

CI-1 Prévoir, modifier et vérifier les performances des systèmes linéaires continus invariants.

CI-1-3 Réglage d'un correcteur PIDf

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2023 - 2024

Germain Gondor

Sommaire

1 Définition du problème

- Asservissement d'un système du second ordre
- Objectifs

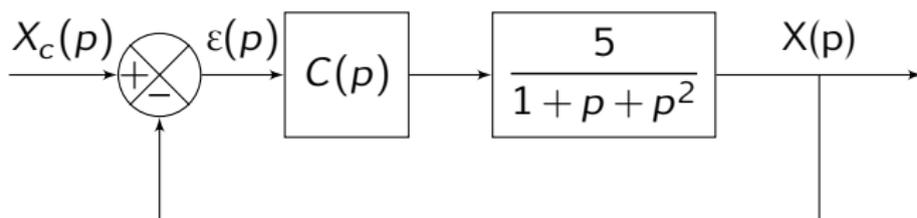
2 Correction proportionnelle

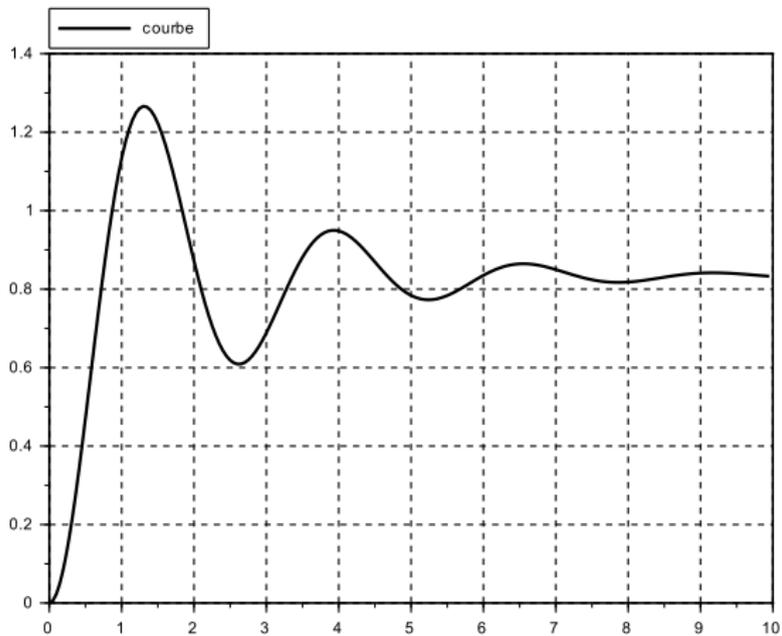
3 Correction proportionnelle intégrale

4 Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

Asservissement d'un système du second ordre

On considère la mise en position d'une buse d'imprimante dont la fonction de transfert en boucle ouverte est $H(p) = \frac{1}{1+p+p^2}$. On donne ci-dessous le schéma de l'asservissement :





Objectifs

La cahier des charges impose :

- une erreur statique en position nulle
- une erreur en vitesse inférieure à 10% pour une entrée en rampe
- marge de gain supérieure à 12 dB
- marge de phase supérieure à 45°
- pulsation de coupure à 0 dB pour $\omega = 40$ rad/s

Sommaire

- 1 Définition du problème
- 2 Correction proportionnelle
 - Stabilité
 - Précision
 - Marges
 - Dépassement et temps de réponse
- 3 Correction proportionnelle intégrale
- 4 Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

On choisit dans un premier temps un correcteur proportionnel $C(p) = K_p$.

La fonction de transfert en boucle $H_{BO}(p) = \frac{5.K_p}{p^2 + p + 1}$.

Stabilité

Le système est du second ordre avec K_p possible : il est donc intrinsèquement stable.

$$FTBF(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p + p + p^2}$$

Ainsi si $K_p < -0,2$ le système est instable.

Précision

La classe de la FTBO est nulle : l'erreur en position vaut donc

$$E_{rp} = \frac{E_0}{1 + 5.K_p} > 0.$$

Marges

La marge de Gain est infinie puisque la phase tend vers -180° quand ω tend vers $+\infty$. Or pour ω qui tend vers $+\infty$, le gain tend vers $-\infty$.

En revanche, pour la marge de phase, on peut régler la valeur. Par défaut, avec $K_p = 1$, on obtient :

$$G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0 \text{ dB} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{(1 - \omega_{0dB}^2)^2 + \omega_{0dB}^2}} = 1$$

Marges

La marge de Gain est infinie puisque la phase tend vers -180° quand ω tend vers $+\infty$. Or pour ω qui tend vers $+\infty$, le gain tend vers $-\infty$.

En revanche, pour la marge de phase, on peut régler la valeur. Par défaut, avec $K_p = 1$, on obtient :

$$G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0 \text{ dB} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{(1 - \omega_{0dB}^2)^2 + \omega_{0dB}^2}} = 1$$

$$\Rightarrow 5^2 = (1 - X)^2 + X \text{ avec } X = \omega_{0dB}^2$$

$$X^2 - X - 25 \Rightarrow X = \frac{1 + \sqrt{1 + 100}}{2} \Rightarrow \omega_{0dB} = 2,35 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } M_\varphi &= \varphi(\omega_{0dB}) + 180 \\ &= \cancel{\arg(5)} - \arg((1 - \omega_{0dB}^2) + j \cdot \omega_{0dB}) + 180 \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_{0dB}}{1 - \omega_{0dB}^2}\right) + 180 = 27,45^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } M_\varphi &= \varphi(\omega_{0dB}) + 180 \\ &= \cancel{\arg(5)} - \arg\left((1 - \omega_{0dB}^2) + j \cdot \omega_{0dB}\right) + 180 \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_{0dB}}{1 - \omega_{0dB}^2}\right) + 180 = 27,45^\circ \end{aligned}$$

Pour augmenter cette marge de phase, il suffit de diminuer K_p . Par exemple, pour obtenir une marge de phase de 90° . Il faut que $G_{dB}(\omega_0) = 0$ dB. Or ici, $\omega_0 = 1$ rad/s (et $\xi = 0,5$).

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } M_\varphi &= \varphi(\omega_{0dB}) + 180 \\ &= \cancel{\arg(5)} - \arg\left((1 - \omega_{0dB}^2) + j.\omega_{0dB}\right) + 180 \\ &= \arctan\left(\frac{\omega_{0dB}}{1 - \omega_{0dB}^2}\right) + 180 = 27,45^\circ\end{aligned}$$

Pour augmenter cette marge de phase, il suffit de diminuer K_p . Par exemple, pour obtenir une marge de phase de 90° . Il faut que $G_{dB}(\omega_0) = 0$ dB. Or ici, $\omega_0 = 1$ rad/s (et $\xi = 0,5$).

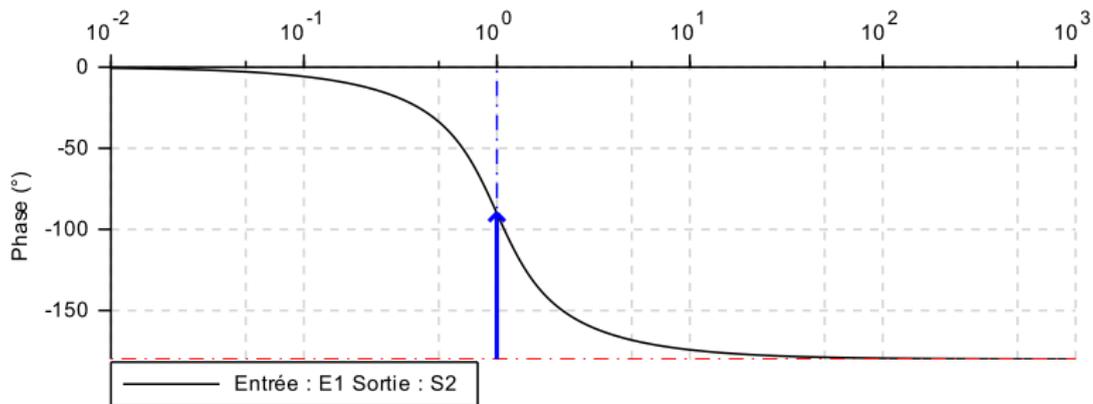
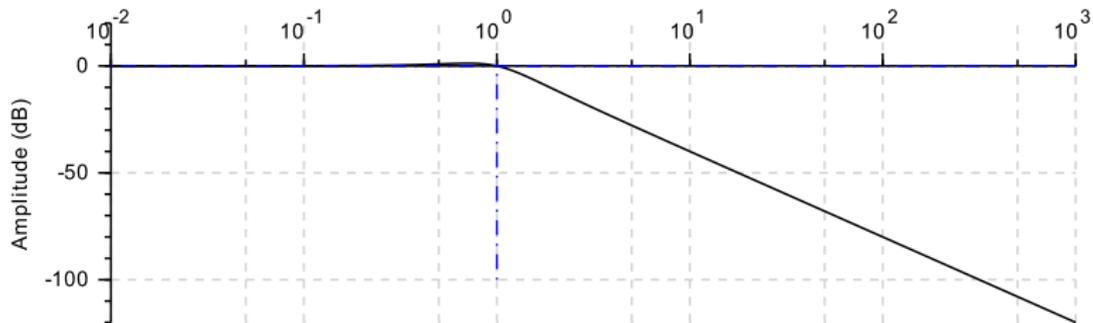
$$G_{dB}(\omega_0) = 0 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \frac{5.K_p}{\sqrt{(1 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2}} = 1$$

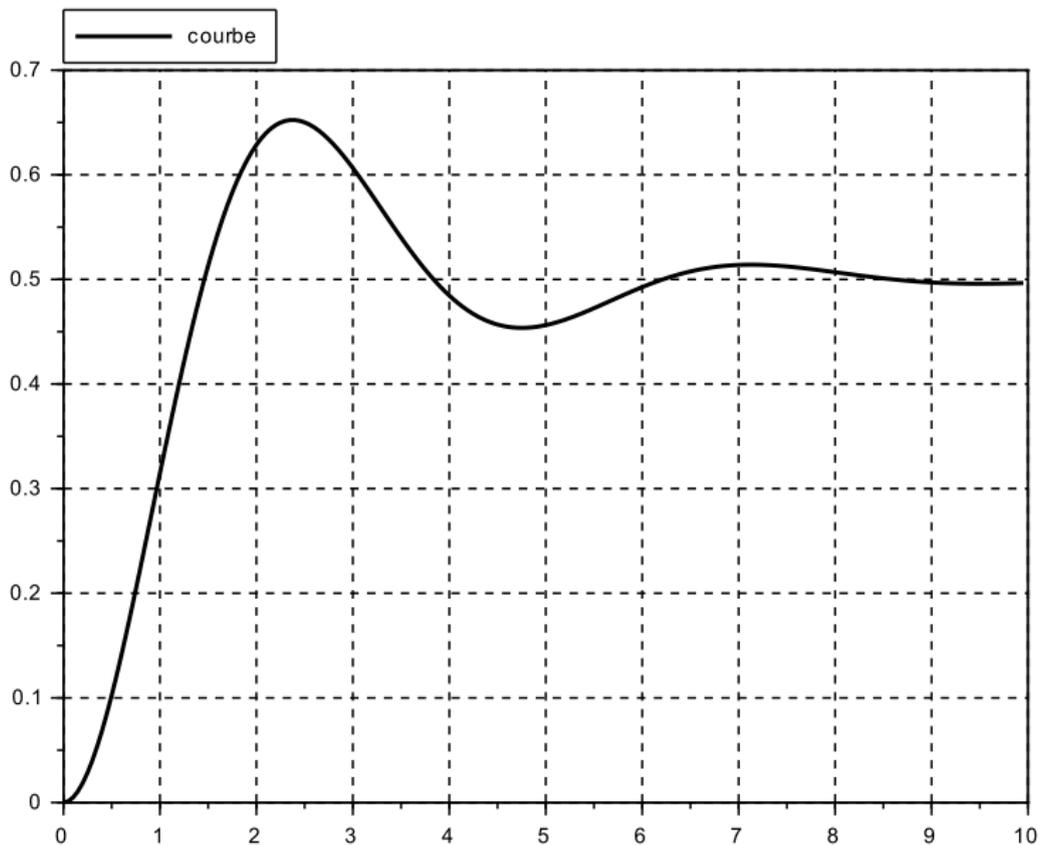
$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } M_\varphi &= \varphi(\omega_{0dB}) + 180 \\
 &= \cancel{\arg(5)} - \arg\left((1 - \omega_{0dB}^2) + j.\omega_{0dB}\right) + 180 \\
 &= \arctan\left(\frac{\omega_{0dB}}{1 - \omega_{0dB}^2}\right) + 180 = 27,45^\circ
 \end{aligned}$$

Pour augmenter cette marge de phase, il suffit de diminuer K_p . Par exemple, pour obtenir une marge de phase de 90° . Il faut que $G_{dB}(\omega_0) = 0$ dB. Or ici, $\omega_0 = 1$ rad/s (et $\xi = 0,5$).

$$G_{dB}(\omega_0) = 0 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \frac{5.K_p}{\sqrt{(1 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2}} = 1$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{1}{5.\sqrt{(1 - 1^2)^2 + 1}} = \frac{1}{5} = 0,2$$





Dépassement et temps de réponse

Le dépassement et le temps de réponse à 5% (voir Fig. 7) se calculent à partir de la FTBF(p) :

$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p + p + p^2} \\ &= \frac{\frac{5.K_p}{1 + 5.K_p}}{1 + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p^2} \end{aligned}$$

Dépassement et temps de réponse

Le dépassement et le temps de réponse à 5% (voir Fig. 7) se calculent à partir de la FTBF(p) :

$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p + p + p^2} \\ &= \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1 + 5.K_p} \quad \text{et} \quad \frac{2.\xi}{\omega_0} = \frac{1}{1 + 5.K_p}$$

Dépassement et temps de réponse

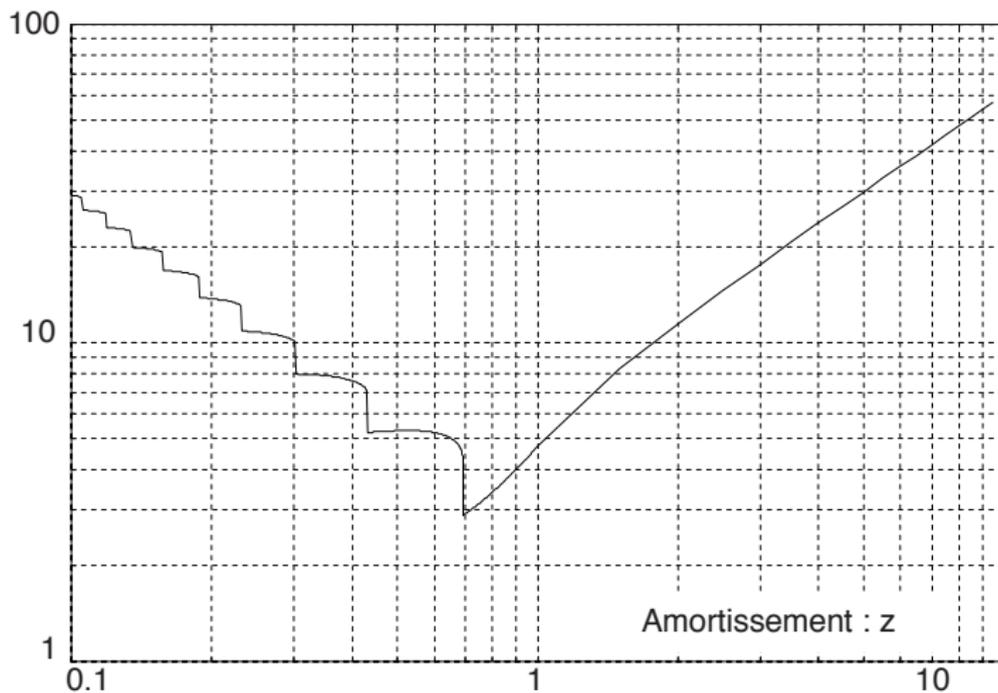
Le dépassement et le temps de réponse à 5% (voir Fig. 7) se calculent à partir de la FTBF(p) :

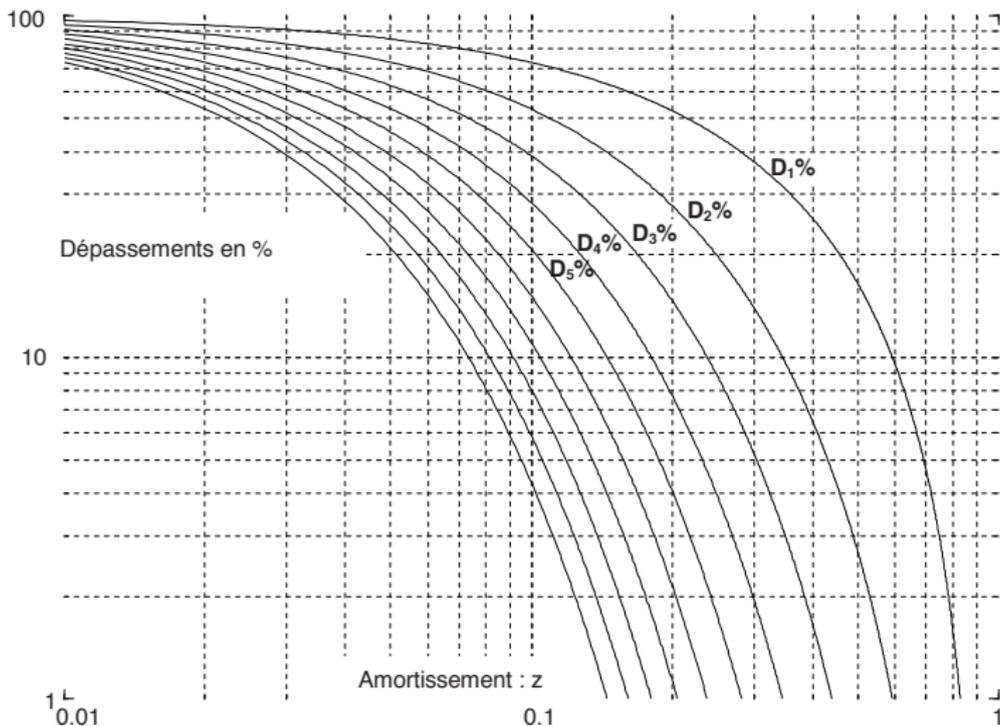
$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p + p + p^2} \\ &= \frac{5.K_p}{1 + 5.K_p} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p + \frac{1}{1 + 5.K_p} \cdot p^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1 + 5.K_p} \quad \text{et} \quad \frac{2.\xi}{\omega_0} = \frac{1}{1 + 5.K_p}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\omega_0}{2.(1 + 5.K_p)} = \frac{1}{2.\sqrt{1 + 5.K_p}} < \frac{1}{2}$$

Temps de réponse réduit : $T_{R5\%} \cdot \omega_0$



Dépassements relatifs d'un second ordre pseudo-périodique : $D_k\%$ 

Plus K_p augmente, plus la pulsation propre devient plus grande mais plus le système aura un grand dépassement.

Avec $K_p = 0,2$, on obtient $\xi \approx 0,35 \Rightarrow D_1 = 30\%$. Or ici le système tend vers $\frac{5.K_p}{1+5.K_p} = \frac{1}{1+1} = 0,5$ pour une entrée indicielle. Or aura donc un maximum de $0,5 \times 1,3 = 0,65$.

Le premier dépassement est obtenu pour $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}} = 2,37 \text{ s}$

Pour $\xi = 0,35$, le temps de réponse réduit t_{rr} vaut environ 7,8. On peut alors obtenir $t_{r5\%} = \frac{t_{rr}}{\omega_0} \approx 5,5 \text{ s}$.

Sommaire

- 1 Définition du problème
- 2 Correction proportionnelle
- 3 Correction proportionnelle intégrale**
 - Stabilité
 - Précision
- 4 Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

Correction proportionnelle intégrale

On choisit ici un correcteur proportionnel intégrale

$$C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$$

La fonction de transfert en boucle ouvert

$$H_{BO}(p) = \frac{5 \cdot K_p}{\tau_i} \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)} = K_i \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)}$$

Stabilité

Pour commence à discuter, il convient de connaître les valeurs de K_i qui permettent de conserver la stabilité.

$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{K_i \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)}}{1 + K_i \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)}} = \frac{K_i \cdot (1 + \tau_i \cdot p)}{K_i \cdot (1 + \tau_i \cdot p) + p \cdot (p^2 + p + 1)} \\ &= \frac{K_i \cdot (1 + \tau_i \cdot p)}{K_i + (K_i \cdot \tau_i + 1) \cdot p + p^2 + p^3} \end{aligned}$$

Si $K_i = 0$, alors on a 3 pôles nuls mais $K_i = 0$ est débile car la sortie est toujours nulle...

Le premier critère de Routh impose $K_i > 0$ et $K_i \cdot \tau_i > -1$. Examinons le deuxième critère :

1	$K_i \cdot \tau_i + 1$	0
1	K_i	0
X	0	0
K_i	0	0

avec
$$X = -\frac{1}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & K_i \cdot \tau_i + 1 \\ 1 & K_i \end{vmatrix}$$

Le premier critère de Routh impose $K_i > 0$ et $K_i \cdot \tau_i > -1$. Examinons le deuxième critère :

1	$K_i \cdot \tau_i + 1$	0
1	K_i	0
X	0	0
K_i	0	0

avec
$$X = -\frac{1}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & K_i \cdot \tau_i + 1 \\ 1 & K_i \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_i \cdot \tau_i + 1 - K_i > 0 &\Rightarrow K_i \cdot (1 - \tau_i) < 1 \\ &\Rightarrow \frac{5 \cdot K_p}{\tau_i} (1 - \tau_i) < 1 \end{aligned}$$

Comme $K_p > 0$, dès que $\tau_i > 1 = \frac{1}{\omega_0}$, le système est stable. Si on veut vraiment jouer sur la valeur de $\tau_i < 1$ de façon risquée, on obtient

$$K_p < \frac{\tau_i}{5 \cdot (1 - \tau_i)}.$$

Précision

On suppose ici le critère de stabilité vérifié

La FTBO est de classe 1 :

- l'erreur statique en position est nulle
- l'erreur statique en vitesse (ou erreur en poursuite) vaut

$$E_{rv} = \frac{V_0 \cdot \tau_i}{5 \cdot K_p}$$

Pour que le cahier des charge soit satisfait vis-à-vis de la précision, il faut que $\frac{\tau_i}{5 \cdot K_p} \leq 0,1 = 10\%$

Cependant, on raisonne plutôt en essayant de placer τ_i bien avant la pulsation critique. Or ici, le dénominateur de la FTBO(p) est composé d'un intégrateur pur (-90° de déphasage) et d'un second (-90° de déphasage en sa pulsation propre).

La pulsation propre $\omega_0 = 1$ rad/s du liée à la FTBO conduit à une phase à -180° ($\varphi(\omega_0) = -180^\circ$).

Reste alors à caler τ_i pour que le déphase lié au correcteur intégrale soit négligeable en ω_0 . On adopte souvent un décalage d'une décade,

$$\text{soit } \tau_i = \frac{10}{\omega_0} = 10 \text{ s.}$$

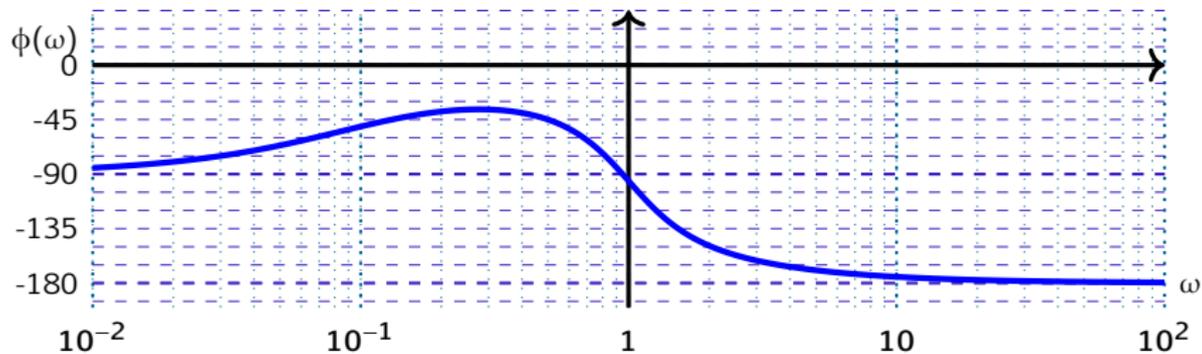
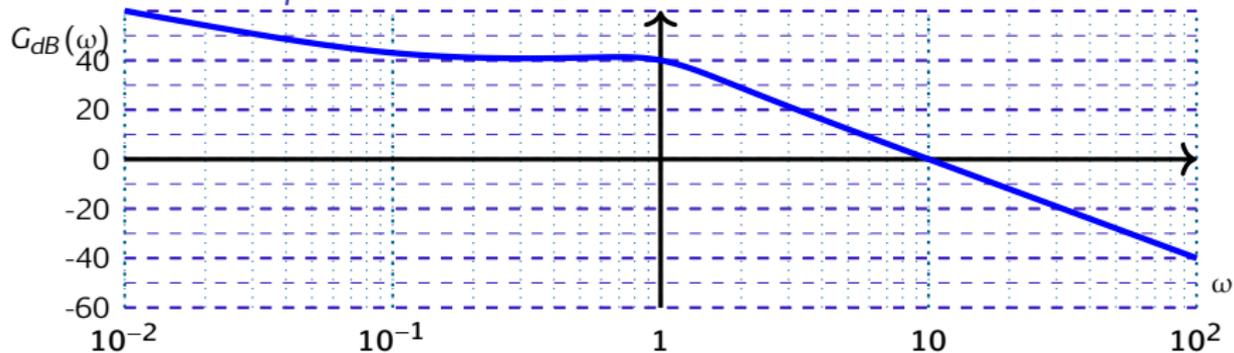
Avec cette valeur de τ_i , on peut déterminer les valeurs de K_p qui permettent de vérifier :

- la stabilité : $\tau_i = 10 > \frac{1}{\omega_0}$ c'est stable !
- la précision : classe 1, erreur statique de position nulle et erreur statique en vitesse inférieur à 10% impose :

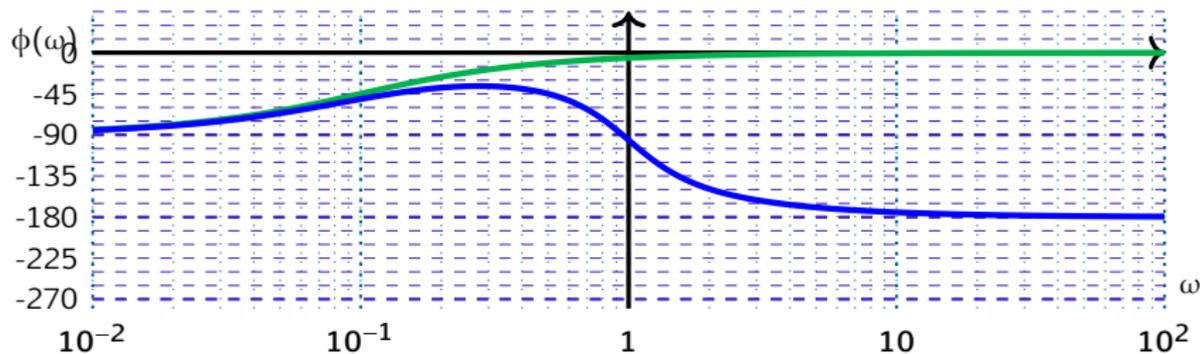
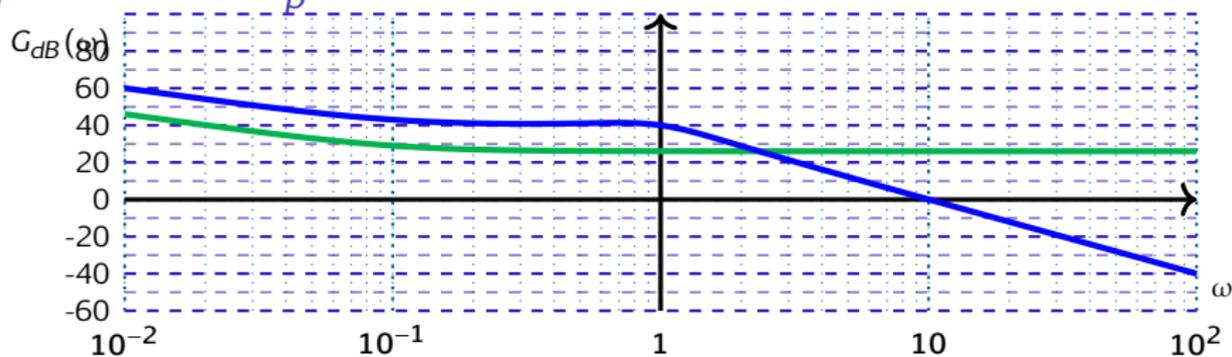
$$K_p \geq \frac{\tau_i}{5 \times 0,1} = \frac{10}{5 \times 0,1} = 20$$

La Fig. 1 donne le diagramme de Bode de FTBO corrigée avec $\tau_i = 10$ s et $K_p = 20$.

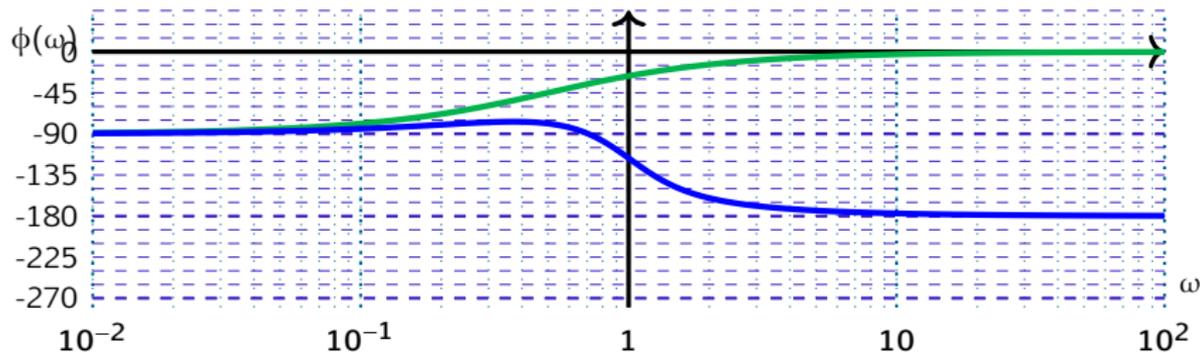
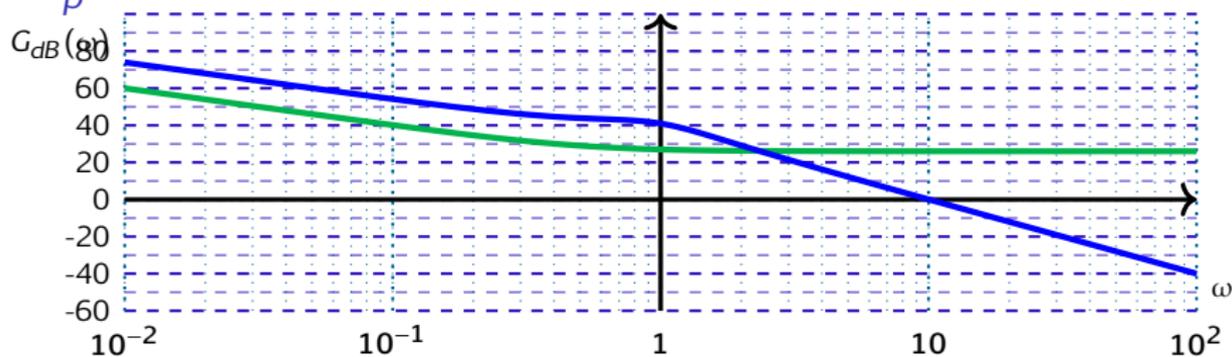
Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec $\tau_i = 10$ s et $K_p = 20$.



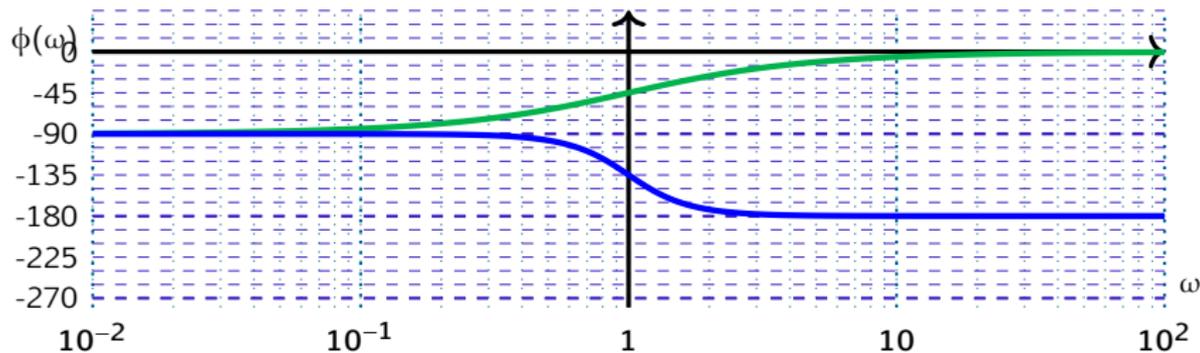
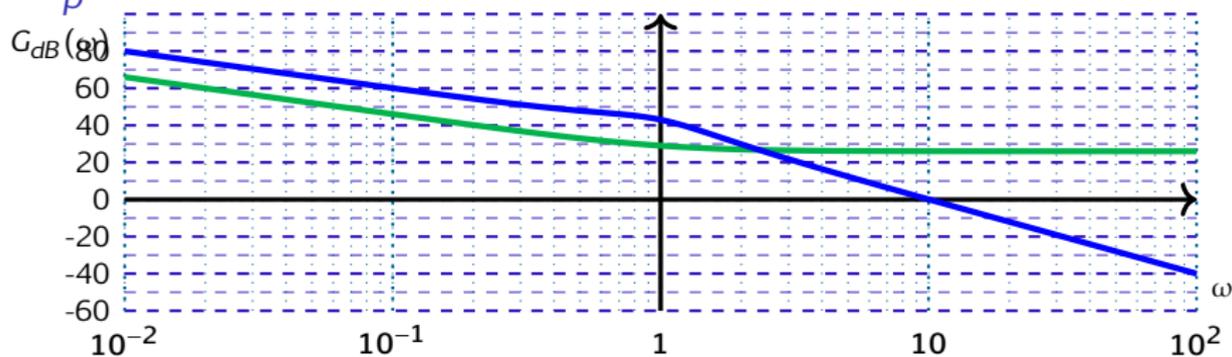
Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec $\tau_i = 10$ s et $K_p = 20$.



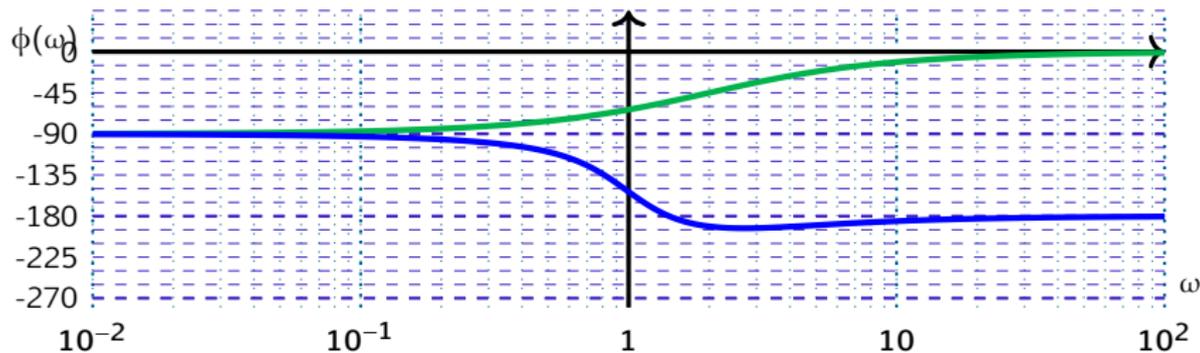
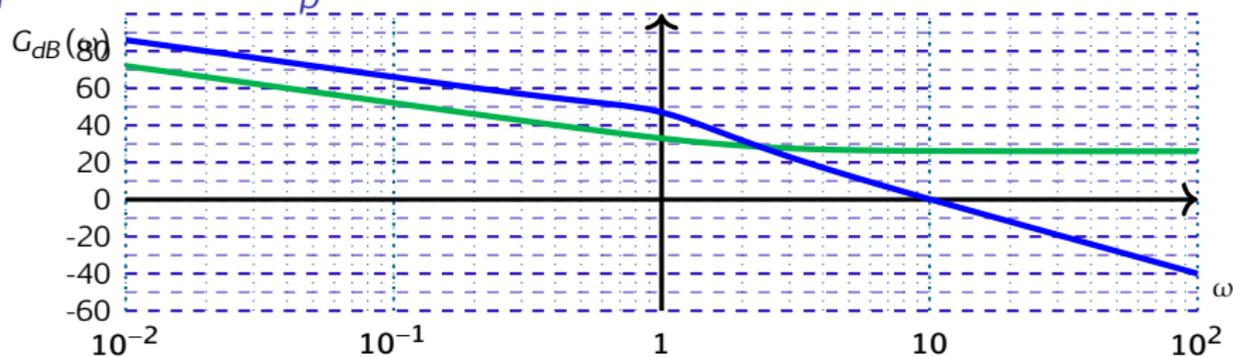
Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec $\tau_i = 2$ s et $K_p = 20$.



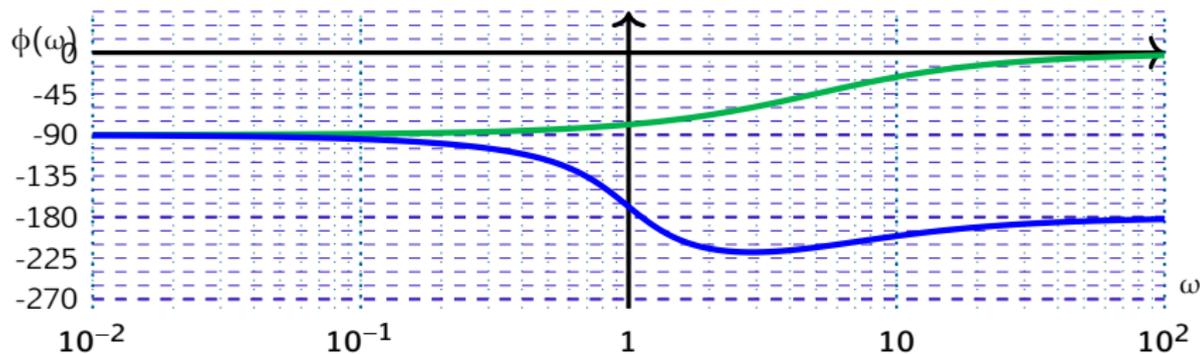
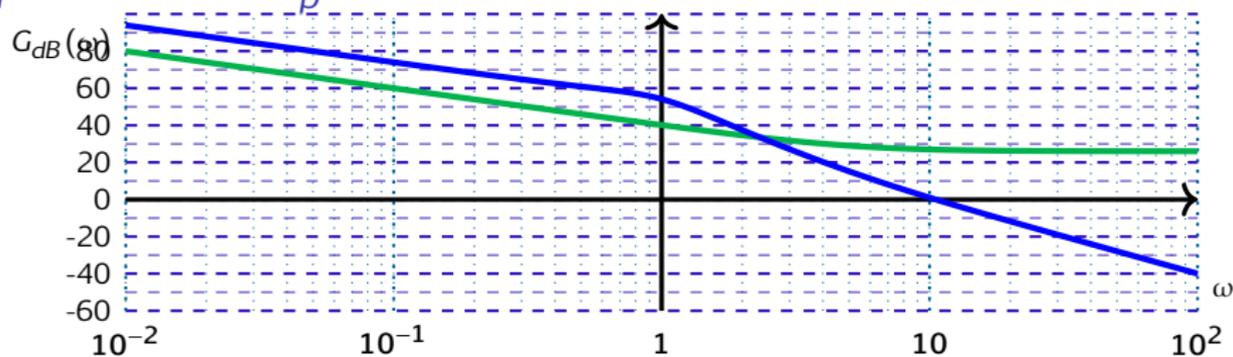
Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec $\tau_i = 1$ s et $K_p = 20$.



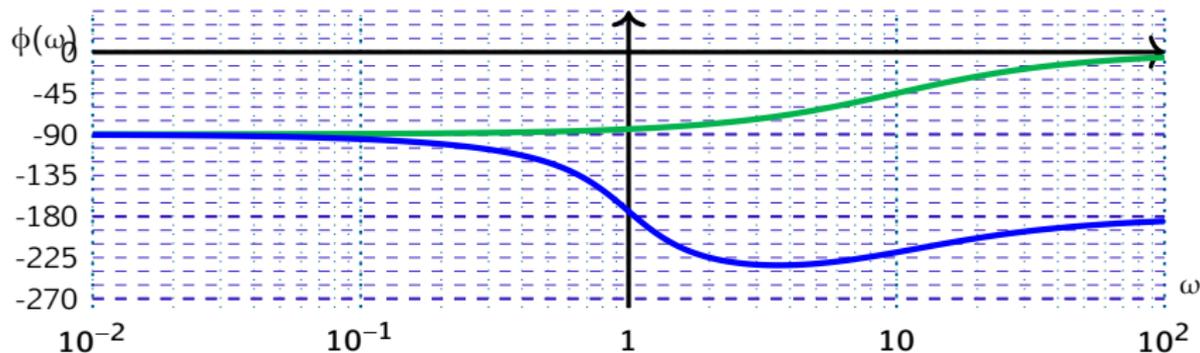
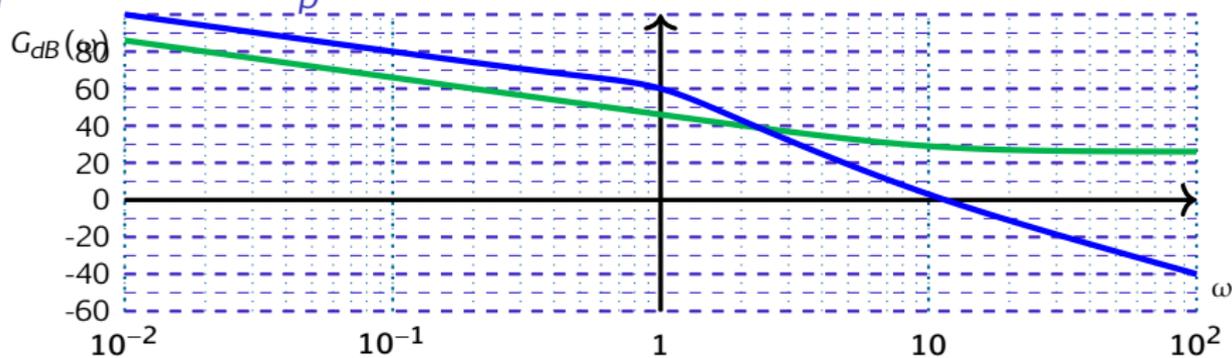
Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec

 $\tau_i = 0.5 \text{ s}$ et $K_p = 20$.

Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec

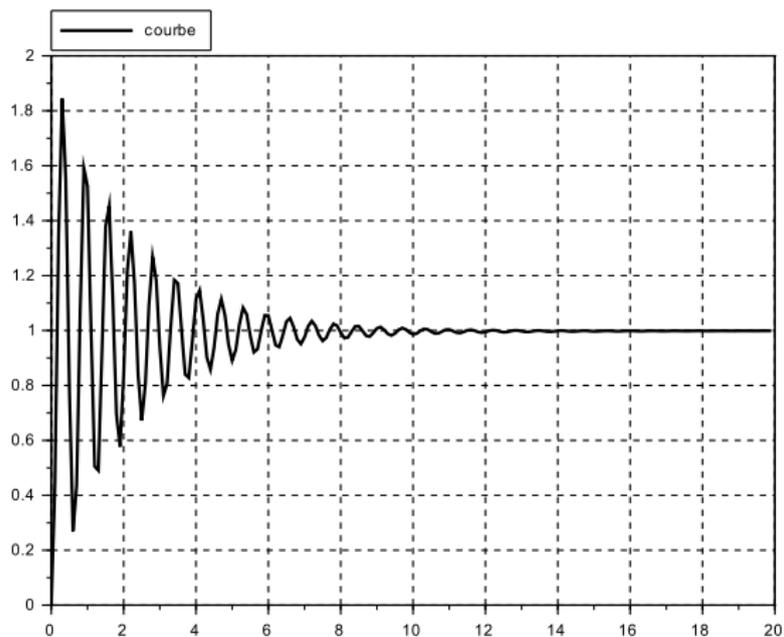
 $\tau_i = 0.2 \text{ s}$ et $K_p = 20$.

Réglage du correcteur PI : FTBO corrigée avec

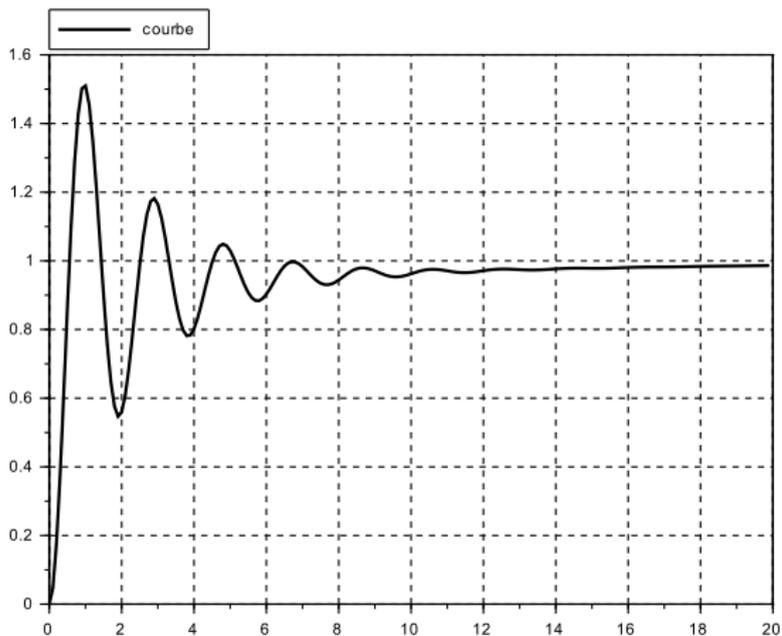
 $\tau_i = 0.1 \text{ s}$ et $K_p = 20$.

On constate que la marge de phase est ridicule. La réponse temporelle fait peur avec $K_p = 20$ (voir Fig. 2).

Réponse indicielle avec $\tau_i = 10$ s et $K_p = 20$.



Réponse indicielle avec $\tau_i = 10$ s et $K_p = 2$.



Sommaire

- 1 Définition du problème
- 2 Correction proportionnelle
- 3 Correction proportionnelle intégrale
- 4 Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée**
 - Stabilité
 - Précision
 - Marges
 - Réponses temporelle et fréquentielle

Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

Au correcteur précédent, on ajoute un correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p} \text{ avec } \alpha > 1$$

Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

Au correcteur précédent, on ajoute un correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p} \text{ avec } \alpha > 1$$

$$\Rightarrow H_{BO}(p) = \frac{5 \cdot K_p}{\tau_i} \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

Correction proportionnelle intégrale dérivée filtrée

Au correcteur précédent, on ajoute un correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p} \text{ avec } \alpha > 1$$

$$\Rightarrow H_{BO}(p) = \frac{5 \cdot K_p}{\tau_i} \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{p \cdot (p^2 + p + 1)} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

On conserve le réglage précédent du correcteur PI : $K_p = 20$ et $\tau_i = 10$ s.

Stabilité

Ayant choisi $\tau_i > \frac{1}{\omega_0}$, le système précédent était stable. Comme la correcteur à avance de phase ne fait qu'ajouter de la phase, le système reste stable.

Précision

La classe du correcteur à avance de phase est nulle et son gain statique vaut 1. Ainsi, la précision n'est pas modifiée et les réglages précédents sont satisfaisants.

Marges

La marge de gain est infinie puisque la phase ne descend pas en dessous de -180° .

Concernant la marge de phase, il semble qu'avec le réglage du correcteur PI, le gain s'annule aux alentours de 10 rad/s.

Si on veut une marge de phase de 45° à 40 rad/s , il faut ajouter quasiment 45° quand $\omega = 40 \text{ rad/s}$. Or le correcteur à avance de phase donne :

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right) \text{ ou bien } \sin(\varphi_{max}) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

Si on veut une marge de phase de 45° à 40 rad/s , il faut ajouter quasiment 45° quand $\omega = 40 \text{ rad/s}$. Or le correcteur à avance de phase donne :

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right) \text{ ou bien } \sin(\varphi_{max}) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\text{soit } \alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_{max})}{1 - \sin(\varphi_{max})} \text{ en } \omega_{max} = \frac{1}{\tau_d \cdot \sqrt{\alpha}}$$

Dans le cas présent, on en déduit que :

$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 5,8$$

Dans le cas présent, on en déduit que :

$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 5,8$$

$$\Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\omega_{max} \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{40 \times \sqrt{5,8}} = 0,01 \text{ s}$$

Dans le cas présent, on en déduit que :

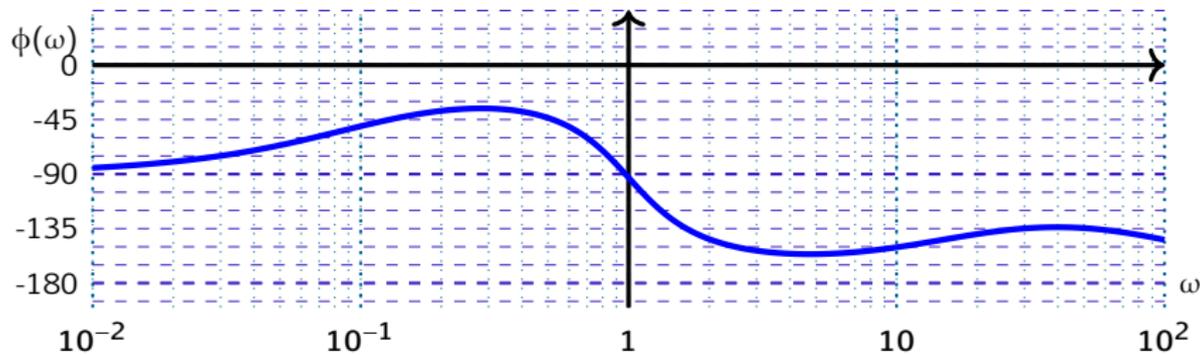
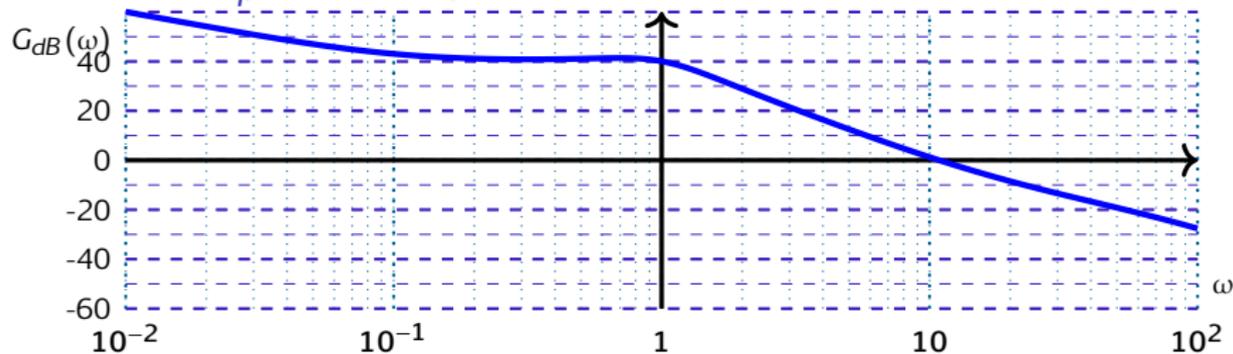
$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 5,8$$

$$\Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\omega_{max} \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{40 \times \sqrt{5,8}} = 0,01 \text{ s}$$

Reste alors à remonter le gain pour obtenir $\omega_{0dB} = 40 \text{ rad/s}$. La Fig. 4 nous invite à augmenter le gain d'environ 18 dB.

$$20 \cdot \log(K_p) = 20 \cdot \log(20) + 18 \quad \Rightarrow \quad K_p = 10^{\log(20) + \frac{18}{20}} \approx 158$$

Réglage du correcteur PIDf : FTBO corrigée avec $\tau_i = 10$ s, $K_p = 20$, $\tau_d = 0,01$ s et $\alpha = 5,8$.

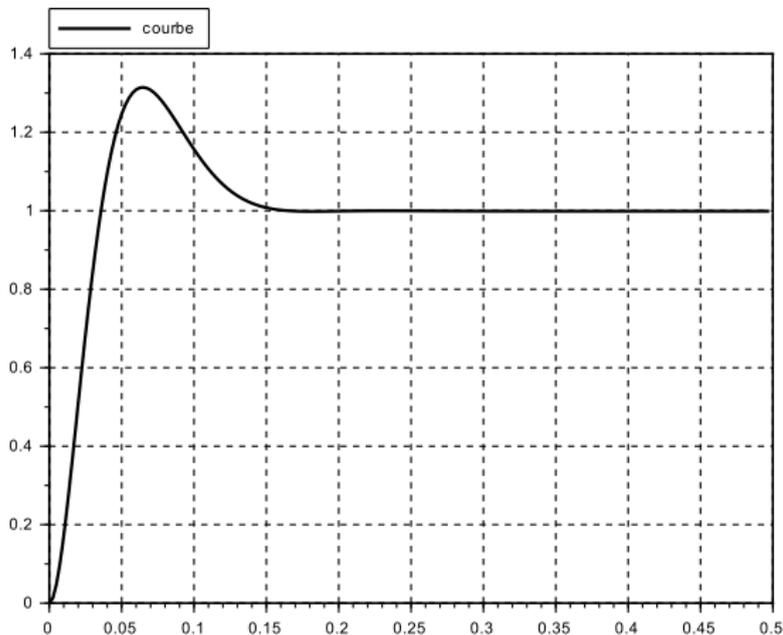


Réponses temporelle et fréquentielle

Avec les réglages précédents, la Fig. 5 nous présente la réponse temporelle du système corrigé. On s'aperçoit que le système est devenu très rapide.

La Fig. 6 nous présente la réponse fréquentielle du système validant le critère de pulsation de coupure, de marge de phase et de marge de gain.

Réponse indicielle du système corrigé avec le correcteur PIDf



Diagrammes de Bode du système corrigé avec le correcteur PIDf

