

CI-3 : Prévoir et vérifier les performances dynamiques et énergétiques des systèmes.

CI-3-1 Établir les équations dynamiques et énergétiques

LYCÉE CARNOT - DIJON, 2024 - 2025

Germain Gondor

Sommaire

1 Cinétique

- Masses et centre de masse
- Théorèmes de Guldin
- Opérateur d'inertie d'un solide S
- Torseur cinétique
- Torseur dynamique
- Énergie cinétique
- Éléments cinétiques d'un ensemble

2 Puissance

3 Principe fondamental de la dynamique

4 Notion de rendement

5 Équilibrage dynamique

Masses et centre de masse

DÉFINITION : Point matériel

|| *Un point matériel M est un point de l'espace euclidien affecté d'une masse m*

Masse d'un système matériel linéique Γ

La masse m d'un système matériel linéique Γ est

$$m = \int_{\Gamma} \mu(M).dl$$

avec dl , l'abscisse curviligne élémentaire en M et $\mu(M)$, la masse linéique en M . Le centre de gravité G est défini par

$$m\vec{AG} = \int_{\Gamma} \mu(M).\vec{AM}.dl$$

Masse d'un système matériel surfacique $\mathcal{A}$

La masse m d'un système matériel surfacique $\mathcal{A}$ est

$$m = \iint_{\mathcal{A}} \mu_S(M).dS$$

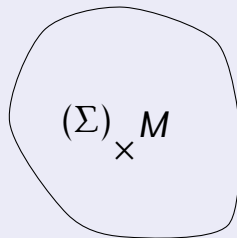
avec dS , la surface élémentaire en M et $\mu_S(M)$, la masse surfacique en M . Le centre de gravité G est défini par

$$m.\vec{AG} = \iint_{\mathcal{A}} \mu_S(M).\vec{AM}.dS$$

Masse d'un système matériel volumique Σ

$$m_{\Sigma} = \iiint_{M \in \Sigma} \rho(M).dV$$

avec dV , le volume élémentaire en M et $\rho(M)$, la masse volumique en M



Centre de gravité (de masse, d'inertie)

Le centre de gravité G est défini par

$$\iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$$

ainsi

$$\iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0} \Rightarrow m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{OG} = \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM}.dm$$

DÉMONSTRATION : $\iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0} \Leftrightarrow \iiint_{M \in \Sigma} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}).dm = 0$

$$\begin{aligned} \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OG} \rho(M) dV &= \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM}.dm \\ \left(\iiint_{M \in \Sigma} \rho(M) dV \right) \overrightarrow{OG} &= \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM}.dm \\ m_{\Sigma} \overrightarrow{OG} &= \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM}.dm \end{aligned}$$

REMARQUE : si Σ est un solide indéformable S , alors G est fixe dans tout repère lié à S .

Principe de conservation de la masse

Σ est à masse conservative $\Leftrightarrow \forall t_1$ et $\forall t_2, m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2)$.

Conséquence: soient E un ensemble matériel **fermé** en mouvement par rapport à un repère R et $\vec{f}(M, t)$ un champ de vecteurs défini en tout point M de Σ , continûment différentiable par rapport à t (vitesse, accélération...), le principe de conservation de la masse permet d'écrire:

$$\left[\frac{d}{dt} \iiint_{M \in \Sigma} \vec{f}(M, t) \cdot dm \right]_R = \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \vec{f}(M, t) \right]_R \cdot dm$$

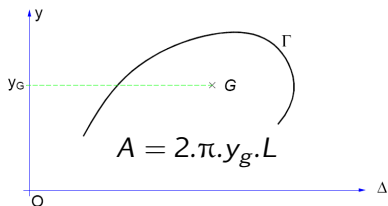
Théorèmes de Guldin

Premier théorème

Supposons données, dans un plan de l'espace affine euclidien, une courbe paramétrée Γ et une droite Δ qui ne se coupent pas.

THÉORÈME

L'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Δ est égale au produit de la longueur L de la courbe Γ et de la longueur du cercle engendré par la rotation autour de Δ du centre d'inertie G de la courbe Γ .



Premier théorème de Guldin

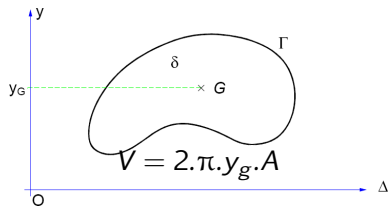
Théorèmes de Guldin

Second théorème

Supposons donnés, dans un plan de l'espace affine euclidien, un domaine δ limité par une courbe paramétrée fermée Γ et une droite Δ qui ne coupe pas le domaine.

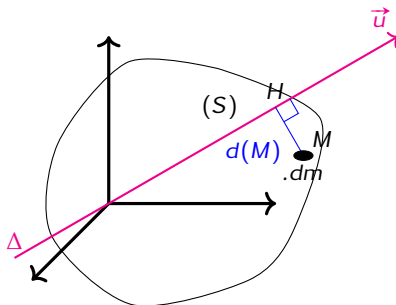
THÉORÈME

Le volume V du domaine tridimensionnel de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de δ est égal au produit de l'aire A du domaine plan δ et de la longueur du cercle engendré par la rotation autour de Δ du centre d'inertie G du domaine plan δ .



Deuxième théorème de Guldin

Moments d'inertie d'un solide S



- par rapport à un axe Δ

H = projection orthogonale de $M \in S$ sur $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I(S, \Delta) = \iiint_{M \in S} \overrightarrow{MH}^2 \cdot dm = \iiint_{M \in S} d(M)^2 \cdot dm = I_{O\vec{u}}(S)$$

d = distance de M à l'axe Δ . L'unité est alors le $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

$$I_A(S) = \iiint_{M \in S} \overrightarrow{AM}^2 \cdot dm$$

- par rapport à un point A

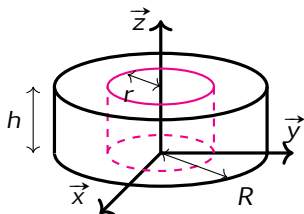
Moments d'inertie d'un solide S

Soit M de coordonnées x, y, z dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$I_O(S) = \iiint_{M \in S} (x^2 + y^2 + z^2).dm$$

$$I_{Ox}(S) = \iiint_{M \in S} (y^2 + z^2).dm$$

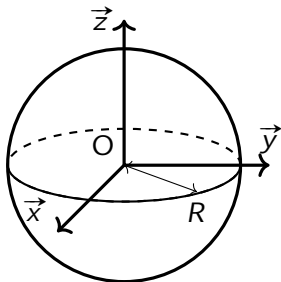
Cylindre de révolution de rayon R , de hauteur h et de masse m .



$$\begin{aligned}
 I_{Oz} &= \iiint_{M \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \Rightarrow \text{coordonnées polaires} \\
 &= \iiint_{M \in S} r^2 \cdot dm \\
 &\text{avec } dm(M) = \rho(M) dV(M) = \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \\
 &= \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \int_0^R r^3 dr
 \end{aligned}$$

$$I_{Oz} = \pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{2} \cdot \rho \quad \text{or} \quad m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$I_{Oz} = m \cdot \frac{R^2}{2}$$



EXEMPLE : Sphère de rayon R , de masse m par rapport à son centre O puis par rapport à un diamètre Δ quelconque.

$$I_O = \iiint_{M \in S} r^2 \cdot dm \text{ avec } dm(M) = \rho(M) dV(M) = \rho \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$$

$$= \rho \cdot 4\pi \cdot \int_S r^4 \cdot dr = \rho \cdot 4\pi \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \cdot m \cdot R^2$$

$$I_O = \frac{3}{5} \cdot m \cdot R^2$$

comme $I_\Delta = I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$ par symétrie,

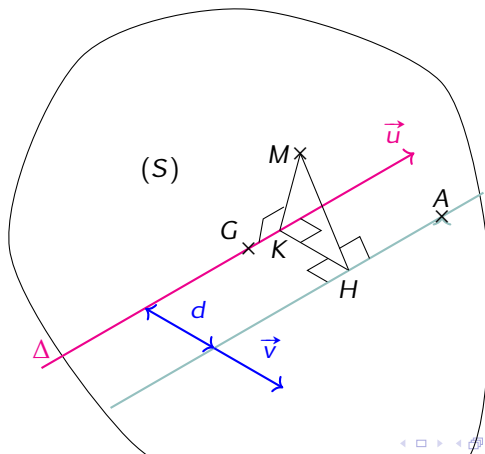
$$3 \cdot I_\Delta = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = \iiint_{M \in S} 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm = 2 \cdot I_O \text{ d'où}$$

$$I_\Delta = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$$

Théorème de Huygens

Soit un axe $(G, \vec{u})$ passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle de distance d passant par le point A .

$$I_{Au}(S) = I_{Gu}(S) + md^2$$



Théorème de Huygens

$$\begin{aligned}
 I_{Au}(S) &= \iiint_{M \in S} \overrightarrow{HM}^2 . dm = \iiint_{M \in S} (\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM})^2 . dm \\
 &= \iiint_{M \in S} \overrightarrow{HK}^2 . dm + \iiint_{M \in S} \overrightarrow{KM}^2 . dm + \iiint_{M \in S} 2(\overrightarrow{HK} . \overrightarrow{KM}) . dm \\
 &= m . d^2 + I_{Gu}(S) + 2 . \cancel{\iiint_{M \in S} (\overrightarrow{HK} . \overrightarrow{KG}) . dm} + \underbrace{\iiint_{M \in S} 2 . (\overrightarrow{HK} . \overrightarrow{GM}) . dm}_{2 . d . \underbrace{\vec{v} . \iiint_{M \in S} \overrightarrow{GM} . dm}_{\vec{0}}}
 \end{aligned}$$

Tenseur d'inertie (Matrice d'inertie d'un solide S en O dans un repère $\mathcal{R}$)

Construction de l'opérateur

Soit une application linéaire $\mathbb{I}_{(O,S)}$ de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{U}$ associe:

$$\vec{U} \mapsto \mathbb{I}_{(O,S)} \vec{U} = \iiint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}) . dm$$

Soient le point $M \in S$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et $\vec{U} = u_x . \vec{x} + u_y . \vec{y} + u_z . \vec{z}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(O, S)[\vec{U}] &= \iiint_S \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}) . dm \\
&= \iiint_S \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \left(\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right) . dm \\
&= \iiint_S \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} z.u_y - y.u_z \\ x.u_z - z.u_x \\ y.u_x - x.u_y \end{vmatrix} . dm \\
&= \iiint_S \begin{vmatrix} y(y.u_x - x.u_y) - z(x.u_z - z.u_x) \\ z(z.u_y - y.u_z) - x(y.u_x - z.u_y) \\ x(x.u_z - z.u_x) - y(z.u_y - z.u_z) \end{vmatrix} . dm \\
&= \iiint_S \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x.y & -x.z \\ -y.x & z^2 + x^2 & -y.z \\ -z.x & -z.y & x^2 + y^2 \end{bmatrix} . dm . \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & -P_{Oxy} & -P_{Oxz} \\ -P_{Oxy} & I_{Oy} & -P_{Oyz} \\ -P_{Oxz} & -P_{Oyz} & I_{Oz} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

avec:

- le produit d'inertie par rapport au plan O_{xy}

$$P_{Oxy}(S) = \iiint_S x.y.dm$$

- le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$

$$I_{Ox}(S) = \iiint_S (y^2 + z^2).dm$$

Trièdre principal d'inertie

On montre que le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe $(O, \vec{u})$ s'écrit :

$$I_{Ou}(S) = \vec{u} \cdot \mathbb{I}(O, S) [\vec{u}]$$

et

$$P_{Ouv}(S) = \vec{u} \cdot \mathbb{I}(O, S) [\vec{v}]$$

Trièdre principal d'inertie

On montre que le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe $(O, \vec{u})$ s'écrit :

$$I_{Ou}(S) = \vec{u} \cdot \mathbb{I}(O, S) [\vec{u}]$$

et

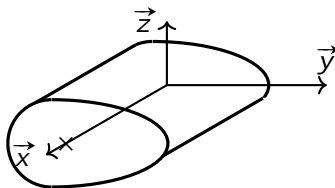
$$P_{Ouv}(S) = \vec{u} \cdot \mathbb{I}(O, S) [\vec{v}]$$

Le tenseur d'inertie étant symétrique et réel, il est diagonalisable dans un repère orthonormé $\mathcal{R}'$. Ce repère est appelé repère principal d'inertie et les 3 axes, directions principales d'inertie. Les moments d'inertie A' , B' et C' sont les moments principaux d'inertie de S en O .

Propriétés de la matrice d'inertie

Un plan de symétrie

Si un solide possède un plan de symétrie (par exemple, le plan O_{xy}), alors les produits d'inertie P_{Oxz} et P_{Oyz} sont nuls. La matrice a alors la forme suivante:



$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

l'axe perpendiculaire à ce plan (ici z) est principal d'inertie.

Propriétés de la matrice d'inertie

Deux plans de symétrie

Si un solide possède deux plans de symétrie, ces plans sont nécessairement orthogonaux. Dans le repère formé des axes associés à ces plans, la matrice associée à l'opérateur d'inertie est diagonale. Ce repère est donc principal d'inertie.

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Propriétés de la matrice d'inertie

Un axe de révolution

Si l'axe $(O, \vec{z})$ est un axe de révolution (Attention: pas un axe de symétrie!), alors les moments d'inertie I_{Ox} et I_{Oy} sont égaux et les trois produits d'inertie sont nuls. la matrice d'inertie a l'allure ci-contre.

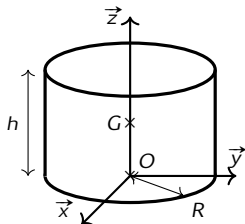
$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O,-,-,\vec{z})}$$

Par axisymétrie, x et y jouent le même rôle. ce qui donne:

$$\iiint_S x^2 \cdot dm = \iiint_S y^2 \cdot dm$$

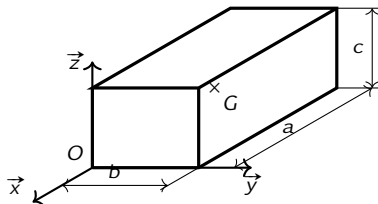
$$A = B = \frac{1}{2}C + \iiint_S z^2 \cdot dm$$

EXEMPLE :



Matrice d'inertie en G du cylindre de masse m , de rayon R et hauteur h , d'axe $(G, \vec{z})$:

$$\mathbb{I}_{(G,S)} = \begin{bmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{2} \right) \end{bmatrix}_{(G, -, -, \vec{z})}$$



Matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de masse m , de côtés a sur x , b sur y et c sur z :

$$\mathbb{I}_{(G,S)} = \begin{bmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

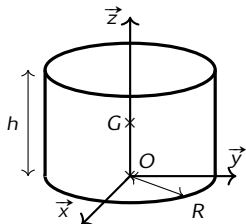
Théorème de Huygens

Ce théorème donne la relation entre $\mathbb{I}_{(G,S)}$, matrice d'inertie du solide S au centre de gravité G , et $\mathbb{I}_{(P,S)}$, matrice d'inertie en un point P quelconque tel que $\overrightarrow{PG} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(P,S)} = \mathbb{I}_{(G,S)} + \begin{bmatrix} m.(y^2 + z^2) & -m.x.y & -m.x.z \\ -m.x.y & m.(x^2 + z^2) & -m.y.z \\ -m.x.z & -m.y.z & m.(x^2 + y^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

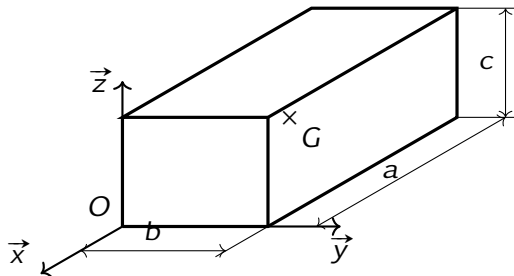
Donc, la matrice d'inertie en un point quelconque P est la somme de la matrice d'inertie exprimée en G et de la matrice d'inertie en G "du point P affecté de la masse totale".

exemple



Matrice d'inertie en O du cylindre de masse m , de rayon R et hauteur h , d'axe $(O, \vec{z})$ avec $\overrightarrow{OG} = \frac{h}{2} \vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{2} \right) \end{bmatrix}_{(O, -, -, \vec{z})}$$



Matrice d'inertie en O d'un parallélépipède de masse m , de côtés a sur x , b sur y et c sur z avec $\overrightarrow{OG} = -\frac{a}{2} \cdot \vec{x} + \frac{b}{2} \cdot \vec{y} + \frac{c}{2} \cdot \vec{z}$:

$$\mathbb{I}_{(O,S)} = \begin{bmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{3} & m \cdot \frac{ab}{4} & m \cdot \frac{ac}{4} \\ m \cdot \frac{ab}{4} & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{3} & -m \cdot \frac{bc}{4} \\ m \cdot \frac{ac}{4} & -m \cdot \frac{bc}{4} & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Torseur cinétique

On appelle torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement) d'un système matériel Σ par rapport au repère $\mathcal{R}$, le torseur défini par:

$$\mathcal{C}_{\Sigma/\mathcal{R}} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} \\ \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

avec pour:

- **résultante cinétique** ou quantité de mouvement de Σ par rapport

à $\mathcal{R}$

$$\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M \in \Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm$$

- **moment cinétique en A** de Σ par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm$$

Conservation de la masse et quantité de mouvement

D'après le principe de conservation de la masse

$$\vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = m \cdot \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{(\Sigma/\mathcal{R})} &= \iiint_{M \in \Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \\
 &= \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right]_{\mathcal{R}} \cdot dm \\
 &= \left[\frac{d}{dt} \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM} \cdot dm \right]_{\mathcal{R}} \quad \text{par conservation de la masse} \\
 &= \left[\frac{d}{dt} m \cdot \overrightarrow{OG} \right]_{\mathcal{R}} = m \cdot \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}
 \end{aligned}$$

Moment cinétique et champs équiprojectifs

Relation entre les moments cinétiques en deux points A et B d'un même système Σ :

$$\vec{\sigma}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m \cdot \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

Cas du solide indéformable S

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} &= \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{V}_{(M,S/\mathcal{R})} . dm \\
 &= \iiint_S \vec{AM} \wedge \left(\vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \vec{AM} \right) . dm \\
 &= \left(\iiint_S \vec{AM} . dm \right) \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \iiint_S \vec{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \wedge \vec{AM} \right) . dm \\
 &= m . \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S) \left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \right] \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} m . \vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})} \\ m . \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S) \left[\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \right] \end{array} \right\}_A$$

$$\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{V}_{(G,S/\mathcal{R})} \\ m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A,S/\mathcal{R})} + \mathbb{I}(A,S) [\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}] \end{array} \right\}$$

Cas particuliers

- A en G $\vec{\sigma}_{(G,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(G,S) [\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}]$
- A fixe dans $\mathcal{R}$ $\vec{\sigma}_{(A,S/\mathcal{R})} = \mathbb{I}(A,S) [\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}]$

Torseur dynamique

On appelle torseur dynamique (ou torseur des quantités d'accélération) d'un système matériel Σ par rapport au repère $\mathcal{R}$, le torseur défini par:

$$\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} \\ \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{array} \right\}$$

- **résultante dynamique** de Σ par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M \in \Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm$$

- **moment dynamique** en A de Σ par rapport à $\mathcal{R}$

$$\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm$$

Conservation de la masse et résultante dynamique

D'après le principe de conservation de la masse

$$\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = m \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R})}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} &= \iiint_{M \in \Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \\ &= \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}} \cdot dm = \left[\frac{d}{dt} \iiint_{M \in \Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \right]_{\mathcal{R}} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right]_{\mathcal{R}} \cdot dm \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d^2}{dt^2} \left[\iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{OM} \cdot dm \right]_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [m \cdot \overrightarrow{OG}]_{\mathcal{R}} = m \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R})} \end{aligned}$$

$$\vec{\gamma}_{(\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt} \vec{P}_{(\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}}$$

La résultante dynamique est la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique

Moment dynamique et champs équiprojectifs

Relation entre les moments dynamiques en deux points A et B d'un même système Σ indéformable:

$$\vec{\delta}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} + \overrightarrow{BA} \wedge m \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R})}$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{(B,\Sigma/\mathcal{R})} &= \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \\ &= \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm + \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\iiint_{M \in \Sigma} \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm}_{m \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R})}} + \vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{aligned}$$

Relation entre moment cinétique et moment dynamique

$$\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}} + m \cdot \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}} &= \left[\frac{d}{dt} \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \right]_{\mathcal{R}} = \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})}) \right]_{\mathcal{R}} \\ &= \iiint_{M \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} \right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} + \overrightarrow{AM} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}} \cdot dm \\ &= \iiint_{M \in \Sigma} (\vec{V}_{(M/\mathcal{R})} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}) \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \dots \\ &\quad \dots + \iiint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{A}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm \\ &= -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \iiint_{M \in \Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot dm + \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \\ &= -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge (m \cdot \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}) + \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \end{aligned}$$

Cas particuliers

- A en G

$$\vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}}$$

- Solide Σ en translation

$$\vec{\delta}_{(G,\Sigma/\mathcal{R})} = \vec{0}$$

- A fixe dans $\mathcal{R}$

$$\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}}$$

Projection du moment dynamique sur un axe

Il arrive fréquemment dans les problèmes de mécanique que l'on n'ait pas besoin de l'expression complète du moment dynamique, mais seulement de sa projection sur un axe $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \cdot \vec{u} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (m \cdot \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}) \\ &= \frac{d \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \cdot \vec{u}}{dt} - \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{u} \right]_{\mathcal{R}} \dots \\ &\dots + \vec{u} \cdot (m \cdot \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})})\end{aligned}$$

Énergie cinétique

Définition

L'énergie cinétique d'un système Σ dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est définie par:

$$\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_{M \in \Sigma} [\vec{V}_{(M/\mathcal{R})}]^2 . dm$$

Son unité est le Joule (J).

L'unité est le Joule J.

Cas du solide indéformable S

$$\begin{aligned}
 2.\mathcal{E}_c(S/R) &= \iiint_{M \in S} \left[\vec{V}_{(G,S/R)} + \vec{MG} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)} \right]^2 . dm \\
 &= \iiint_{M \in S} \left[\vec{V}_{(G,S/R)} \right]^2 . dm + \iiint_{M \in S} \left[\vec{MG} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)} \right]^2 . dm \dots \\
 &\dots + 2 \iiint_{M \in S} \vec{V}_{(G,S/R)} \cdot \left[\vec{MG} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)} \right] . dm
 \end{aligned}$$

or

$$\underbrace{\vec{MG} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}}_{\vec{a}} \cdot \left(\underbrace{\vec{MG}}_{\vec{b}} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}_{(S/R)}}_{\vec{c}} \right) = \underbrace{\vec{\Omega}_{(S/R)}}_{\vec{c}} \cdot \left[\left(\underbrace{\vec{MG} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}}_{\vec{a}} \right) \wedge \underbrace{\vec{MG}}_{\vec{b}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 2.\mathcal{E}_c(S/R) &= m \cdot \left[\vec{V}_{(G,S/R)} \right]^2 + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \iiint_{M \in S} \vec{GM} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \vec{GM} . dm \dots \\
 &\dots + 2 \cdot \vec{V}_{(G,S/R)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \iiint_{M \in S} \vec{GM} . dm
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_c(S/R) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\vec{V}_{(G,S/R)} \right]^2 + \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \mathbb{I}(G, S) \left[\vec{\Omega}_{(S/R)} \right]$$

Formule vraie seulement en G

Cas particuliers:

- mouvement d'un solide S autour d'un point fixe A de $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} \cdot \mathbb{I}(A, S) [\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})}]$$

- mouvement d'un solide S autour d'un axe fixe $(A, \vec{x})$ de $\mathcal{R}$ avec

$$\vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R})} = \omega \cdot \vec{x}: \quad \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \cdot I_{Ax}(S) \cdot \omega^2$$

Éléments cinétiques d'un ensemble

Les éléments cinétiques d'un ensemble Σ de n solides S_i en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ sont:

$$\mathcal{C}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_{S_i/\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{S_i/\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_c(S_i/\mathcal{R})$$

Pour les torseurs, attention de calculer les moments au même point pour tous les solides.

Sommaire

1 Cinétique

2 Puissance

- Puissance des efforts extérieurs
- Cas particulier du solide indéformable
- Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables
- Liaison parfaite entre deux solides

3 Principe fondamental de la dynamique

4 Notion de rendement

5 Équilibrage dynamique

Puissance des efforts extérieurs à un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$

Soit un champ de forces $\vec{dF}(M)$ agissant sur chaque point M d'un système Σ .

EXEMPLE :

- pesanteur: $\vec{dF}(M) = \rho(M).dV.\vec{g}$
- champ de pression dans un fluide: $\vec{dF}(M) = -p(M).\vec{n}(M).dS$
- champ des forces de contact entre 2 solides:
 $\vec{dF}(M) = -p(M).\vec{n}(M).dS + f_p(M).\vec{t}(M).dS$

La puissance développée, à l'instant t , par l'action des efforts extérieurs sur Σ , dans le mouvement de $\Sigma/\mathcal{R}$ est:

$$P_{(Ext \rightarrow \Sigma/\mathcal{R})} = \iiint_{M \in \Sigma} \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} \cdot \vec{dF}(M)$$

Cas particulier du solide indéformable

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{(M,S/R)} &= \vec{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)} \\
 P_{(Ext \rightarrow S/R)} &= \iiint_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \cdot \vec{V}_{(A,S/R)} + \iiint_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \cdot [\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}] \\
 &= \vec{V}_{(A,S/R)} \cdot \iiint_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \iiint_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}(M)
 \end{aligned}$$

or le torseur associé aux efforts extérieurs à S en A s'écrit:

$$\mathcal{F}_{Ext \rightarrow S} = \left\{ \begin{array}{c} \iiint_{M \in S} \overrightarrow{dF}(M) \\ \iiint_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(Ext \rightarrow S)} \\ \vec{M}_{(A, Ext \rightarrow S)} \end{array} \right\}$$

donc $P_{(Ext \rightarrow S/R)} = \vec{V}_{(A,S/R)} \cdot \vec{R}_{(Ext \rightarrow S)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \vec{M}_{(A, Ext \rightarrow S)}$

La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à un solide S en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est égale au produit (comoment) du torseur cinématique de $S/\mathcal{R}$ par le torseur des actions mécaniques extérieures.

$$P_{(Ext \rightarrow S/\mathcal{R})} = \mathcal{F}_{Ext \rightarrow S} \otimes \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}}$$

REMARQUE : Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (qui doit bien sûr être le même pour les deux !) mais du repère $\mathcal{R}$.

$${}_A \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} \otimes {}_A \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} = X.V_x + Y.V_y + Z.V_z + L.\omega_x + M.\omega_y + N.\omega_z$$

Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables

Soient 2 solides S_1 et S_2 en liaison à l'intérieur d'un système. On parle aussi de la puissance ($P_{(S_2 \leftrightarrow S_1/\mathcal{R})}$) des inter-efforts de liaison pour la puissance $P_{int}(S_2, S_1)$ des efforts intérieurs.

La puissance $P_{int}(S_2, S_1)$ développée par les efforts de liaison entre les 2 solides est de la forme:

$$\begin{aligned} P_{(S_2 \leftrightarrow S_1/\mathcal{R})} &= P_{(S_2 \rightarrow S_1/\mathcal{R})} + P_{(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R})} \\ &= \mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1} \otimes \mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}} + \mathcal{F}_{S_1 \rightarrow S_2} \otimes \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}} \\ &= \mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1} \otimes [\mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}} - \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}}] \end{aligned}$$

d'où

$$P_{int}(S_2, S_1) = P_{(S_2 \leftrightarrow S_1/\mathcal{R})} = -\mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1} \otimes \mathcal{V}_{S_2/S_1}$$

Cette puissance est indépendante du repère $\mathcal{R}$ par rapport auquel elle est calculée.

Liaison parfaite entre deux solides

Deux solides S_1 et S_2 ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle (pas de frottement)

$$P_{int}(S_1, S_2) = 0$$

APPLICATION: retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées.

- pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$:

$$\mathcal{V}_{S_1/S_2} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} \omega & V \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathcal{R}} \quad \mathcal{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

$$P_{int}(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \forall \omega, \forall V, L \cdot \omega + X \cdot V = 0 \Leftrightarrow X = L = 0$$

d'où
$${}_O \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

- glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$:

$$\mathcal{V}_{S_1/S_2} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} \omega & \frac{p}{2\pi} \omega \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \quad \mathcal{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

$$P_{int}(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow \forall \omega, L \cdot \omega + X \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow L = -\frac{p}{2\pi} \cdot X \quad \text{d'où } \mathcal{F}_{S_2 \rightarrow S_1} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X & -\frac{p}{2\pi} \cdot X \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{\mathcal{R}}$$

Sommaire

- 1 Cinétique
- 2 Puissance
- 3 Principe fondamental de la dynamique**
 - Référentiels galiléens
 - Énoncé
 - Équations de mouvement
 - Théorème de l'énergie cinétique
- 4 Notion de rendement
- 5 Équilibrage dynamique

Référentiels galiléens

Principe de l'inertie

Il existe un repère privilégié dans lequel un point matériel qui serait soustrait à toute influence (actions mécaniques) aurait une accélération nulle. Ce repère est dit **galiléen** ou absolu.

référentiel = repère à 3 dimensions (longueur en mètre) + chronologie (temps en seconde)

Référentiels galiléens

Relativité galiléenne

On remarque que s'il existe un repère galiléen, alors il en existe une infinité, qui se déduisent du premier par des mouvements d'accélération nulle (mouvement de translation uniforme). Tous ces repères conviennent donc pour exprimer les lois de la mécanique classique.

Référentiels galiléens

Espaces galiléens approchés

- **repère héliocentrique de Copernic:** (centre d'inertie du système solaire + 3 directions stellaires) *mapsto* étude des fusées et satellites interplanétaires.
- **repère géocentrique:** lié au centre d'inertie de la terre + 3 directions stellaires $\mapsto$ étude du mouvement des corps restant au voisinage de la terre ou expériences de longue durée.
- **repère terrestre:** lié à la terre $\mapsto$ mécanismes étudiés en laboratoire

On montre que tout repère $\mathcal{R}$ en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est aussi galiléen.

Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un référentiel galiléen tel que, pour tout ensemble matériel Σ , le torseur dynamique de Σ dans cet espace est constamment égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à Σ :

$$\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{Ext \rightarrow \Sigma}$$

Théorème de la résultante dynamique

$$m_{\Sigma} \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R}_g)} = \vec{R}_{(Ext \rightarrow \Sigma)}$$

Théorème du moment dynamique

Théorème de la résultante dynamique

$$m_{\Sigma} \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R}_g)} = \vec{R}_{(Ext \rightarrow \Sigma)}$$

Théorème du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{(A, \Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{M}_{(A, Ext \rightarrow \Sigma)}$$

Théorème de la résultante dynamique

$$m_{\Sigma} \cdot \vec{A}_{(G/\mathcal{R}_g)} = \vec{R}_{(Ext \rightarrow \Sigma)}$$

Théorème du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{(A, \Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{M}_{(A, Ext \rightarrow \Sigma)}$$

REMARQUE : En prenant A en un point **fixe** de $\mathcal{R}_g$ ou au centre d'inertie G de Σ , le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique d'où les théorèmes du moment cinétique:

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}_{(A, \Sigma/\mathcal{R}_g)} \right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{(A, Ext \rightarrow \Sigma)}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}_{(G, \Sigma/\mathcal{R}_g)} \right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{(G, Ext \rightarrow \Sigma)}$$

Équations de mouvement

En appliquant ces théorèmes, on obtient des relations entre les paramètres de position du système, leurs dérivées 1^{ères} et 2^{ndes} et les efforts s'exerçant sur Σ .

DÉFINITION : Équation du mouvement

Équation différentielle du 2nd ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Théorème de l'énergie cinétique

Cas du solide unique S

Soit un unique solide S en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\mathcal{D}_{S/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{\text{Ext} \rightarrow S}$$

En multipliant cette expression par le torseur cinématique, on obtient la puissance galiléenne des efforts extérieurs à S :

$$\mathcal{D}_{S/\mathcal{R}_g} \otimes \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_g} = \mathcal{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} \otimes \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_g} = P_{(\text{Ext} \rightarrow S/\mathcal{R}_g)}$$

or

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{S/\mathcal{R}_g} \otimes \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_g} &= \left[\iiint_{M \in S} \vec{A}_{(M, S/\mathcal{R}_g)} \cdot dm \right] \cdot \vec{V}_{(A, S/\mathcal{R}_g)} \dots \\
&\dots + \left[\iiint_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{A}_{(M, S/\mathcal{R}_g)} \cdot dm \right] \cdot \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_g)} \\
&= \iiint_{M \in S} \vec{A}_{(M, S/\mathcal{R}_g)} \cdot \left[\vec{V}_{(A, S/\mathcal{R}_g)} + \vec{\Omega}_{(S/\mathcal{R}_g)} \wedge \vec{AM} \right] \cdot dm \\
&= \iiint_{M \in S} \vec{A}_{(M, S/\mathcal{R}_g)} \cdot \vec{V}_{(M, S/\mathcal{R}_g)} \cdot dm \\
&= \iiint_{M \in S} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}_{(M, S/\mathcal{R}_g)}^2 \cdot dm = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g)
\end{aligned}$$

d'où le **théorème de l'énergie cinétique**:

La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S .

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) = P_{(Ext \rightarrow S/\mathcal{R}_g)}$$

Système Σ de n solides S_i

Pour chaque solide i , on a: $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(S_i/\mathcal{R}_g) = P_{(Ext \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)}$

En ajoutant les n relations pour les n solides:

$$\sum \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(S_i/\mathcal{R}_g) = \sum P_{(Ext \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_g) &= P_{(Ext \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g)} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k P_{int}(S_k, S_l) \\ &= P_{(Ext \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g)} + P_{int}(\Sigma)\end{aligned}$$

REMARQUE :

- l'équation obtenue à partir du théorème de l'énergie cinétique n'est pas indépendante des équations fournies par le principe fondamental.
- le principe fondamental donne 6 équations et le théorème de l'énergie cinétique une seule, donc suffisant seulement pour les problèmes à un degré de mobilité
- pour un système de solides, il faut tenir compte des inter-efforts, contrairement au pfd
- ce théorème n'est intéressant que si on peut intégrer facilement la puissance ie si la puissance "dérive d'un potentiel" et si les liaisons sont parfaites.

Sommaire

- 1 Cinétique
- 2 Puissance
- 3 Principe fondamental de la dynamique
- 4 Notion de rendement**
 - Définitions
 - Calcul du rendement d'un ensemble
- 5 Équilibrage dynamique

Définitions

DÉFINITION : Rendement mécanique

Le rendement mécanique d'un mécanisme est donné par:

$$\eta(t) = \frac{|P_r|}{P_m} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \eta(t) \leq 1$$

DÉFINITION : Puissance motrice

Puissance reçue par le système

$$P_{motrice} = P_m \quad \text{avec} \quad P_m \geq 0$$

Un moteur exerce une puissance motrice si le couple a le même signe que la vitesse de rotation et la pesanteur si le centre de gravité descend.

DÉFINITION : Puissance dissipée

Puissance perdue sous forme de chaleur

$$P_{\text{dissipée}} = P_d \quad \text{avec} \quad P_d \leq 0$$

Cas des forces de frottement dans les liaisons

DÉFINITION : Puissance réceptrice

Puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur.

$$P_{\text{réceptrice}} = P_r \quad \text{avec} \quad P_r \leq 0$$

Puissance de la pesanteur si le centre de gravité monte ou puissance d'un moteur si le couple et la vitesse de rotation sont de signe contraire ("frein-moteur").

Calcul du rendement d'un ensemble

Calcul du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement par rapport $\mathcal{R}_g$. Le théorème de l'énergie cinétique donne:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) = P_m + P_d + P_r \Leftrightarrow P_m + P_d + P_r - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) = 0 \text{ alors } \eta = \frac{|P_r|}{P_m}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) < 0 \text{ alors } \eta = \frac{|P_r|}{P_m - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) > 0 \text{ alors } \eta = \frac{\left|P_r - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)\right|}{P_m}$$

REMARQUE :

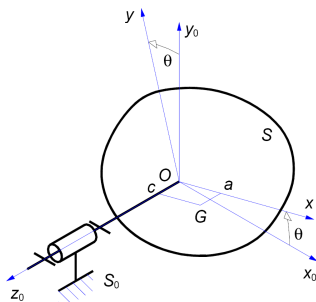
- Le rendement dépend en général du temps.
- En général, on calcule un rendement moyen pour les mouvements cycliques.
- Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur, le rendement est nul (frein).

Sommaire

- 1 Cinétique
- 2 Puissance
- 3 Principe fondamental de la dynamique
- 4 Notion de rendement
- 5 **Équilibrage dynamique**
 - Solide en rotation autour d'un axe fixe
 - Équilibrage

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Paramétrage du problème



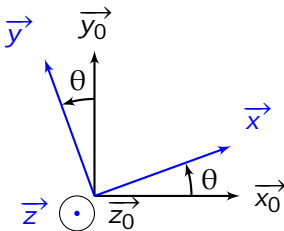
Soit un solide S de forme quelconque, de masse m et de centre d'inertie G en liaison pivot supposée parfaite avec un bâti S_0 auquel est lié le repère galiléen $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

La liaison pivot est d'axe $(O, \vec{z}_0)$. Le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, lié à S , est choisi, pour simplifier les calculs, tel que le plan $(O, \vec{z}_0, \vec{x})$ contienne le point G .

$$(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} = a \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{z}_0$$

Le solide S étant quelconque, sa matrice d'inertie dans le base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ est

$$\mathbb{I}(O, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$



Bilan des actions mécaniques exercées sur le solide S

- Les actions de la liaison pivot sont représentées, en O , par le torseur :

$$\mathcal{F}_{S_0 \rightarrow S} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_B$$

- Sur S s'exerce également d'autres actions mécaniques, supposées connues, représentée au point O , par le torseur :

$$\mathcal{F}_{Ext \rightarrow S} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & N_E \end{array} \right\}_B$$

Lorsque S est la roue d'un véhicule $\mathcal{F}_{Ext \rightarrow S}$ est constitué par la route, la pesanteur, l'arbre de transmission...

Torseurs cinématique et dynamique

Le mouvement de S par rapport à S_0 est décrit par le **torseur cinématique** suivant :

$$\mathcal{V}_{S/S_0} = {}_O \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_G \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{(O,S/S_0)} + \vec{GO} \wedge \vec{\Omega}_{(S/S_0)} \end{array} \right\} = {}_G \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y} \end{array} \right\}$$

La **résultante dynamique** est obtenue par dérivation de $\vec{V}_{(G,S/S_0)}$ dans $\mathcal{R}_0$:

$$\vec{\gamma}_{(S/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d}{dt} m \cdot \vec{V}_{(G,S/S_0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} m \cdot a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y} \right]_{\mathcal{R}_0} = m \cdot a \cdot (\ddot{\theta} \cdot \vec{y} - \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x})$$

Le calcul du **moment dynamique** est calculé au point O (matrice d'inertie en O et $\vec{V}_{(O,S/S_0)} = \vec{0}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{(O,S/S_0)} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{(O,S/S_0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d}{dt} \mathbb{I}(O, S) [\vec{\Omega}_{(S/S_0)}] \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \dot{\theta}.(-E.\vec{x} - D.\vec{y} + c.\vec{z}_0) \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \ddot{\theta}.(-E.\vec{x} - D.\vec{y} + c.\vec{z}_0) + \dot{\theta}^2.(D.\vec{x} - E.\vec{y})\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{D}_{S/\mathcal{R}_0} = \begin{Bmatrix} a.(\ddot{\theta}.\vec{y} - \dot{\theta}^2.\vec{x}) \\ \ddot{\theta}.(-E.\vec{x} - D.\vec{y} + c.\vec{z}_0) + \dot{\theta}^2.(D.\vec{x} - E.\vec{y}) \end{Bmatrix}$$

Principe fondamental de la dynamique

On applique le principe fondamental de la dynamique au solide S , au point O dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$:

$$\mathcal{D}_{S/\mathcal{R}_0} = \mathcal{F}_{S_0 \rightarrow S} + \mathcal{F}_{\text{Ext} \rightarrow S}$$

$${}_O \left\{ \begin{array}{c} a(\ddot{\theta} \vec{y} - \dot{\theta}^2 \vec{x}) \\ \ddot{\theta}(-E\vec{x} - D\vec{y} + c\vec{z}_0) + \dot{\theta}^2(D\vec{x} - E\vec{y}) \end{array} \right\} = {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_B + {}_O \left\{ \begin{array}{cc} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & N_E \end{array} \right\}$$

ce qui nous conduit aux 6 équations scalaires:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X + X_E & = & -ma\dot{\theta}^2 \quad (1) \\ Y + Y_E & = & ma\ddot{\theta} \quad (2) \\ Z + Z_E & = & 0 \quad (3) \\ L + L_E & = & \dot{\theta}^2 D - \ddot{\theta} E \quad (4) \\ M + M_E & = & -\dot{\theta}^2 E - \ddot{\theta} D \quad (5) \\ N_E & = & C\ddot{\theta} \quad (6) \end{array} \right.$$

d'où l'on peut extraire les inconnues de liaisons:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & -ma\dot{\theta}^2 - X_E \quad (1') \\ Y & = & ma\ddot{\theta} - Y_E \quad (2') \\ Z & = & -Z_E \quad (3') \\ L & = & \dot{\theta}^2 D - \ddot{\theta} E - L_E \quad (4') \\ M & = & -\dot{\theta}^2 E - \ddot{\theta} D - M_E \quad (5') \end{array} \right.$$

et l'équation de mouvement: $\ddot{\theta} = \frac{N_E}{C}$ (6')

Équilibrage

Un des problèmes essentiels en fabrication est l'équilibrage des solides tournant autour d'un axe fixe. En effet, la naissance de vibrations mécaniques peut engendrer une détérioration rapide des paliers, un manque de précision pour l'usinage ou plus simplement créer une gêne sonore.



Dans le cas de la roue d'un véhicule que l'on cherche à équilibrer, les actions mécaniques exercées sur S autres que les actions mécaniques de la liaisons pivot, se résument à l'action gravitationnelle:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} &= {}_G \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
 &= {}_O \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y}_0 \\ (a\vec{x} + c\vec{z}_0) \wedge -mg\vec{y}_0 \end{array} \right\} \\
 &= {}_O \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y}_0 \\ -mg(a\cos(\theta)\vec{z}_0 - c\vec{x}_0) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'équation de mouvement (6'): $\ddot{\theta} = \frac{mga}{C} \cos(\theta)$.

Conditions d'équilibrage

Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre S et S_0 aussi constante que possible. En particulier, indépendante du mouvement de S par rapport à S_0 , c'est à dire de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

D'après les équations précédentes, ces conditions d'équilibrage nous donnent :

- $a = 0$: le centre d'inertie G est sur l'axe de rotation $(O, \vec{Z}_0)$ (équilibrage statique, car $(6') \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$);
- $D = E = 0$: l'axe de rotation $(O, \vec{Z}_0)$ est axe principal d'inertie de S (équilibrage dynamique).

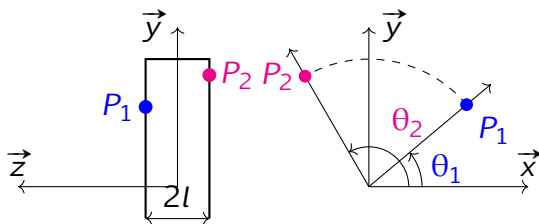
Réalisation pratique de l'équilibrage

On remplace S par un solide S' constitué de S et de deux solides S_1 et S_2 , assimilables à des points matériels P_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) dans $\mathcal{R}$ et de masses m_1 et m_2 positives (ajout de matière) ou négative (perçage, enlèvement de matière).

Dans le cas de l'équilibrage d'un vilebrequin, on effectue des perçages.



Dans le cas des roues de voitures, on ajoute deux masselottes fixées à la jante de chaque côté de la roue de rayon r .



Pour permettre à S' d'être équilibré statiquement (G' sur l'axe $(O, \vec{z}_0)$) et dynamiquement ($D' = E' = 0$), il convient de déterminer les inconnues $(m_1, x_1, y_1, z_1, m_2, x_2, y_2, z_2)$. La traduction des conditions d'équilibre mène à:

$\overrightarrow{OG'} \cdot \vec{x} = 0$	$\overrightarrow{OG'} \cdot \vec{y} = 0$
$ma + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \quad (1)$	$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \quad (2)$
$D' = 0$	$E' = 0$
$D + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \quad (3)$	$E + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 \quad (4)$

On obtient 4 équations à 8 inconnues (m_i, x_i, y_i, z_i) , donc une infinité de solutions.

REMARQUE : Dans le cas général, une seule masselotte (ou un seul perçage) ne suffit pas: si $m_2 = 0$ alors (2) $\Rightarrow y_1 = 0$ et (3) $\Rightarrow D = 0$ d'où contradiction....

L'examen de ces conditions dans le cas de l'équilibre dynamique d'une roue de véhicule conduit à passer en coordonnées cylindriques. Les huit inconnues sont alors : $(r_i, \theta_i, z_i, m_i)$.

Dans ce type d'équilibre, les masses sont fixées sur le bord de la jante, de chaque côté de la roue. Les quatre conditions imposées sont les valeurs des paramètres (z_1, z_2, r_1, r_2) avec généralement $r_1 = r_2 = r$. Les quatre dernières inconnues sont $(m_1, m_2, \theta_1, \theta_2)$.

La résolution des équations (1) à (4) donne:

$$\tan(\theta_1) = \frac{D}{E - maz_2}$$

$$m_1 = \frac{D}{r_1 \sin(\theta_1)(z_2 - z_1)}$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{D}{E - maz_1}$$

$$m_2 = \frac{maz_1 - E}{r_2 \cos(\theta_2)(z_2 - z_1)}$$