0)} \end{array} \right.$$

$$\mathscr{V}_{3/2} + \mathscr{V}_{2/1} + \mathscr{V}_{1/0} = \mathscr{V}_{3/0}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\Omega}_{(3/2)} + \vec{\Omega}_{(2/1)} + \vec{\Omega}_{(1/0)} & = & \vec{\Omega}_{(3/0)} \\ \vec{V}_{(C,3/2)} + \vec{V}_{(C,2/1)} + \vec{V}_{(C,1/0)} & = & \vec{V}_{(C,3/0)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \omega_{32}(t) + \omega_{21}(t) + \omega_{10}(t) & = & 0 \text{ en projetant sur } \vec{z}_0 \\ \vec{0} + L.\omega_{21}(t).\vec{y}_2 + \lambda(t).\omega_{10}(t).\vec{y}_0 & = & \dot{\lambda}(t).\vec{x}_0 \end{array} \right.$$

Une projection sur $\vec{x}_2$ de la dernière équation permet d'éliminer $\omega_{21}(t)$ et on obtient ainsi une relation entre $\dot{\lambda}(t)$ et $\omega_{10}(t)$:

Une projection sur $\vec{x}_2$ de la dernière équation permet d'éliminer $\omega_{21}(t)$ et on obtient ainsi une relation entre $\dot{\lambda}(t)$ et $\omega_{10}(t)$:

$$\lambda(t).\omega_{10}(t).\sin(\theta_{20}) = \dot{\lambda}(t).\cos(\theta_{20}(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \lambda(t).\tan(\theta_{20}(t)).\omega_{10}(t)$$

Une projection sur $\vec{x}_2$ de la dernière équation permet d'éliminer $\omega_{21}(t)$ et on obtient ainsi une relation entre $\dot{\lambda}(t)$ et $\omega_{10}(t)$:

$$\lambda(t).\omega_{10}(t).\sin(\theta_{20}) = \dot{\lambda}(t).\cos(\theta_{20}(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \lambda(t).\tan(\theta_{20}(t)).\omega_{10}(t)$$

Remarque : En partant de la fermeture géométrique et en dérivant dans le repère $\mathcal{R}_0$, on obtient la même équation.

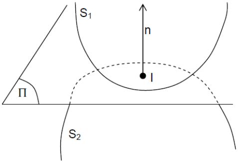
Une projection sur $\vec{x}_2$ de la dernière équation permet d'éliminer $\omega_{21}(t)$ et on obtient ainsi une relation entre $\dot{\lambda}(t)$ et $\omega_{10}(t)$:

$$\lambda(t).\omega_{10}(t).\sin(\theta_{20}) = \dot{\lambda}(t).\cos(\theta_{20}(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = \lambda(t).\tan(\theta_{20}(t)).\omega_{10}(t)$$

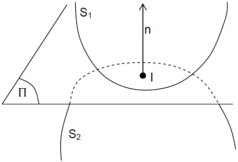
Remarque : En partant de la fermeture géométrique et en dérivant dans le repère $\mathcal{R}_0$, on obtient la même équation.

> Les équations obtenues dans une fermeture de chaîne cinématique sont dérivées des équations obtenues dans les fermetures géométriques.

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en I. A t donné, il existe alors $I_1 \in S_1$ tel que $I = I_1$ et il existe alors $I_2 \in S_2$ tel que $I = I_2$. I est le point de contact. $I \notin S_1$ et $I \notin S_2$. On se limite aux surfaces régulières qui admettent un plan tangent Π et une normale $\vec{n}$.



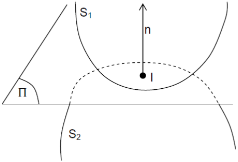
Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en I. A t donné, il existe alors $I_1 \in S_1$ tel que $I = I_1$ et il existe alors $I_2 \in S_2$ tel que $I = I_2$. I est le point de contact. $I \notin S_1$ et $I \notin S_2$. On se limite aux surfaces régulières qui admettent un plan tangent Π et une normale $\vec{n}$.



Rappel

Le mouvement relatif entre S_1 et S_2 est caractérisé par le torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1.

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en I. A t donné, il existe alors $I_1 \in S_1$ tel que $I = I_1$ et il existe alors $I_2 \in S_2$ tel que $I = I_2$. I est le point de contact. $I \notin S_1$ et $I \notin S_2$. On se limite aux surfaces régulières qui admettent un plan tangent Π et une normale $\vec{n}$.



Rappel

Le mouvement relatif entre S_1 et S_2 est caractérisé par le torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1.

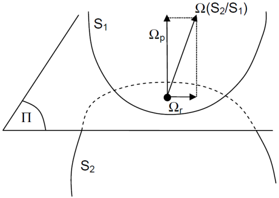
$$\mathscr{V}_{S_2/S_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} \\ \vec{V}_{(I,S_2/S_1)} \end{array} \right\}_I$$

Définition : Vecteurs roulement et pivotement

- $\vec{\Omega}_p = \left(\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)}.\vec{n}\right)\vec{n}$ *est le vecteur pivotement.*
- $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \vec{\Omega}_p$ *est le vecteur roulement.*

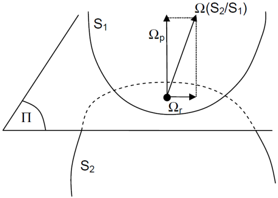
Définition : Vecteurs roulement et pivotement

- $\vec{\Omega}_p = \left(\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)}.\vec{n}\right)\vec{n}$ *est le vecteur pivotement.*
- $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \vec{\Omega}_p$ *est le vecteur roulement.*



DÉFINITION : Vecteurs roulement et pivotement

- $\vec{\Omega}_p = \left(\vec{\Omega}_{(S_2/S_1)}.\vec{n}\right)\vec{n}$ *est le vecteur pivotement.*
- $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \vec{\Omega}_p$ *est le vecteur roulement.*



DÉFINITION : Vecteur glissement

On appelle vecteur glissement de S_2 sur S_1 en I $\vec{V}_{(I,S_2/S_1)}$

PROPRIÉTÉ :
Le vecteur glissement appartient au plan tangent Π. Au niveau du contact, il n'y a donc ni décollement, ni pénétration entre les solides.

DÉMONSTRATION :
$\overrightarrow{V}_{(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{V}_{(I/S_1)} - \overrightarrow{V}_{(I/S_2)}$. Chacun des deux termes de droite de cette équation correspond à la vitesse du point I sur S_1 ou S_2. Comme I est défini comme étant sur le bord de la structure, et comme la vitesse est tangente à la trajectoire, chacune des vitesses se trouve dans le plan tangent, et donc la différence des deux vitesses aussi.

RSG

DÉFINITION : Roulement sans glissement

On dit que S_2 roule sans glisser sur S_1 si et seulement si $\overrightarrow{V}_{(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$

Définition d'un repère par rapport à un autre repère

Pour définir un repère $\mathcal{R}_1$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, il faut :

- paramétrer la position de l'origine O_1 de $\mathcal{R}_1$ dans $\mathcal{R}_0$. Ceci se fait en donnant les coordonnées de O_1 dans $\mathcal{R}_0$. Dans $\mathbb{R}^3$, il faut 3 coordonnées.
- paramétrer l'orientation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, i.e l'orientation de $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$. Étant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, il faut donner 3 angles.

Angles d'Euler

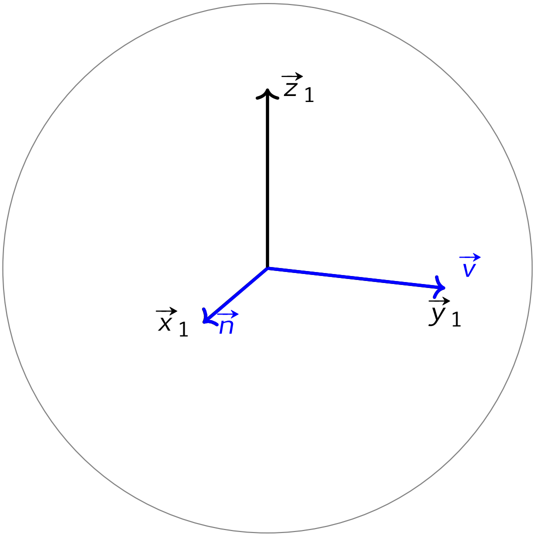
Les angles d'Euler représentent une possibilité (à connaître) pour définir l'orientation d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 paramètres angulaires. Les 3 rotations s'effectuent autour de 3 vecteurs indépendants. Le choix des vecteurs de rotation effectué dans Euler est le suivant :

- La première rotation s'effectue autour de $\vec{z}_1$
- la dernière rotation s'effectue autour de $\vec{z}_2$.
- La rotation intermédiaire s'effectue autour d'un vecteur perpendiculaire à $\vec{z}_1$ et à $\vec{z}_2$.

$$\vec{n} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2\|}$$

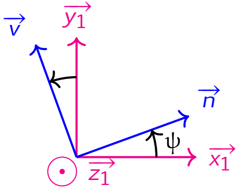
ψ angle de précession ; θ angle de nutation ; ϕ angle de rotation propre

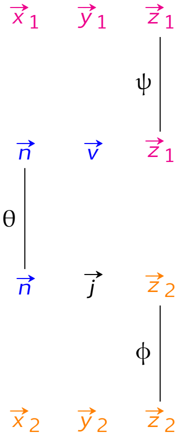
Vecteur taux de rotation de $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1$:
$\vec{\Omega}_{(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)} = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{n} + \dot{\phi}.\vec{z}_2$

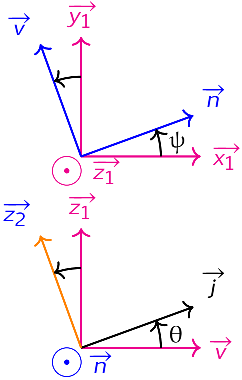


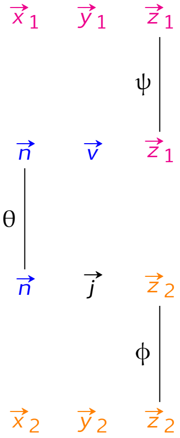
$\vec{z}_1$
$\vec{v}$
$\vec{x}_1$
$\vec{n}$
$\vec{y}_1$

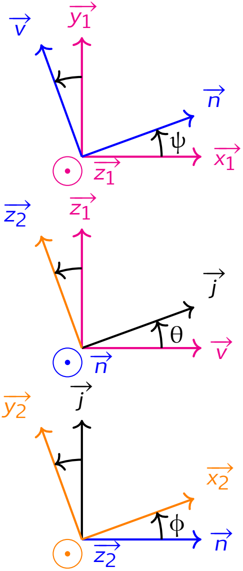
$$
\begin{tikzcd}
\vec{x}_1 & \vec{y}_1 & \vec{z}_1 \arrow[d, dash, "\psi"'] \\
\vec{n} \arrow[d, dash, "\theta"'] & \vec{v} & \vec{z}_1 \\
\vec{n} & \vec{j} & \vec{z}_2 \arrow[d, dash, "\phi"'] \\
\vec{x}_2 & \vec{y}_2 & \vec{z}_2
\end{tikzcd}
$$

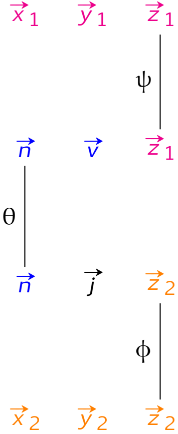

$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{y_1}$
$\overrightarrow{n}$
ψ
$\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{z_1}$


$\overrightarrow{x}_1$ $\overrightarrow{y}_1$ $\overrightarrow{z}_1$
ψ
$\overrightarrow{n}$ $\overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{z}_1$
θ
$\overrightarrow{n}$ $\overrightarrow{j}$ $\overrightarrow{z}_2$
ϕ
$\overrightarrow{x}_2$ $\overrightarrow{y}_2$ $\overrightarrow{z}_2$


$\vec{v}$ $\vec{y}_1$
$\vec{n}$
ψ
$\vec{x}_1$
$\vec{z}_1$
$\vec{z}_2$ $\vec{z}_1$
$\vec{j}$
θ
$\vec{v}$
$\vec{n}$


$\vec{x}_1$ $\vec{y}_1$ $\vec{z}_1$
ψ
$\vec{n}$ $\vec{v}$ $\vec{z}_1$
θ
$\vec{n}$ $\vec{j}$ $\vec{z}_2$
ϕ
$\vec{x}_2$ $\vec{y}_2$ $\vec{z}_2$

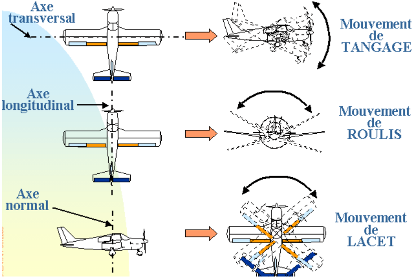

$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{y_1}$
$\overrightarrow{n}$
ψ
$\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{z_2}$
$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{j}$
θ
$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{x_2}$
φ
$\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{z_2}$

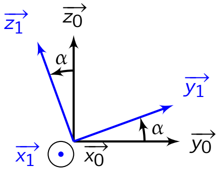

$\vec{x}_1$ $\vec{y}_1$ $\vec{z}_1$
ψ
$\vec{n}$ $\vec{v}$ $\vec{z}_1$
θ
$\vec{n}$ $\vec{j}$ $\vec{z}_2$
φ
$\vec{x}_2$ $\vec{y}_2$ $\vec{z}_2$

Roulis, tangage, lacet

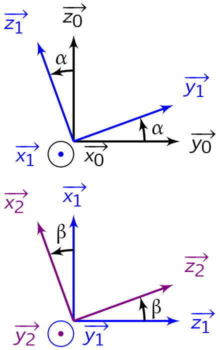
D'autres angles sont utilisés pour quantifier les mouvements dans un repère propre au solide.

Ainsi dans la marine ou en aéronautique, les termes de tangage (avant, arrière), de roulis (gauche, droite) et de lacet (virage à gauhe, virage à droite) sont utilisés pour décrire les mouvements.

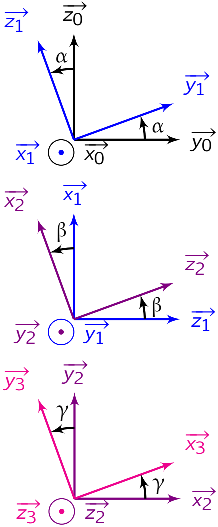


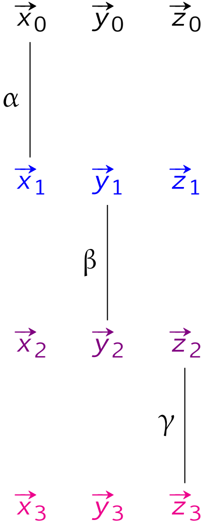


$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{z_0}$
α
$\overrightarrow{y_1}$
α
$\overrightarrow{y_0}$
$\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{x_0}$

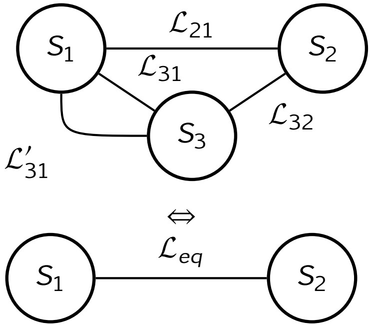


$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{z_0}$
α
$\overrightarrow{y_1}$
α
$\overrightarrow{y_0}$
$\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{x_0}$
$\overrightarrow{x_2}$
$\overrightarrow{x_1}$
β
$\overrightarrow{z_2}$
β
$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{y_1}$


$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{z_0}$
α
$\overrightarrow{y_1}$
α
$\overrightarrow{y_0}$
$\overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{x_0}$
$\overrightarrow{x_2}$
$\overrightarrow{x_1}$
β
$\overrightarrow{z_2}$
β
$\overrightarrow{z_1}$
$\overrightarrow{y_2}$
$\overrightarrow{y_1}$
$\overrightarrow{y_3}$
$\overrightarrow{y_2}$
γ
$\overrightarrow{x_3}$
γ
$\overrightarrow{x_2}$
$\overrightarrow{z_3}$
$\overrightarrow{z_2}$


$\vec{x}_0$ $\vec{y}_0$ $\vec{z}_0$
α
$\vec{x}_1$ $\vec{y}_1$ $\vec{z}_1$
β
$\vec{x}_2$ $\vec{y}_2$ $\vec{z}_2$
γ
$\vec{x}_3$ $\vec{y}_3$ $\vec{z}_3$

Définition d'une liaison équivalente



Supposons qu'il existe entre deux pièces S_1 et S_2 plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires.

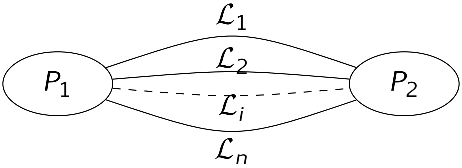
La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre la pièce S_1 et la pièce S_2 est la liaison théorique de référence $\mathscr{L}_{eq}$ qui a le même comportement que cette association de liaisons, et qui autorise le même mouvement.

Supposons qu'il existe entre deux pièces S_1 et S_2 plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires.

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre la pièce S_1 et la pièce S_2 est la liaison théorique de référence $\mathscr{L}_{eq}$ qui a le même comportement que cette association de liaisons, et qui autorise le même mouvement.

La liaison équivalente doit appartenir aux liaisons normalisées.

Liaisons en parallèle



Définition : Liaisons en parallèle

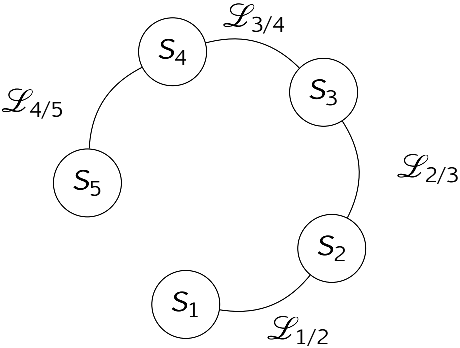
n liaisons $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$,...,$\mathscr{L}_n$ sont disposées en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 si chaque liaison relie directement ces deux solides.

Pour que la liaison équivalente $\mathscr{L}_{eq}$ entre S_1 et S_2 soit compatible avec les autres liaisons simples parallèles, il faut que son torseur cinématique soit égal au torseur cinématique associé à chaque liaison parallèle :

$$\boxed{\mathscr{V}_{S_2/S_1}^{\mathscr{L}_{eq}} = \mathscr{V}_{S_2/S_1}^{\mathscr{L}_1} = \ldots = \mathscr{V}_{S_2/S_1}^{\mathscr{L}_n}}$$

Remarque : Les torseurs doivent être écrits au même point pour réaliser toute opération.

Liaisons en série ou chaîne ouverte.



DÉFINITION : Liaisons en série

n liaisons $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$,...,$\mathscr{L}_n$ sont disposées en série entre des solides S_0 et S_n si elles sont à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de $(n-1)$ solides.

Par composition des vecteurs vitesses:

$$\boxed{\mathscr{V}_{S_n/S_1}^{\mathscr{L}_{eq}} = \mathscr{V}_{S_n/S_{n-1}}^{\mathscr{L}_{n-1}} + \ldots + \mathscr{V}_{S_2/S_1}^{\mathscr{L}_1}}$$

Sommaire

Translation

Définition : Mouvement de translation

Un solide S est animé d'un mouvement de translation dans un repère $\mathcal{R}_0$ si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ distincts et non colinéaires appartenant à (S) restent respectivement équipollents (supports parallèles, même sens, même normes) à deux vecteurs $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{A_0C_0}$ appartenant au repère $\mathcal{R}_0$.

Trajectoires

Les trajectoires sont des courbes qui se déduisent les unes des autres par translation, car $\forall A \in S$, $\forall B \in S$ alors $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}$ restant équipollent à lui même pendant le mouvement.

- On parle de translation rectiligne quand les trajectoires sont des droites.
  Exemple : un tiroir dans son meuble
- On parle de translation circulaire quand les trajectoires sont des cercles.
  Exemple : le balais de l'essuie-glace d'un autobus
- On parle de translation curviligne dans les autres cas.
  Exemple : une lampe d'architecte.

Vitesse des points d'un solide en translation

Puisque $\forall A, B \in S$, $\overrightarrow{AB}$ reste équipollent à lui même, alors

$$\begin{aligned}\vec{0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right]_{\mathcal{R}} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{AO}\right)\right]_{\mathcal{R}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\overrightarrow{OB}\right)\right]_{\mathcal{R}} \\ &= -\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{V}_{(B,S/\mathcal{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B,S/\mathcal{R})} = \vec{V}}\end{aligned}$$

Tous les points du solide en translation ont la même vitesse $\vec{V}$. Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} = \vec{0}$.

Accélération des points d'un solide en translation

Tous les points du solide en translation ont la même accélération $\vec{a}$.
Démonstration : aussi trivial que précédemment !

Torseur cinématique

Le torseur cinématique associé à un solide S en translation dans un repère $\mathcal{R}$ est:

$$\boxed{\forall M \in S \qquad \mathscr{V}_{S/\mathcal{R}} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} = \vec{0} \\ \vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \vec{V} \end{array} \right\}}$$

Ce type de torseur est appelé torseur-couple (par analogie avec le torseur des actions mécaniques transmissibles).

Remarque : l'écriture de ce torseur est la même quel que soit le point considéré : il est indépendant de son point de réduction.

Rotation autour d'un axe fixe

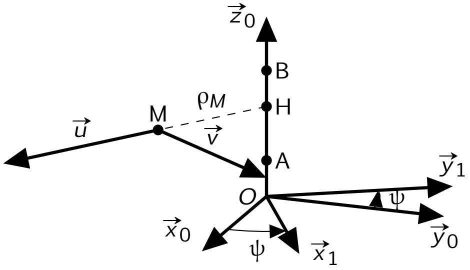
Définition : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide S lié à $\mathcal{R}_1$ est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Δ du repère $\mathcal{R}_0$ si deux points A et B distincts appartenant à S coïncident en permanence avec les deux points fixes A_0 et B_0 appartenant à Δ.

Conséquences

L'appartenance de A et B au même solide S se traduit par :

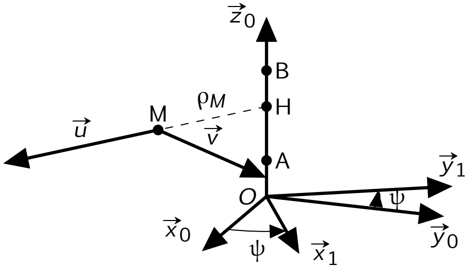
$$\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)}$$



Conséquences

L'appartenance de A et B au même solide S se traduit par :

$$\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)}$$

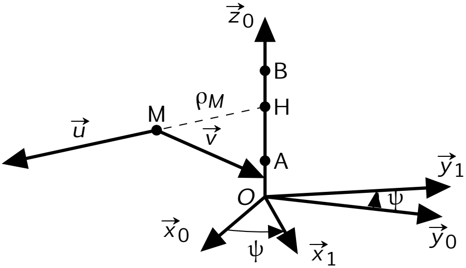


Si la vitesse des points A et B est nulle dans $\mathcal{R}_0$, alors $\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} // \overrightarrow{AB}$, et tout point de la droite (BA) a une vitesse nulle.

Conséquences

L'appartenance de A et B au même solide S se traduit par :

$$\vec{V}_{(B,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)}$$



Si la vitesse des points A et B est nulle dans $\mathcal{R}_0$, alors $\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} // \overrightarrow{AB}$, et tout point de la droite (BA) a une vitesse nulle.

En posant $\vec{z}_0$ le vecteur directeur de $\overrightarrow{AB}$, on a alors $\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \dot{\psi}(t).\vec{z}_0$, avec $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ le paramètre de position angulaire de $\mathcal{R}_1$ dans $\mathcal{R}_0$.

Trajectoires

Soient M un point de S et H est le projeté orthogonal de S sur (AB). H est fixe. S étant indéformable, la trajectoire de M est un cercle d'axe $(H, \vec{z}_0)$ et de rayon ρ_M.

Vitesses

Tous les points de l'axe de rotation ont un vecteur vitesse nul. Or, en appelant ρ_M, la distance du point M à l'axe $(H, \vec{z}_0)$:

Vitesses

Tous les points de l'axe de rotation ont un vecteur vitesse nul. Or, en appelant ρ_M, la distance du point M à l'axe $(H, \vec{z}_0)$:

$$\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(H,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{MH} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \vec{0} - \rho_M.\vec{u}. \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_0 = \rho_M.\dot{\psi}.\vec{v}$$

Vitesses

Tous les points de l'axe de rotation ont un vecteur vitesse nul. Or, en appelant ρ_M, la distance du point M à l'axe $(H, \vec{z}_0)$:

$$\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(H,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{MH} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \vec{0} - \rho_M.\vec{u}. \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_0 = \rho_M.\dot{\psi}.\vec{v}$$

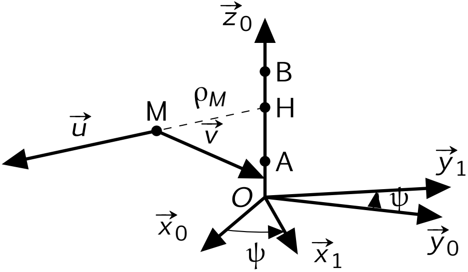
avec $\vec{v}$ défini tel que $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$

Vitesses

Tous les points de l'axe de rotation ont un vecteur vitesse nul. Or, en appelant ρ_M, la distance du point M à l'axe $(H, \vec{z}_0)$:

$$\vec{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = \vec{V}_{(H,S/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{MH} \wedge \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \vec{0} - \rho_M.\vec{u}. \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_0 = \rho_M.\dot{\psi}.\vec{v}$$

avec $\vec{v}$ défini tel que $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$



Accélérations

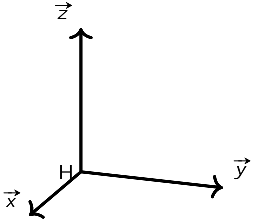
Par dérivation vectorielle, l'accélération vérifie :

$$\overrightarrow{A}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} = -\rho_M.\dot{\psi}^2.\overrightarrow{u} + \rho_M.\ddot{\psi}.\overrightarrow{v}$$

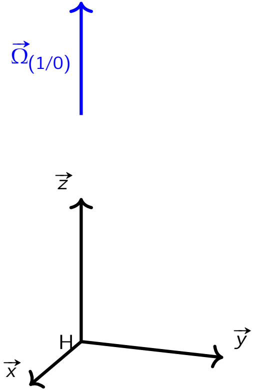
DÉMONSTRATION ::

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A}_{(M,S/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_M.\dot{\psi}.\overrightarrow{v}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_M.\dot{\psi}.\overrightarrow{v}\right)\right]_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{z}_0)} + \overrightarrow{\Omega}_{((\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{z}_0)/\mathcal{B}_0)} \wedge \rho_M.\dot{\psi}.\overrightarrow{v} \\
&= \rho_M.\ddot{\psi}.\overrightarrow{v} + \rho_M.\dot{\psi}.\left(\dot{\psi}.\overrightarrow{z}_0 \wedge \overrightarrow{v}\right) \\
&= -\rho_M.\dot{\psi}^2.\overrightarrow{u} + \rho_M.\ddot{\psi}.\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

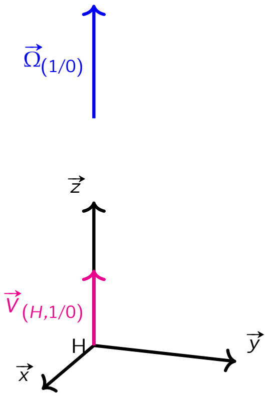
Cas général à un instant donné



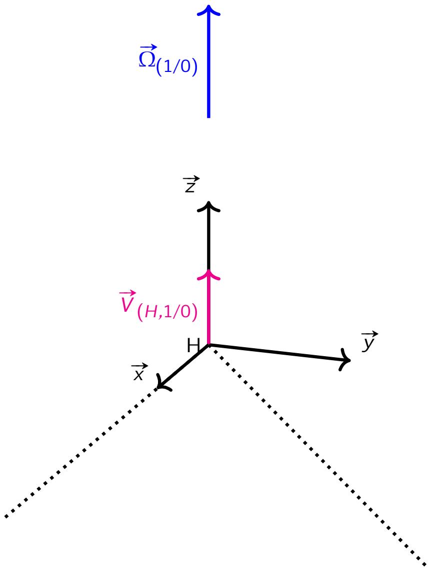
Cas général à un instant donné



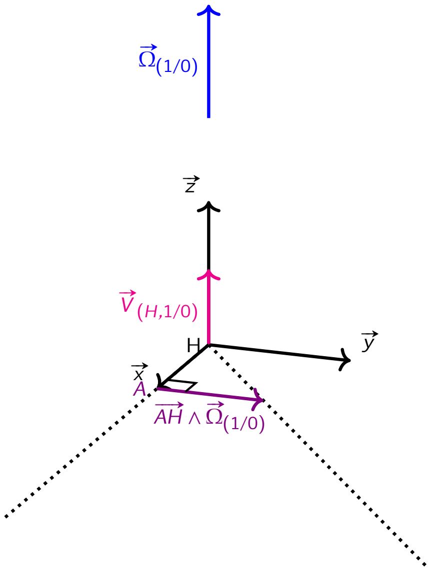
Cas général à un instant donné



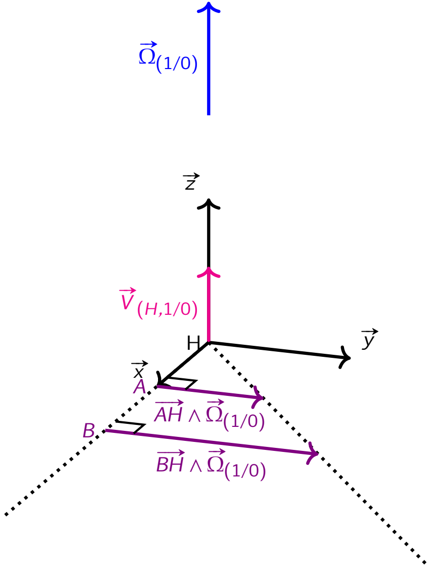
Cas général à un instant donné



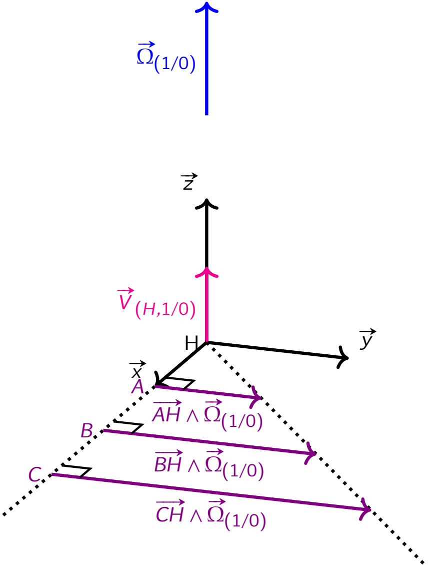
Cas général à un instant donné



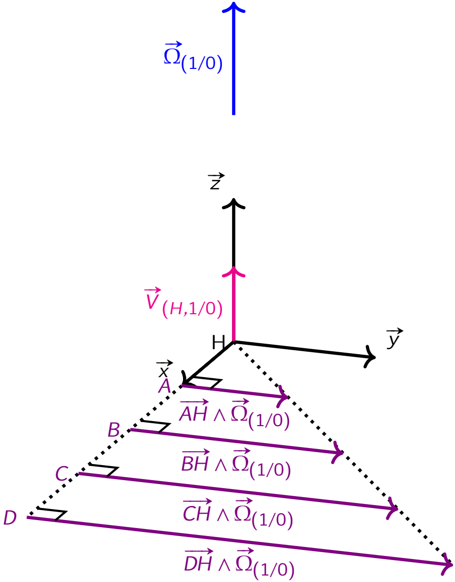
Cas général à un instant donné



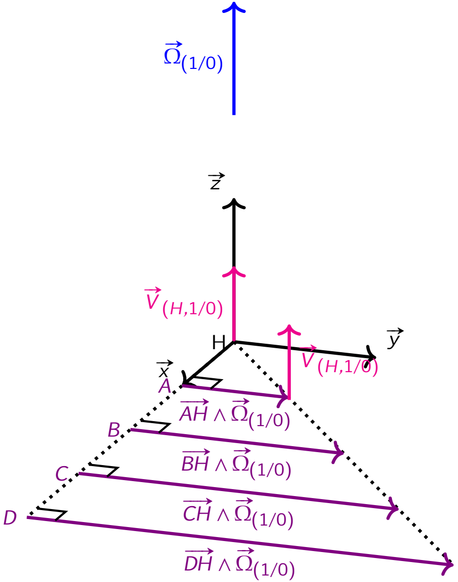
Cas général à un instant donné



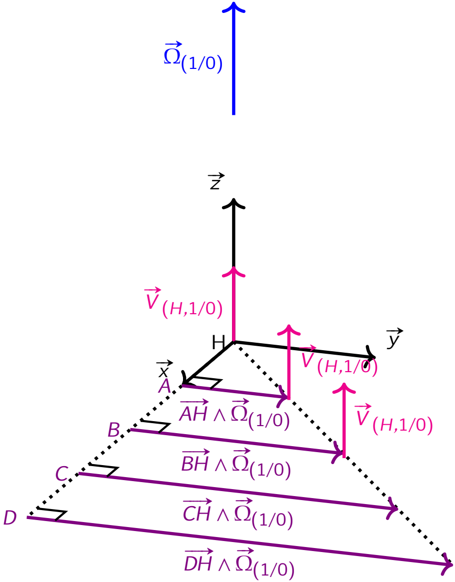
Cas général à un instant donné



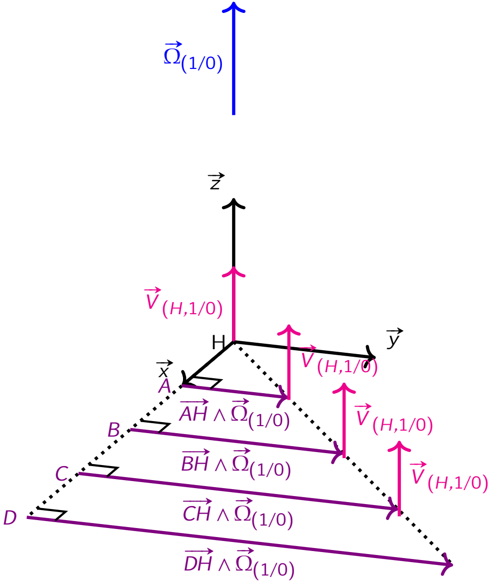
Cas général à un instant donné



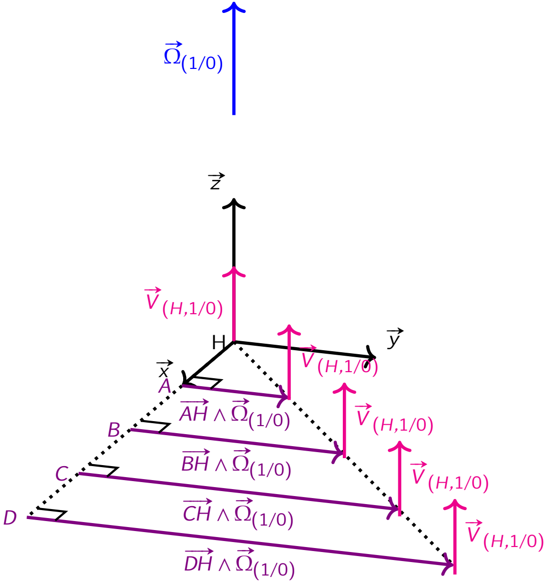
Cas général à un instant donné



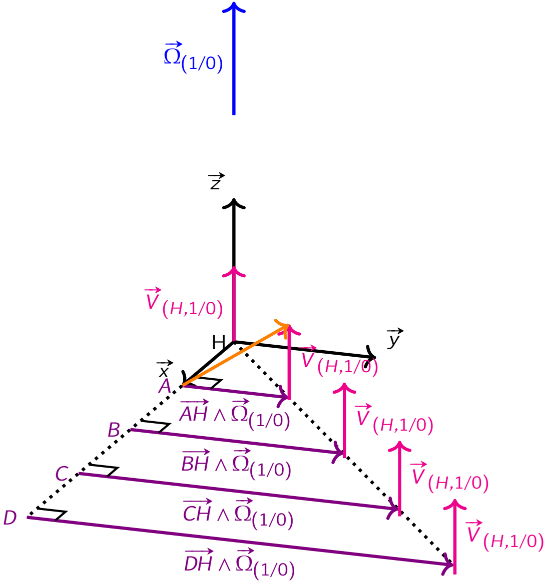
Cas général à un instant donné



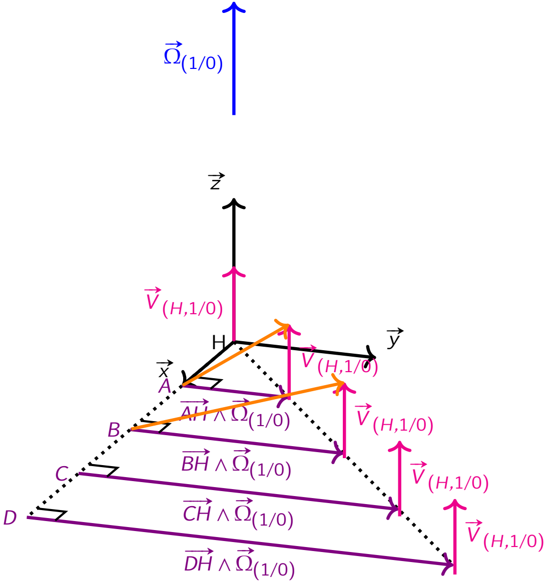
Cas général à un instant donné



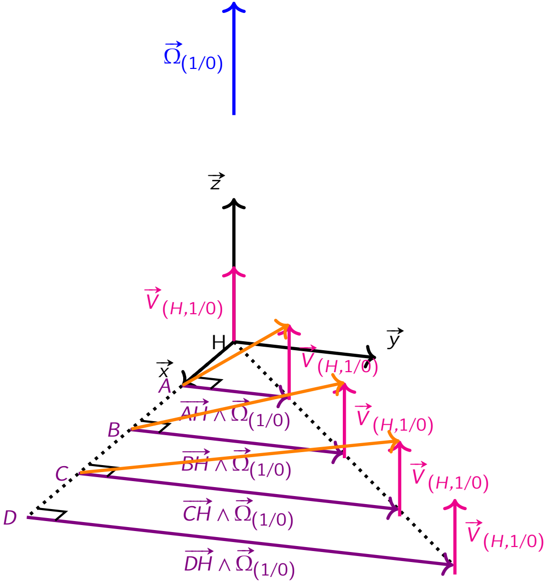
Cas général à un instant donné



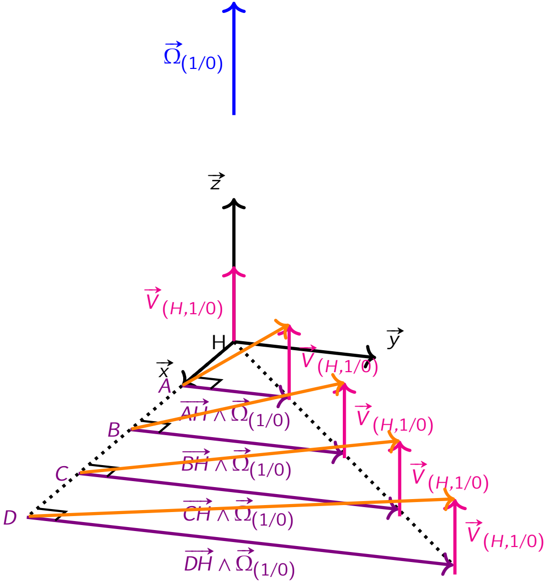
Cas général à un instant donné



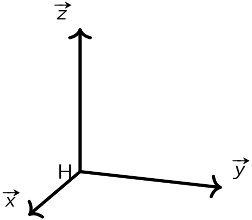
Cas général à un instant donné



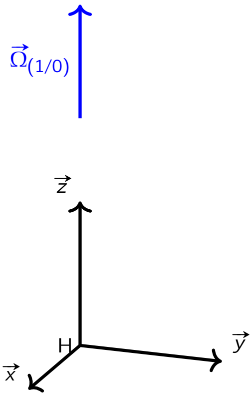
Cas général à un instant donné



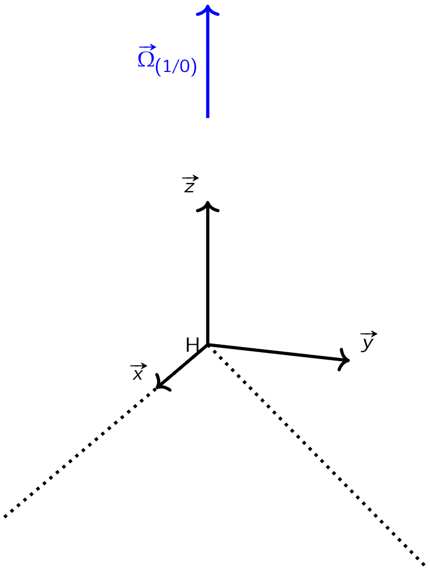
Rotation autour d'un axe fixe



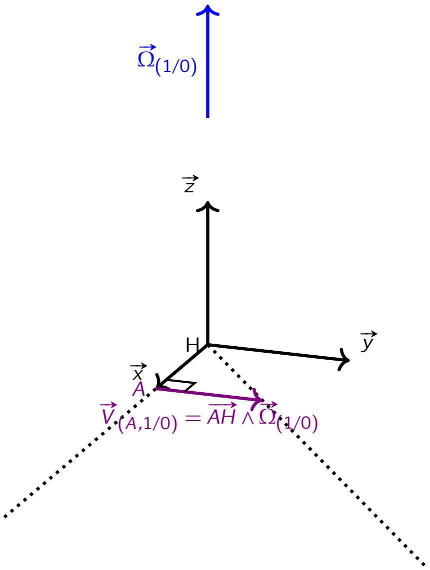
Rotation autour d'un axe fixe



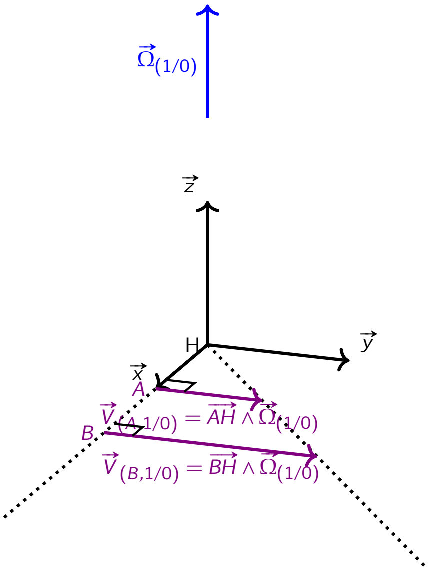
Rotation autour d'un axe fixe



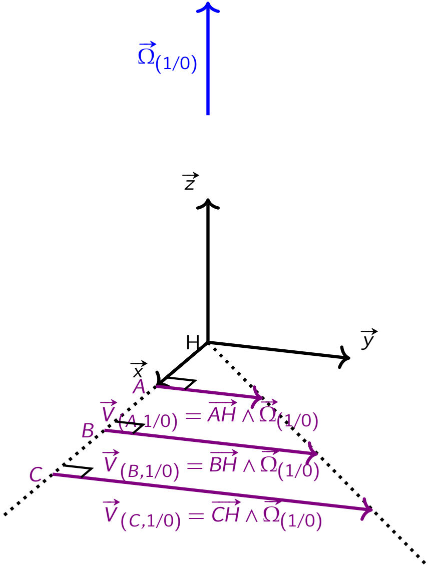
Rotation autour d'un axe fixe



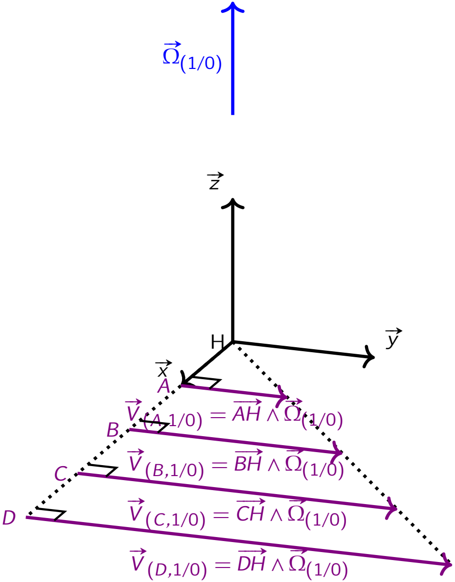
Rotation autour d'un axe fixe



Rotation autour d'un axe fixe



Rotation autour d'un axe fixe



Torseur cinématique

Le torseur cinématique associé à un solide en rotation autour d'un axe fixe est:

$$\boxed{\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}_0} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} \\ \vec{V}_{(M,S/\mathcal{B}_0)} = \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{B}_0)} \wedge \overrightarrow{HM} \end{array} \right\}}$$

REMARQUE : $\forall\ A \in \Delta$, l'axe de rotation, $\mathscr{V}_{S/\mathcal{R}_0} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_0)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$. Ce type de torseur est appelé glisseur.

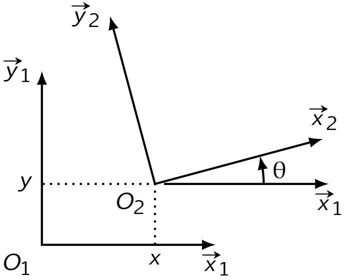
Sommaire

Définition : Mouvement plan

Le mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est dit plan s'il existe un plan (Π_2) lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan (Π_1) lié à S_1.

Il en résulte que le paramétrage de S_2 par rapport à S_1 ne nécessite que 3 paramètres: un angle et deux longueurs ou deux angles et une longueur.

$$\boxed{\mathscr{V}_{S_2/S_1} = {}_{O_2}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}.\vec{z}_1 \\ \dot{x}.\vec{x}_1 + \dot{y}.\vec{y}_1 \end{array} \right\}}$$



Le centre instantané de rotation (CIR)

DÉFINITION : Centre instantané de rotation

A un temps donné, le CIR est le point où la vitesse du torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1 est nulle

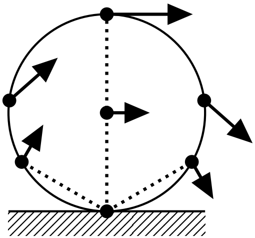
PROPRIÉTÉ : Le CIR (noté I) est le centre de rotation, à un temps donné.

DÉMONSTRATION :
$\forall A \neq I \quad \vec{V}_{(A,S_2/S_1)} = \vec{V}_{(I,S_2/S_1)} + \vec{AI} \wedge \dot{\theta}.\vec{z}_1 = \vec{AI} \wedge \dot{\theta}.\vec{z}_1$

Ce qui donne bien un champ de vitesse de type rotation autour de I.

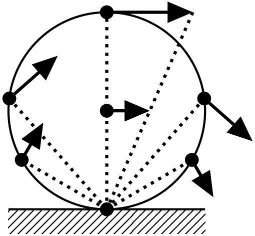
Remarque :

- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Le CIR n'est pas unique que si le solide est à l'équilibre.

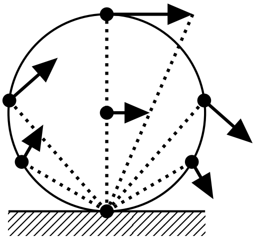


Remarque :

- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Le CIR n'est pas unique que si le solide est à l'équilibre.



REMARQUE :



- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Le CIR n'est pas unique que si le solide est à l'équilibre.

EXEMPLE :

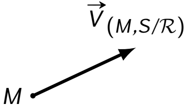
Pour la roue de voiture, comme il y a non glissement entre la roue et la route, la vitesse du point appartenant à la roue par rapport à la route est nulle. C'est le CIR entre la roue et la route. Le champ de vitesse de la roue est une rotation autour de I. Le centre de la roue va à la vitesse de la voiture. Le point supérieur de la roue va deux fois plus vite.

Représentation graphique du CIR

Problématique : Si on connaît I et $\dot{\theta}$, on a le champ des vitesses du solide. La connaissance du point I est précieuse, dans le cas de mouvement plan.

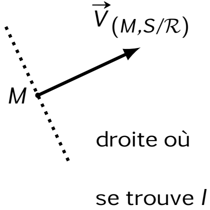
Lieux des CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$. Or $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{MI} \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{z}_1$. Donc I est sur la droite passant par M et perpendiculaire à $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$.



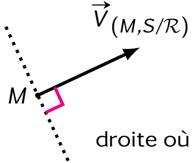
Lieux des CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$. Or $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{MI} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{z}_1$. Donc I est sur la droite passant par M et perpendiculaire à $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$.



Lieux des CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$. Or $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})} = \overrightarrow{MI} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{z}_1$. Donc I est sur la droite passant par M et perpendiculaire à $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$.



droite où

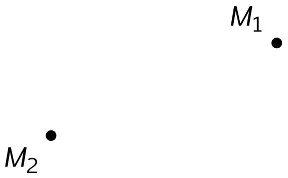
se trouve I

Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.

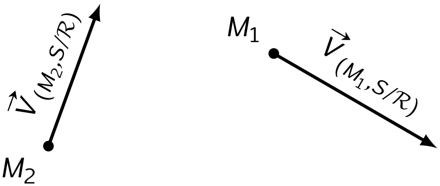
Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



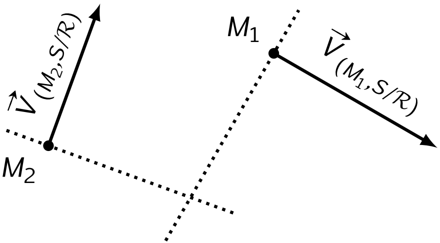
Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



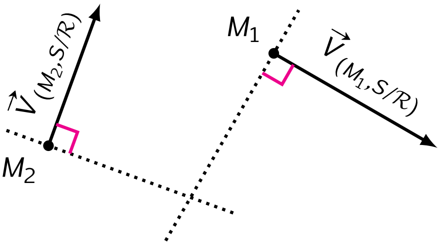
Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



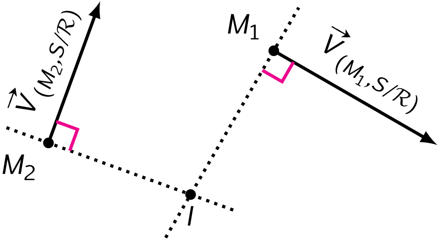
Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



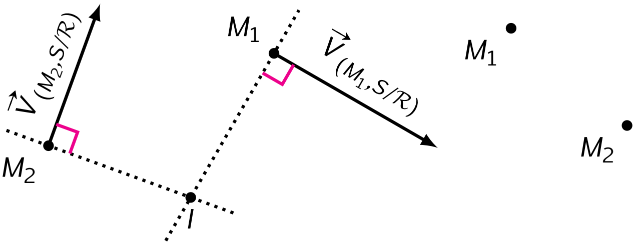
Lieu du CIR

On connaît $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



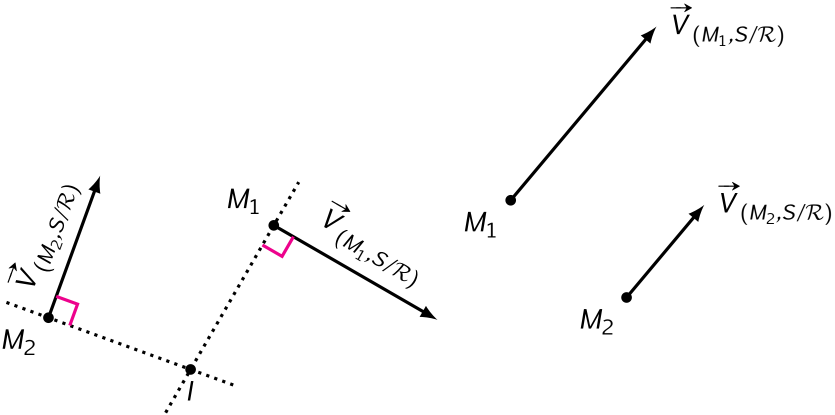
Lieu du CIR

On connaît $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



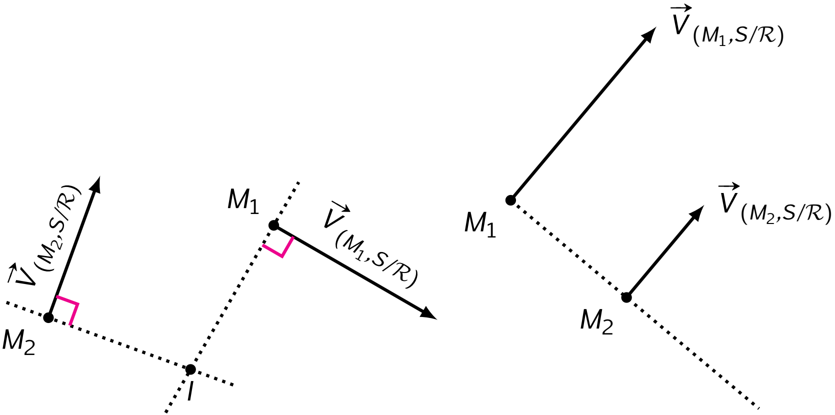
Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



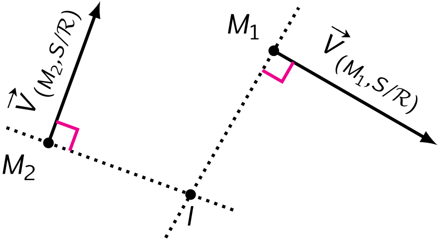
Lieu du CIR

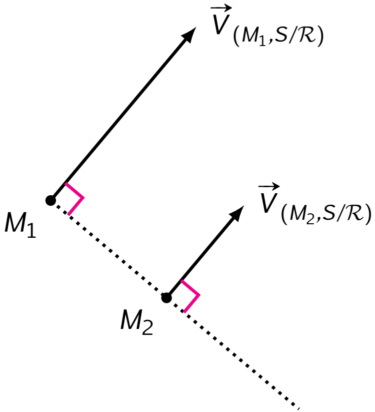
On connaît $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.



Lieu du CIR

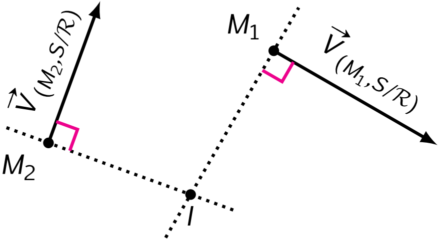
On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.

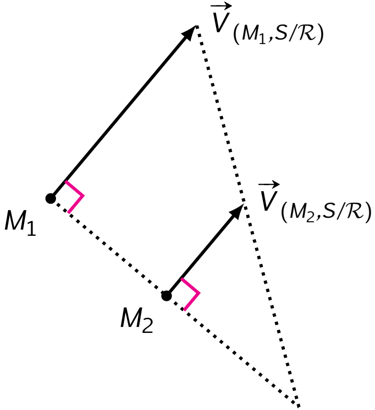




Lieu du CIR

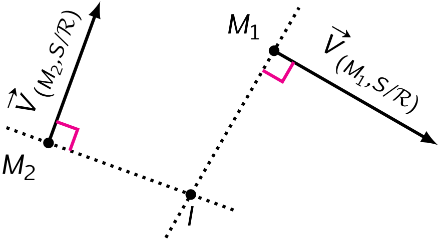
On connaît $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.

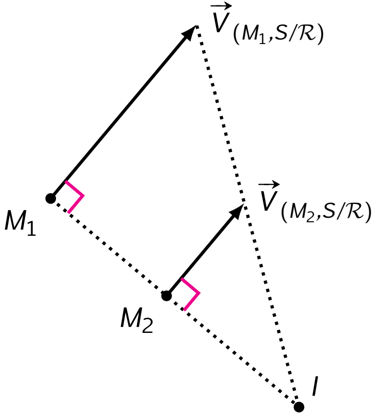




Lieu du CIR

On connaît $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$ et $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. Alors I se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires de ces vitesses.





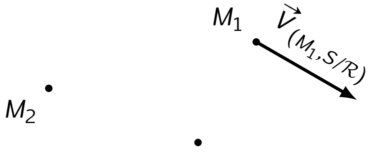
Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

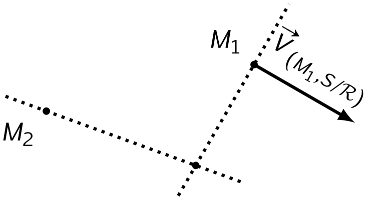
On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

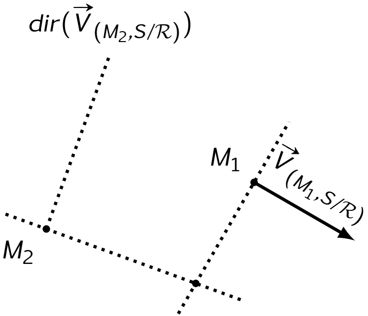
On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

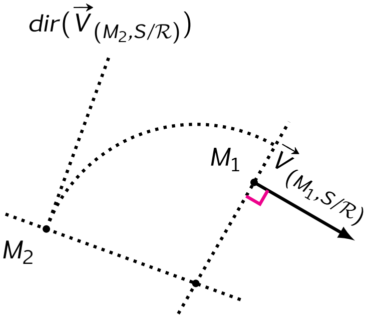
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

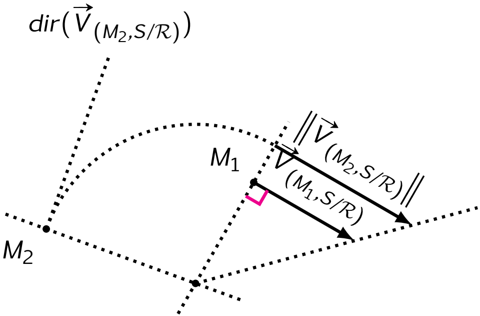
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

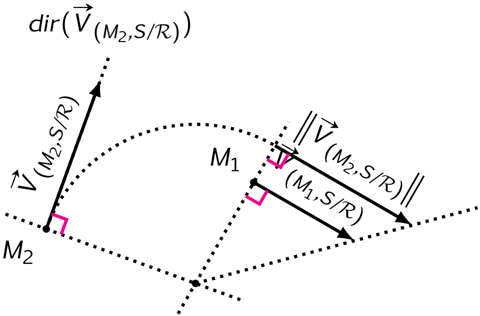
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

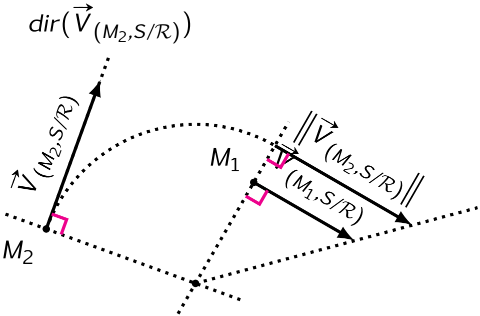
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

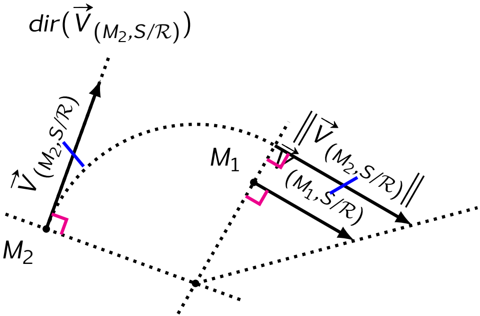
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

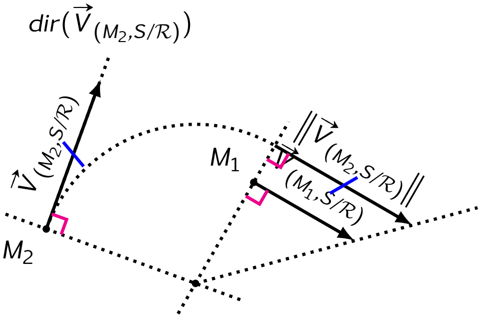
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

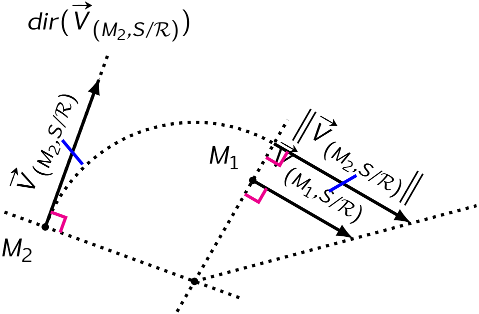
On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

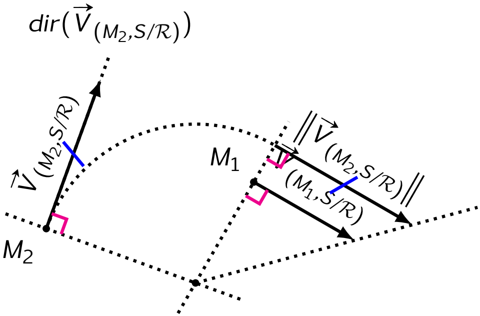


Mouvement de rotation instantané

Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

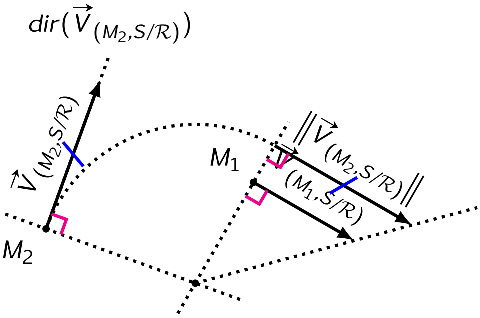


Mouvement de rotation instantané

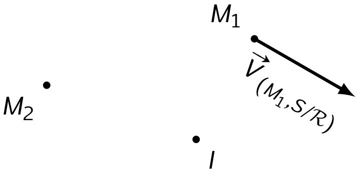
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



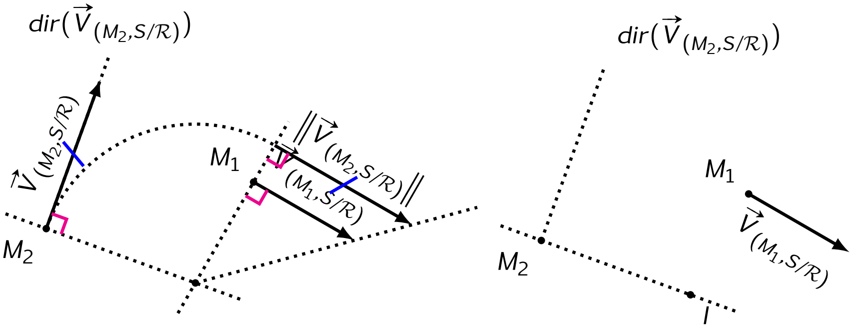
Mouvement de rotation instantané



Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

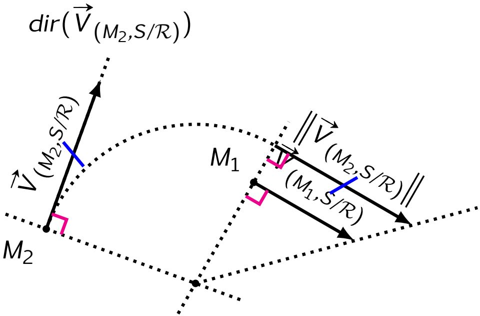


Mouvement de rotation instantané

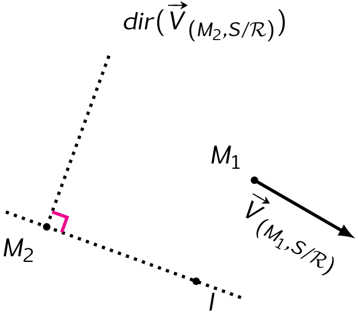
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



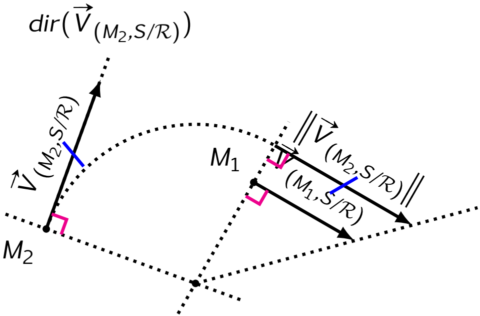
Mouvement de rotation instantané



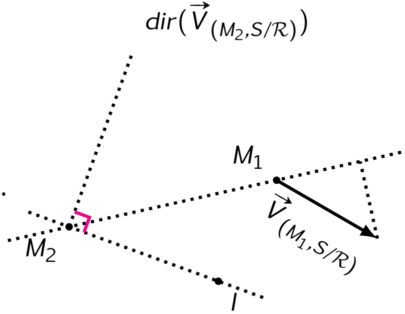
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



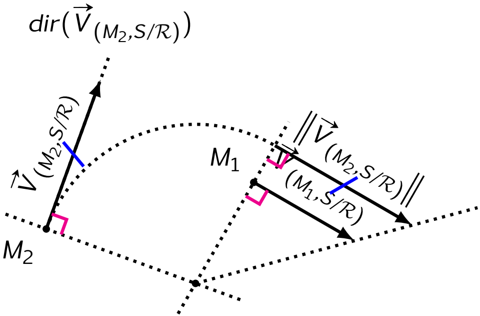
Mouvement de rotation instantané



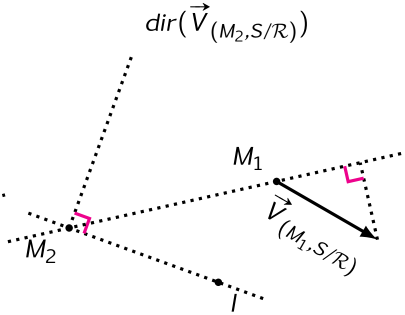
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



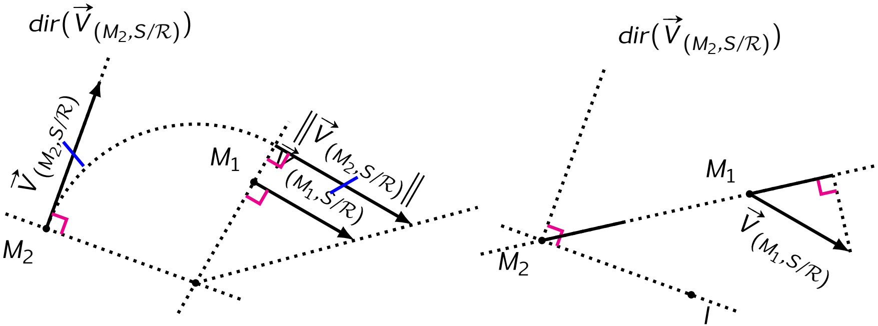
Mouvement de rotation instantané



Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

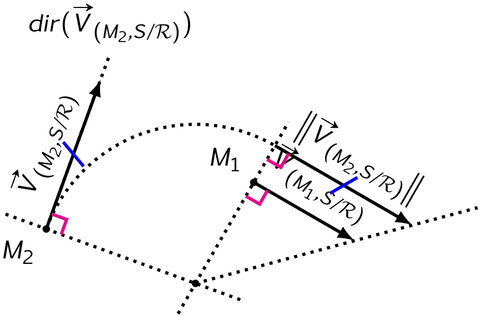


Mouvement de rotation instantané

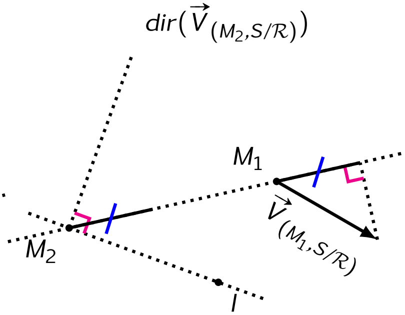
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



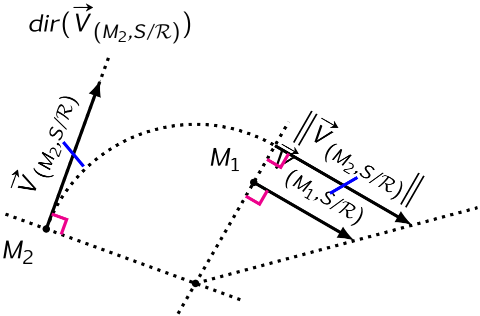
Mouvement de rotation instantané



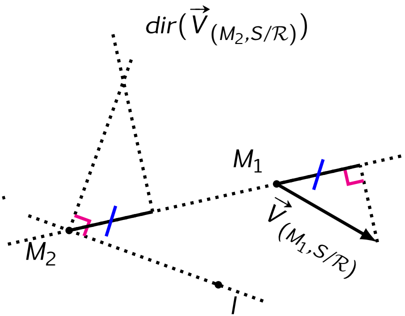
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



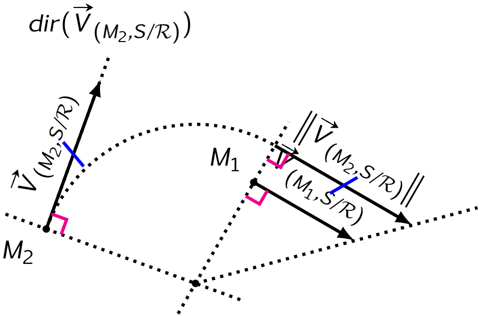
Mouvement de rotation instantané



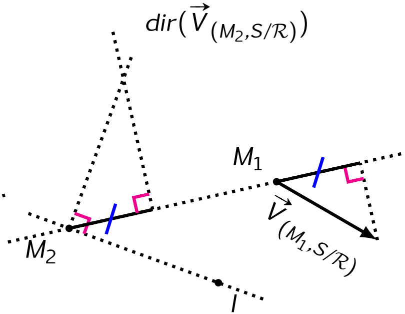
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\vec{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\vec{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.



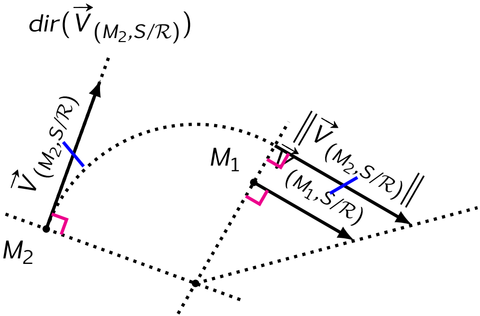
Mouvement de rotation instantané



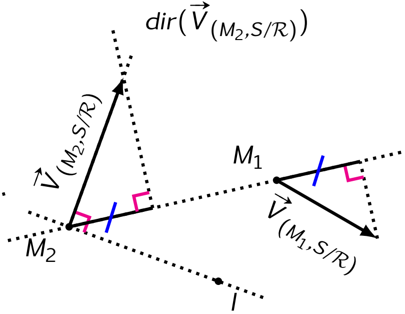
Equiprojectivité

Equiprojectivité et Thalès

On connaît I et $\overrightarrow{V}_{(M_1,S/\mathcal{R})}$. On cherche $\overrightarrow{V}_{(M_2,S/\mathcal{R})}$. On utilise soit la propriété des mouvements de rotation, soit l'équiprojectivité des vitesses.

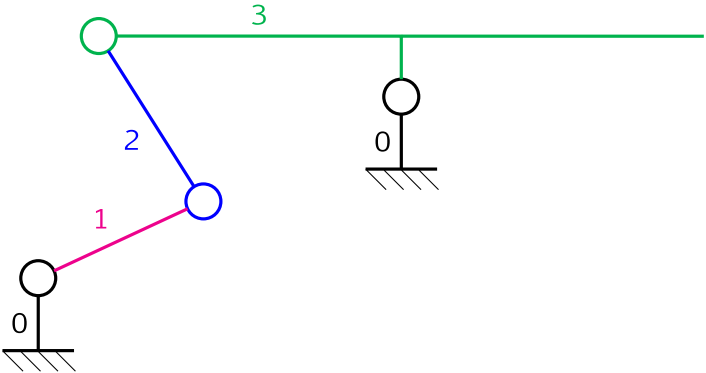


Mouvement de rotation instantané



Equiprojectivité

exemple



Base et roulante

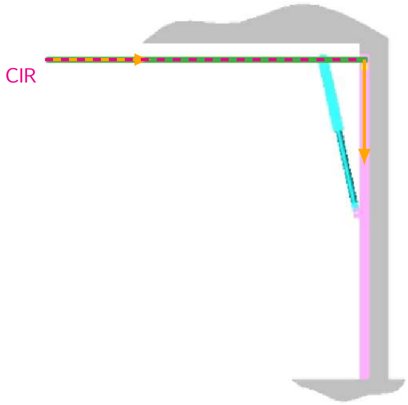
DÉFINITION : Base

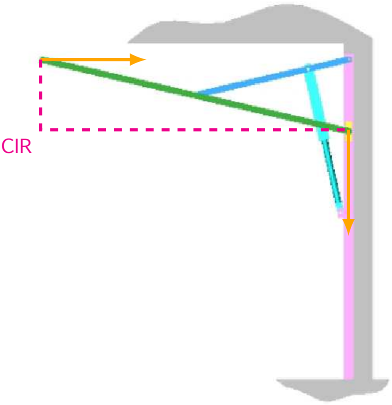
La base est la trajectoire du centre instantané de rotation I dans le repère fixe $\mathcal{R}_0$.

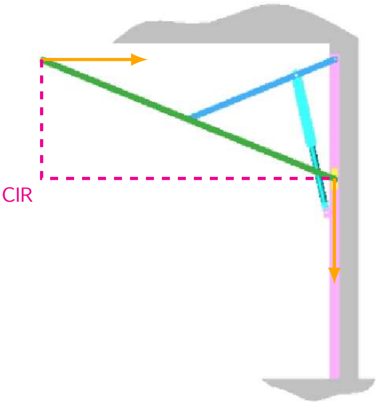
DÉFINITION : Roulante

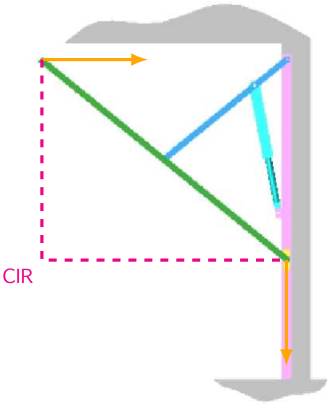
La roulante est la trajectoire du centre instantané de rotation I dans le repère mobile $\mathcal{R}_1$.

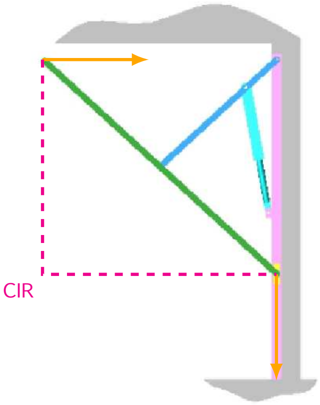
REMARQUE : La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

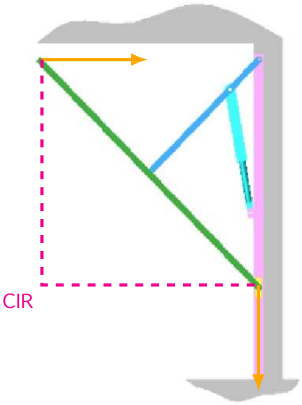

CIR

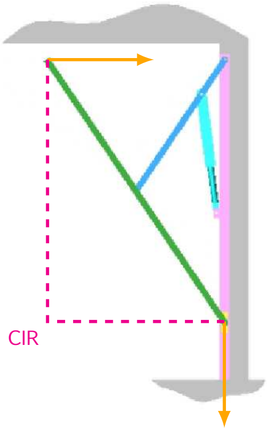

CIR

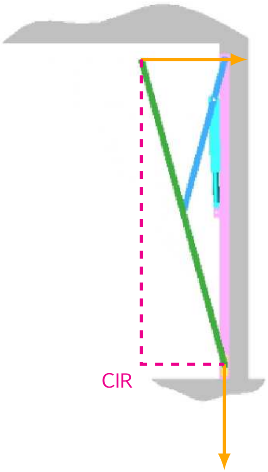

CIR

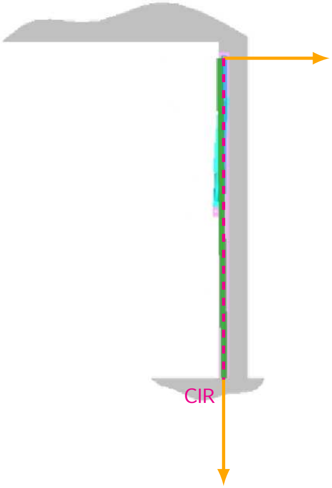

CIR

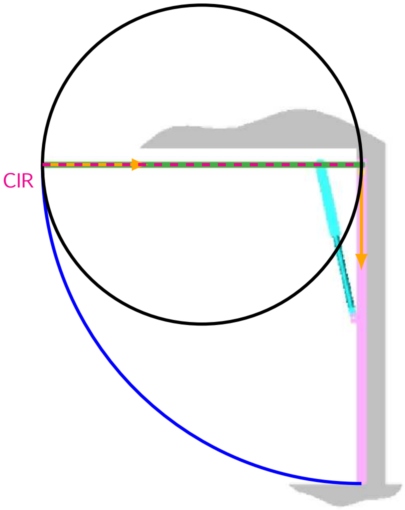

CIR

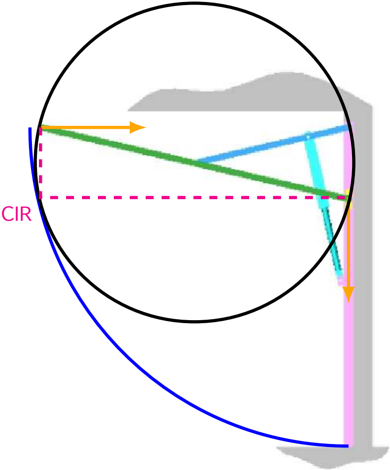

CIR

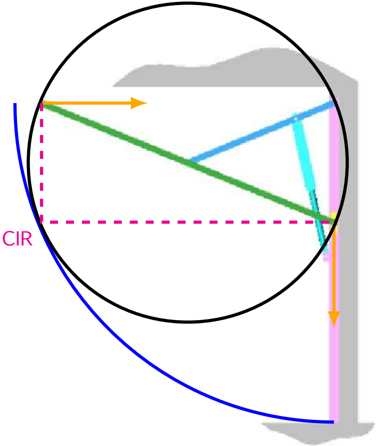

CIR

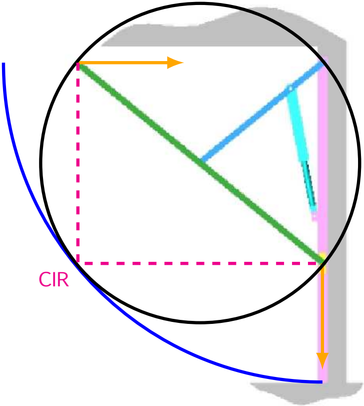

CIR

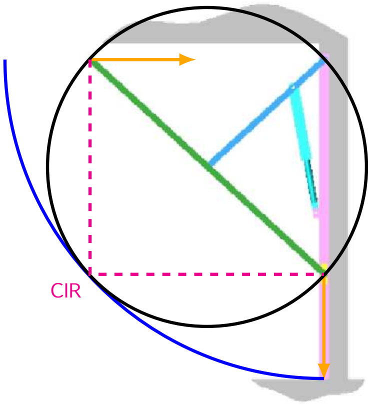

CIR

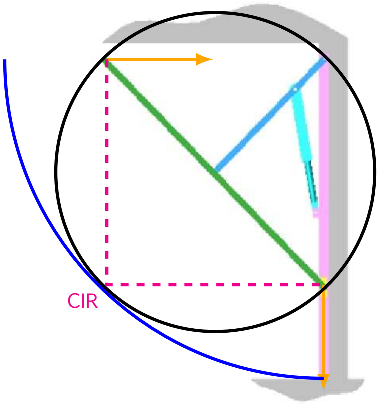

CIR

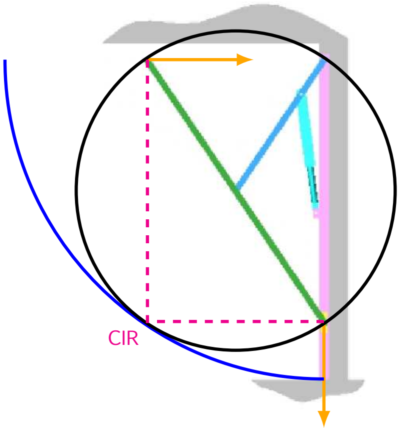

CIR

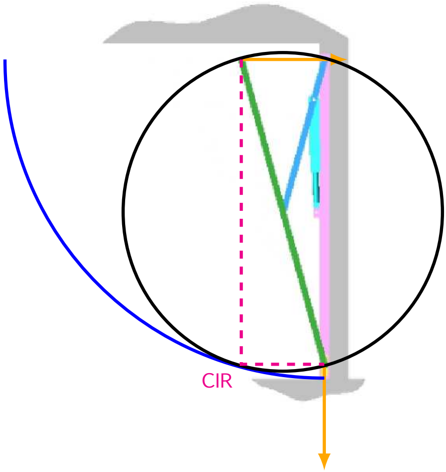

CIR

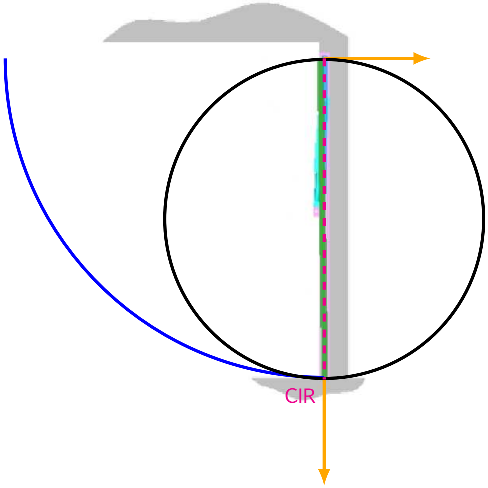

CIR


CIR


CIR


CIR


CIR


CIR

Théorème des 3 plans glissants

Propriété :

Soient 3 solides : S_1, S_2 et S_3 en mouvement plan (plan commun aux trois). Le mouvement de S_i par rapport à S_j est caractérisé par un CIR I_{ij}.

$\boxed{\text{Les CIR } I_{21}, I_{32} \text{ et } I_{13} \text{ sont alignés.}}$

Démonstration :

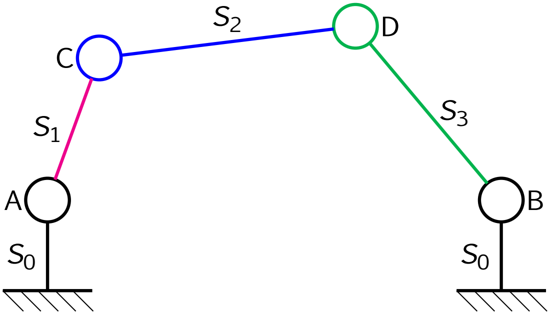
Chaque mouvement S_i/S_j est caractérisé par une vitesse de rotation ω_{ij}.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}_{(I_{21},S_2/S_1)} &= \overrightarrow{V}_{(I_{21},S_2/S_3)} + \overrightarrow{V}_{(I_{21},S_3/S_1)} \\
&= \overrightarrow{I_{21}I_{23}} \wedge \omega_{23}.\overrightarrow{z} + \overrightarrow{I_{21}I_{31}} \wedge \omega_{31}.\overrightarrow{z}.
\end{aligned}$$

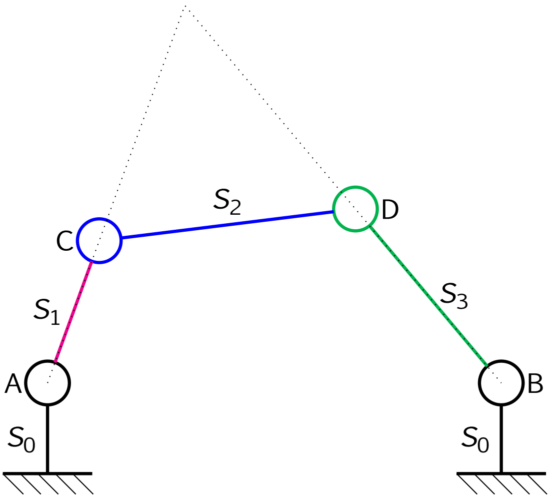
or $\overrightarrow{V}_{(I_{21},S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$, donc $\left[\omega_{23}.\overrightarrow{I_{21}I_{23}} + \omega_{31}.\overrightarrow{I_{21}I_{31}}\right] \wedge \overrightarrow{z} = 0$. D'où l'alignement des trois points.

Application

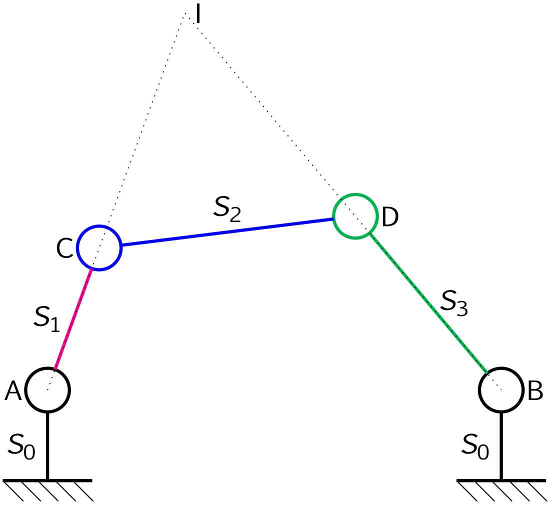
Les solides S_1 et S_3 sont en liaison pivot avec le bâti S_0. Le bielle S_2 est en liaison pivot avec S_1 et S_3. Les CIR $I_{10}, I_{30}, I_{21}, I_{32}$ sont donc facilement repérable. Ils correspondant aux différents centres des liaisons pivot. Le CIR I_{20} est aligné avec I_{10} et I_{21} d'une part, et I_{30} et I_{32} d'autre part. Une construction géométrique simple permet donc de trouver le CIR de S_2 par rapport à S_0



S_2
C
D
S_1
S_3
A
B
S_0
S_0



S_2
C
D
S_1
S_3
A
B
S_0
S_0


I
S_2
C
D
S_1
S_3
A
B
S_0
S_0