TD 5 : DYNAMIQUE DES SOLIDES

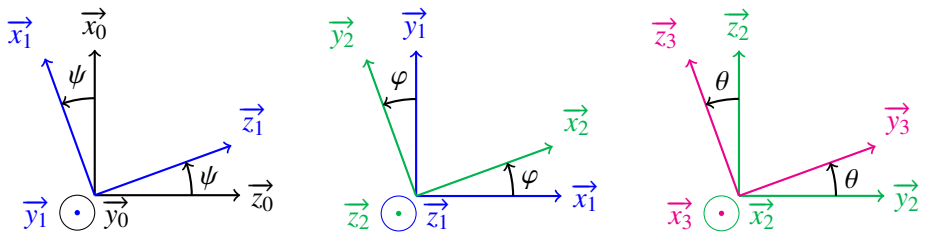
Exercice 1 : Étude dynamique d'un gyromètre

Ce capteur est constitué d'une toupie (3), animée d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire élevée (environ 100 tr/s) autour de l'axe $(O, \vec{x}_2)$.

La pièce intermédiaire (2) qui supporte le stator du moteur, est rappelée dans sa position d'équilibre par 2 ressorts identiques de raideur k : $\vec{F}_r = 2.k.\varphi.h\vec{x}_1$ en supposant φ petit.

Lorsque le gyromètre (toupie en rotation) est animé d'un mouvement de roration autour de son axe d'entrée, ici l'axe $(O, \vec{y}_0)$, la toupie et la pièce intermédiaire (2) s'inclinent autour d'un axe perpendiculaire à l'axe d'entrée, ici l'axe $(O, \vec{z}_1)$. Ce phénomène, qui se nomme effet gyroscopique, peut être facilement visualisé lorsque le moteur de la toupie est alimenté.

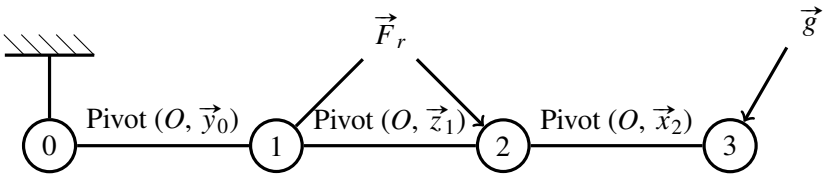
C'est la mesure de l'angle d'inclinaison de la pièce (2) autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$ qui constitue la sortie du capteur.



La rotation propre de la toupie $\dot{\theta}$ est supposée constante, connue, imposée par le moteur dont le stator est 2 et le rotor 3. On impose un mouvement d'entrée $\dot{\psi}$ constant.

Q - 1 : *Établir la relation entre $\dot{\psi}$ et φ.*

- Commençons par établir le graphe des liaisons :



- Réfléchissons pour déterminer la stratégie : quel isolement ? quel théorème ?
  - Isoler chacune des pièces et obtenir les 6 équations scalaires est une solution qui marche mais trop violente ...
  - Isoler juste la pièce 3, conduit à obtenir des équations de liaisons sauf en moment sur l'axe $(O, \vec{x}_2)$. Mais qu'en tirerait-on ? Rien, car l'effet du ressort n'interviendrait pas.
  - On comprend que si un équilibre apparaît pendant la rotation, c'est que le ressort compense l'effet gyroscopique, proportionnel à la vitesse de rotation. Il faut donc faire intervenir l'effort du ressort sur le solide 2.
  - Si on isole que le solide 2, on va avoir un soucis à cause des efforts de liaisons entre 2 et 3.
  - On isole donc l'ensemble $\{2, 3\}$.

- Reste le problème des actions de liaisons entre 1 et 2. On applique le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\{2,3\}$ dans le référentiel galiléen lié à 0, exprimé au point O et en projection sur $\vec{z}_1$

- Appliquons le plan prévu :
  - On isole l'ensemble $\{2,3\}$.
  - On fait le BAME appliquées à $\{2,3\}$:
    - ⋆ action de 1 sur 2
    - ⋆ action de g sur 3
  - Déterminons $\vec{\delta}_{(O,\{2,3\}/0)}.\vec{z}_1$
    - ⋆ Comme la masse de 2 est négligée, $\mathcal{D}_{2/0} = 0$
    - ⋆ $\mathcal{V}_{3/0} = {}_O\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{(3/0)}\\ \vec{0}\end{array}\right\}$ et $\vec{\Omega}_{(3/0)} = \dot{\theta}.\vec{x}_2 + \dot{\varphi}.\vec{z}_2 + \dot{\psi}.\vec{y}_1$
    - ⋆ $\vec{\sigma}_{(O,3/0)} = \mathbb{I}(O,3)\left[\vec{\Omega}_{(3/0)}\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & B\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_3}.\begin{bmatrix}\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)\\ \dot{\psi}.\cos(\varphi)\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$

      On a un soucis car l'opérateur d'inertie est exprimé dans la base 3 alors que le vecteur rotation est dans la base 2. Cependant, par axisymétrie d'axe $(O,\vec{x}_2)$, l'opérateur a exactement la même forme dans la base 2. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(O,3) &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & B\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_3}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B.\cos(\theta) & -B.\sin(\theta)\\ 0 & B.\sin(\theta) & B.\cos(\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & B\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{(O,3/0)} &= \mathbb{I}(O,3)\left[\vec{\Omega}_{(3/0)}\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & B\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}.\begin{bmatrix}\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)\\ \dot{\psi}.\cos(\varphi)\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}\\
&= \begin{bmatrix} A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi))\\ B.\dot{\psi}.\cos(\varphi)\\ B.\dot{\varphi}\end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{3/0} = {}_O\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \vec{\sigma}_{(O,3/0)}\end{array}\right\} \text{ car } \vec{p}_{(3/0)} = m_3.\vec{V}_{(G_3/0)} = m_3.\cancel{\vec{V}_{(O/0)}}
\end{aligned}$$

    - ⋆

$$\vec{\delta}_{(O,\{2,3\}/0)}.\vec{z}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(O,3/0)}.\vec{z}_1}{\mathrm{dt}} - \vec{\sigma}_{(O,\{2,3\}/0)}.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_0$$

      car on se souvient que :

$$\vec{\delta}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\vec{u}}{\mathrm{dt}} - \vec{\sigma}_{(A,\Sigma/\mathcal{R})}.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{u}\right]_{\mathcal{R}} + \vec{u}.\left(m.\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}\right)$$

$$\vec{\sigma}_{(O,3/0)}.\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)) \\ B.\dot{\psi}.\cos(\varphi) \\ B.\dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} = B.\dot{\varphi}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_0 = \cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_1} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{z}_1 = \dot{\psi}.\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \dot{\psi}.\vec{x}_1$$

$$\vec{\sigma}_{(O,\{2,3\}/0)}.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_1)\right]_0 = \begin{bmatrix} A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)) \\ B.\dot{\psi}.\cos(\varphi) \\ B.\dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} . \begin{bmatrix} \dot{\psi}.\cos(\varphi) \\ -\dot{\psi}.\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\vec{\delta}_{(O,\{2,3\}/0)}.\vec{z}_1 = B.\ddot{\varphi} + A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)).\dot{\psi}.\cos(\varphi) - B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi).\sin(\varphi)$$

★ On applique théorème du moment dynamique à l'ensemble $\{2,3\}$ dans le référentiel galiléen lié à 0, exprimé au point O et en projection sur $\vec{z}_1$:

$$\vec{\delta}_{(O,\{2,3\}/0)}.\vec{z}_1 = (\cancel{\vec{M}_{(O,g\to 3)}} + \vec{M}_{(O,1\to 2)}).\vec{z}_1 = \cancel{(L_{12}.\vec{x}_1 + M_{12}.\vec{y}_1).\vec{z}_1} + \left(\cancel{\vec{M}_{(B,F_r\to 2)}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_{F_r\to 2}\right).\vec{z}_1$$
$$= \left(\vec{R}_{F_r\to 2} \wedge \vec{z}_1\right).\overrightarrow{OB} = (2.k.\varphi.h\,\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1).\overrightarrow{OB} = -2.k.\varphi.h.\vec{y}_1.\overrightarrow{OB} = -2.k.\varphi.h^2 \text{ d'où :}$$

$$B.\ddot{\varphi} + A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)).\dot{\psi}.\cos(\varphi) - B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi).\sin(\varphi) = -2.k.\varphi.h^2$$

A l'équilibre :

$$\varphi = \frac{B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi).\sin(\varphi) - A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)).\dot{\psi}.\cos(\varphi)}{2.k.h^2}$$

- On aurait aussi pu le faire en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
  - Stratégie ? On isole $\{1,2,3\}$ ou $\{2,3\}$? On isole $\{1,2,3\}$, sinon la liaison pivot 1/2 va travailler.
  - Isolons donc $\{1,2,3\}$ et appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans le référentiel galiléen lié à 0 :
    $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\{1,2,3\}/0)}{\mathrm{dt}} = P_{ext}(\overline{\{1,2,3\}} \to \{2,3\}/0) + P_{int}(\{1,2,3\})$$
  - Calcul de l'énergie cinétique
    $$\mathcal{E}_c(\{1,2,3\}/0) = \cancel{\mathcal{E}_c(1/0)} + \cancel{\mathcal{E}_c(2/0)} + \mathcal{E}_c(3/0) = \mathcal{C}_{3/0} \otimes \mathcal{V}_{3/0} = {}_O\left\{\begin{matrix} - \\ \vec{\sigma}_{(O,3/0)} \end{matrix}\right\} \otimes {}_O\left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_{(3/0)} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$
    $$= \begin{bmatrix} A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi)) \\ B.\dot{\psi}.\cos(\varphi) \\ B.\dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} . \begin{bmatrix} \dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi) \\ \dot{\psi}.\cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2} = A.(\dot{\theta}+\dot{\psi}.\sin(\varphi))^2 + B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi)^2 + B.\dot{\varphi}^2$$
  - Calcul des puissances extérieures
    $$P_{ext}(\overline{\{1,2,3\}} \to \{1,2,3\}/0) = P_{ext}(g \to 3/0) + P_{ext}(0 \to 1/0) = \mathcal{F}_{g\to 3} \otimes \mathcal{V}_{3/0} + \cancel{\mathcal{F}_{0\to 1} \otimes \mathcal{V}_{1/0}}$$
    $$= \cancel{{}_O\left\{\begin{matrix} - \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} \otimes {}_O\left\{\begin{matrix} - \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}} = 0$$
  - Calcul des puissances intérieures
    Au niveau des puissances intérieures, les pivots de travaillent pas :
    $$P_{int}(i,j) = -\mathcal{F}_{i\to j} \otimes \mathcal{V}_{i/j} = 0$$
    Pour clarifier les choses au niveau des pivots :
    $$P_{int}(2,1) = -\mathcal{F}_{2\to 1} \otimes \mathcal{V}_{2/1} = -{}_O\left\{\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_1} \otimes {}_O\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varphi} \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_1} + \mathcal{F}_{Fr\to 2} \otimes \mathcal{V}_{2/1} = \mathcal{F}_{Fr\to 2} \otimes \mathcal{V}_{2/1}$$
    $$P_{int}(1,0) = -\mathcal{F}_{1\to 0} \otimes \mathcal{V}_{1/0} = -{}_O\left\{\begin{matrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & 0 \\ Z_{10} & N_{10} \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_1} \otimes {}_O\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\psi} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}_1} = 0$$

$$\mathcal{V}_{2/1} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{Fr\to 2} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} 2.k.\varphi.h\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{(O,Fr\to 2)} = \cancel{\vec{M}_{(B,Fr\to 2)}} + \overrightarrow{OB} \wedge 2.k.\varphi.h\vec{x}_1$$

$$P_{int}(\{1,2,3\}) = (\overrightarrow{OB} \wedge 2.k.\varphi.h\vec{x}_1).\dot{\varphi}.\vec{z}_1 = (2.k.\varphi.h\vec{x}_1 \wedge \dot{\varphi}.\vec{z}_1).\overrightarrow{OB} = -2.k.\varphi.h^2.\dot{\varphi}$$

- On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans le référentiel galiléen lié à 0 :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\{1,2,3\}/0)}{\mathrm{dt}} = P_{ext}(\overline{\{1,2,3\}} \to \{2,3\}/0) + P_{int}(\{1,2,3\})$$

$$\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}A.(\dot{\theta} + \dot{\psi}.\sin(\varphi))^2 + B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi)^2 + B.\dot{\varphi}^2}{\mathrm{dt}} = -2.k.\varphi.h^2.\dot{\varphi}$$

avec $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ constants :

$$A.(\dot{\theta} + \dot{\psi}.\sin(\varphi)).\dot{\varphi}.\cos(\varphi) - B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi).\dot{\varphi}.\sin(\varphi) + B.\ddot{\varphi}.\dot{\varphi} = -2.k.\varphi.h^2.\dot{\varphi}$$

$$A.(\dot{\theta} + \dot{\psi}.\sin(\varphi)).\cos(\varphi) - B.\dot{\psi}^2.\cos(\varphi).\sin(\varphi) + B.\ddot{\varphi} = -2.k.\varphi.h^2$$

Exercice 2 : Cabrage d'une moto

2.1 Présentation

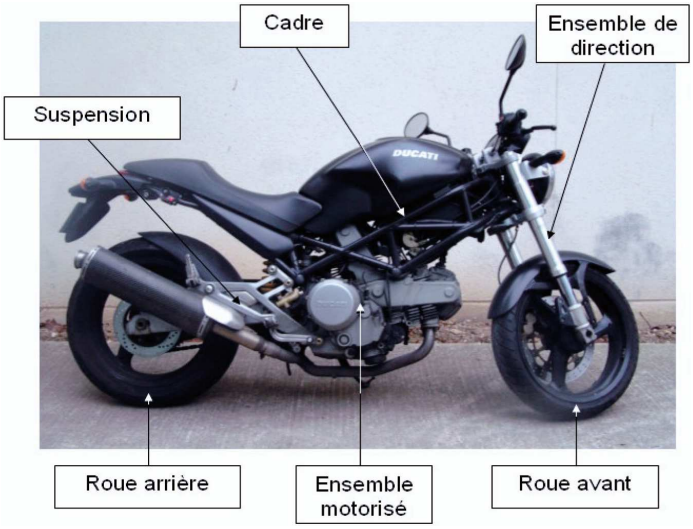
On étudie le comportement dynamique en phase d'accélération. On adopte une modélisation simplifiée, dans laquelle la moto est constituée de trois solides :

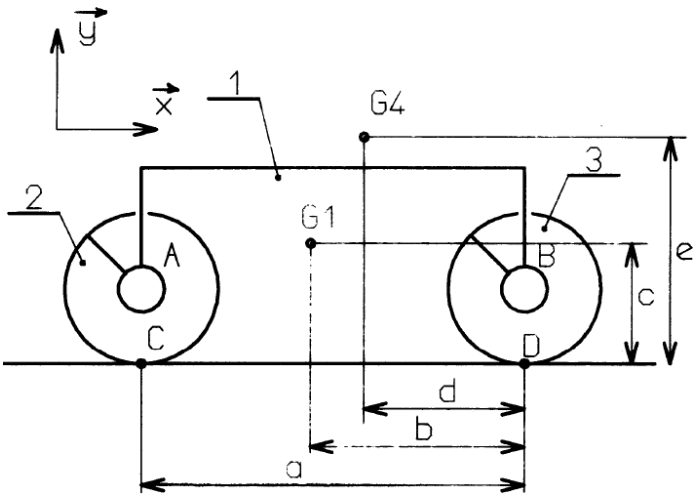
- cadre de la moto
- roue avant
- roue arrière

On note M_1 la masse du cadre seul, G_1 son centre de masse. Le pilote, noté 4, est considéré comme un solide de masse M_4, solidaire du cadre. On pourra noter 14 le solide constitué du cadre et du pilote. On note m la masse d'une roue, et I le moment d'inertie d'une roue par rapport à l'axe de la liaison pivot roue/châssis. On note A et D les centres d'inertie des roues. On note R le rayon d'une roue.

Les deux roues sont supposées identiques. On note $R = AC = BD$ le rayon des roues. Le mouvement est plan. Les hypothèses de calcul sont les suivantes:

- chaque roue est en contact ponctuel avec la route, considérée comme galiléenne
- on note 0 le référentiel de la route. Dans les conditions normales de conduite, les roues restent en contact avec le sol, sans glissement au niveau des points de contact. Bien entendu, il y a adhérence entre chaque roue et le sol. On note μ_0 le coefficient d'adhérence, identique pour les deux points de contact. On le suppose égal au coefficient de frottement.
- on note $\vec{z}$ la verticale ascendante et g l'accélération de la pesanteur.
- la moto se déplace en ligne droite





On note $\vec{v} = V\vec{x}$ le vecteur vitesse $\vec{V}_{(G,1/0)}$, où 0 représente la route, supposée galiléenne.

2.2 Questions

Chacune des deux roues est munie d'un frein à disque. On note C_{av} et C_{ar} la valeur algébrique des couples de freinage exercés par le châssis sur roues avant et arrière respectivement.

Q - 1 : *On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre les pneus et la route. Déterminer $\dot{V}$ en fonction de C_{av} et C_{ar}, et des autres paramètres utiles. Pour chaque application du PFD, on précisera le système isolé, et on fera un bilan des actions extérieures.*

Q - 2 : *Déterminer le torseur des actions mécaniques exercées par le châssis sur chaque roue par l'intermédiaire des liaisons pivot, en fonction de C_{av} et C_{ar}, des paramètres de masse et de la géométrie.*

Pour toute la suite, on néglige l'inertie des roues ($m = 0$ et $I = 0$).

Q - 3 : *Déterminer la valeur de C_{av} et C_{ar} à partir de laquelle il y a perte d'adhérence pour une roue au moins. On pose $\frac{C_{ar}}{C_{av}} = k$*

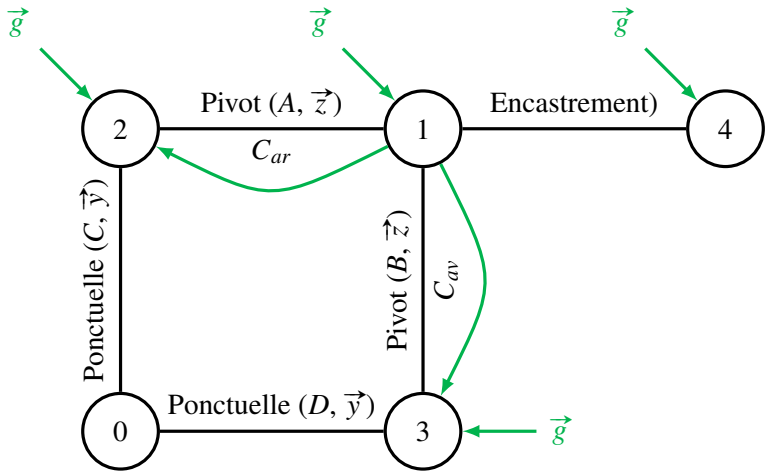
Q - 4 : *Déterminer l'expression de $\left|\dot{V}\right|$ en fonction de C_{av} et C_{ar} et des caractéristiques de la moto, pour C_{av} variant de 0 à l'infini. Tracer l'allure de la courbe $\left|\dot{V}\right|$ en fonction de C_{av}. On précisera les points remarquables.*

Q - 5 : *Déterminer la distance minimale de freinage, à partir d'un vitesse initiale V0.*

APPLICATION NUMÉRIQUE :

M	=	200 kg	μ_0	=	0,8 par temps sec	V_0	=	90 km/h
g	=	9,81 m.s^{-2}	μ_0	=	0,6 par temps de pluie	puis V_0	=	130 km.h-1

2.3 Graphe de structure



2.4 Actions mécaniques

- Action de la gravitation : $\mathcal{F}_{g\to S_i} = \left\{ \begin{array}{c} -m_i.g.\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_i}$
- Action de la route sur les roues :

- $\mathcal{F}_{0\to 2} = {}_C\left\{\begin{array}{c} T_2.\vec{x} + N_2.\vec{y} \\ 0 \end{array}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{cc} T_2 & - \\ N_2 & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\mathcal{F}_{0\to 3} = {}_D\left\{\begin{array}{c} T_3.\vec{x} + N_3.\vec{y} \\ 0 \end{array}\right\} = {}_D\left\{\begin{array}{cc} T_3 & - \\ N_3 & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- Action de 1 sur 2 :
  - action de liaison : ${}_A\left\{\begin{array}{c} X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y} \\ 0 \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
  - action du couple : ${}_A\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{ar}.\vec{z} \end{array}\right\}$
  - action de 1 sur 2 : $\mathcal{F}_{1\to 2} = {}_A\left\{\begin{array}{c} X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y} \\ C_{ar}.\vec{z} \end{array}\right\}$
- Action de 1 sur 3 :
  - action de liaison : ${}_B\left\{\begin{array}{c} X_{13}.\vec{x} + Y_{13}.\vec{y} \\ 0 \end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{cc} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
  - action du couple : ${}_B\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{av}.\vec{z} \end{array}\right\}$
  - action de 1 sur 2 : $\mathcal{F}_{1\to 3} = {}_B\left\{\begin{array}{c} X_{13}.\vec{x} + Y_{13}.\vec{y} \\ C_{av}.\vec{z} \end{array}\right\}$

2.5 Equation de mouvement

Pour déterminer l'équation du mouvement, il suffit d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la moto dans le repère galiléen lié au sol:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\,(\text{moto}/0) = P_{ext}(\overline{\text{moto}} \to \text{moto}/0) + P_{int}(\text{moto}) \quad \text{avec} \quad \text{moto} = \{1,2,3,4\}$$

2.5.1 Energie cinétique de la moto

$$\mathcal{E}_c\,(\text{moto}/0) = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{E}_c\,(S_i/0)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c\,(2/0) &= \frac{1}{2}.m.\vec{V}^2_{(A,2/0)} + \vec{\Omega}_{(2/0)}.\left(\mathbb{I}(2,0)\left[\vec{\Omega}_{(2/0)}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}.m.V^2 + \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{V}{R} \end{array}\right.{}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \left[\begin{array}{ccc} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{V}{R} \end{array}\right.{}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{2}.\left(m + \frac{I}{R}\right).V^2 = \mathcal{E}_c\,(3/0)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_c\,(\{1,4\}/0) = \frac{1}{2}.(M_1 + M_4).\vec{V}^2_{(G,\{1,4\}/0)} + \cancel{\vec{\Omega}_{(\{1,4\}/0)}}.\left(\mathbb{I}(\{1,4\},0)\left[\cancel{\vec{\Omega}_{(\{1,4\}/0)}}\right]\right) = \frac{1}{2}.(M_1 + M_4).V^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_c\,(\text{moto}/0) = \frac{1}{2}.\left(M_1 + M_2 + 2.m + \frac{I}{R}\right).V^2$$

2.5.2 Puissance des efforts extérieurs

- Puissance du poids sur la moto :

$$\begin{aligned}
P_{ext}(g \to \text{moto}/0) &= \sum_{i=1}^{4} \mathcal{F}_{g\to S_i} \otimes \mathcal{V}_{S_i/0} \\
&= {}_G\left\{ \begin{array}{c} -(M_1+M_4).g.\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes {}_G\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\} \cdots \\
&\quad \cdots + {}_A\left\{ \begin{array}{c} -m.g.\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes {}_A\left\{ \begin{array}{c} -\frac{V}{R}.\vec{z} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\} + {}_B\left\{ \begin{array}{c} -m.g.\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes {}_B\left\{ \begin{array}{c} -\frac{V}{R}.\vec{z} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\} \\
&= (M_1 + M_4 + 2.m)\,.\sin(\phi_g).V
\end{aligned}$$

- Puissance du sol sur la roue arrière :

$$\begin{aligned}
P_{ext}(0 \to 2/0) &= \mathcal{F}_{2\to 0} \otimes \mathcal{V}_{2/0} \\
&= {}_C\left\{ \begin{array}{c} T_2.\vec{x} + N_2.\vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} \otimes {}_C\left\{ \begin{array}{c} -\frac{V}{R}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = 0
\end{aligned}$$

- Puissance du sol sur la roue avant :

$$\begin{aligned}
P_{ext}(0 \to 3/0) &= \mathcal{F}_{3\to 0} \otimes \mathcal{V}_{3/0} \\
&= {}_D\left\{ \begin{array}{c} T_3.\vec{x} + N_3.\vec{y} \\ 0 \end{array} \right\} \otimes {}_D\left\{ \begin{array}{c} -\frac{V}{R}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = 0
\end{aligned}$$

2.5.3 Puissance des efforts intérieurs

- Puissance $1 \leftrightarrow 2$

$$\begin{aligned}
P_{int}(1 \leftrightarrow 2) &= -\mathcal{F}_{1\to 2} \otimes \mathcal{V}_{1/2} \\
&= -{}_A\left\{ \begin{array}{c} X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y} \\ C_{ar}.\vec{z} \end{array} \right\} \otimes {}_A\left\{ \begin{array}{c} \frac{V}{R}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{C_{ar}}{R}.V
\end{aligned}$$

- Puissance $1 \leftrightarrow 3$

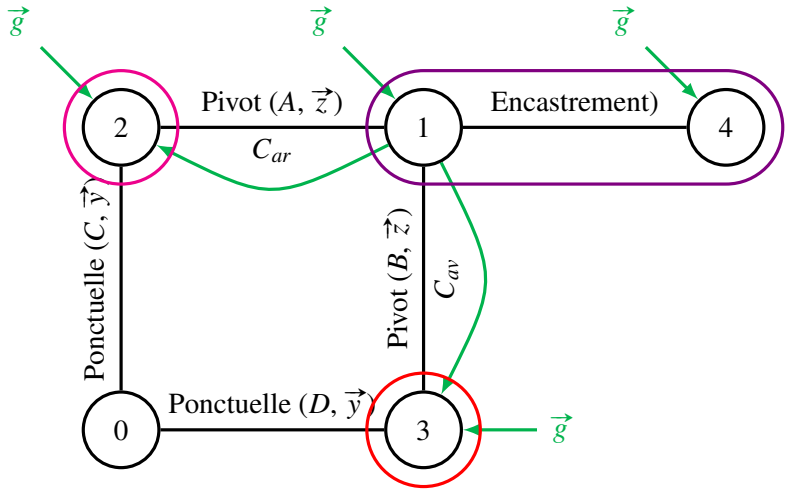
$$\begin{aligned}
P_{int}(1 \leftrightarrow 3) &= -\mathcal{F}_{1\to 3} \otimes \mathcal{V}_{1/3} \\
&= -{}_B\left\{ \begin{array}{c} X_{13}.\vec{x} + Y_{13}.\vec{y} \\ C_{av}.\vec{z} \end{array} \right\} \otimes {}_B\left\{ \begin{array}{c} \frac{V}{R}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{C_{av}}{R}.V
\end{aligned}$$

2.5.4 Equation de mouvement

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}_c\,(\text{moto}/0) &= P_{ext}(\overline{\text{moto}} \rightarrow \text{moto}/0) + P_{int}(\text{moto}) \quad \text{avec} \quad \text{moto} = \{1,2,3,4\} \\
\left(M_1 + M_2 + 2.m + \frac{I}{R}\right).\dot{V}.V &= (M_1 + M_4 + 2.m)\,.\,\sin(\phi_g).V - \frac{C_{ar}}{R}.V - \frac{C_{av}}{R}.V \\
\dot{V} &= \frac{R.\,(M_1 + M_4 + 2.m)\,.\,\sin(\phi_g) - C_{av} - C_{ar}}{(M_1 + M_2 + 2.m).R + I}
\end{aligned}
$$

2.6 Contact sol/moto

Pour déterminer l'action sur sol sur la moto, appliquons le PFD au solide 2, au solide 3 puis à l'ensemble $\{1,4\}$, dans le repère galiléen lié au sol:



2.7 PFD appliqué aux roues

2.7.1 Algorithme

- On isole la roue arrière
- On fait le BAME :
  - Action de la gravitation
  - Action du cadre 1
  - Action du sol 0
- On applique le PFD au solide 2 dans le repère galiléen lié au sol : $\mathcal{D}_{2/0} = \mathcal{F}_{\overline{2}\rightarrow 2}$

2.7.2 Torseur dynamique de la roue arrière

$$\mathcal{V}_{2/0} = {}_A\left\{\begin{array}{c} -\frac{V}{R}.\vec{z} \\ V.\vec{x} \end{array}\right\} \text{ comme } A \text{ est le centre d'inertie}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C}_{2/0} = {}_A\left\{\begin{array}{c} m.\vec{V}_{(A,2/0)} \\ \mathbb{I}(A,2)\left[\vec{\Omega}_{(2/0)}\right] \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} m.V.\vec{x} \\ -I.\frac{V}{R}.\vec{z} \end{array}\right\} \text{ comme } A \text{ est le centre d'inertie}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D}_{2/0} = = {}_A\left\{\begin{array}{c} m.\dot{V}.\vec{x} \\ -\frac{I}{R}.\dot{V}.\vec{z} \end{array}\right\}$$

2.7.3 Equations dynamiques de la roue arrière

$$\mathcal{D}_{2/0} = \mathcal{F}_{\overline{2}\to 2} = \mathcal{F}_{g\to 2} + \mathcal{F}_{1\to 2} + \mathcal{F}_{0\to 2}$$

$${}_A\left\{\begin{array}{c} m.\dot{V}.\vec{x} \\ -\frac{I}{R}.\dot{V}.\vec{z} \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} -m.g.\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array}\right\} + {}_A\left\{\begin{array}{c} X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y} \\ C_{ar}.\vec{z} \end{array}\right\} + {}_C\left\{\begin{array}{c} T_2.\vec{x} + N_2.\vec{y} \\ 0 \end{array}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{cc} T_2 & - \\ N_2 & - \\ - & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\text{Or } \vec{M}_{(A,0\to 2)} = \cancel{\vec{M}_{(C,0\to 2)}} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_{0\to 2} = -R.\vec{y} \wedge (T_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y}) = R.T_{12}.\vec{z}$$

$$\text{donc} \left\{\begin{array}{rcl} m.\dot{V} & = & m.g.\sin(\phi_g) + X_{12} + T_2 \\ 0 & = & -m.g.\cos(\phi_g) + Y_{12} + N_2 \\ -\frac{I}{R}.\dot{V} & = & C_{ar} + R.T_{12} \end{array}\right.$$

2.7.4 Equations dynamiques de la roue avant

$$\left\{\begin{array}{rcl} m.\dot{V} & = & m.g.\sin(\phi_g) + X_{13} + T_3 \\ 0 & = & -m.g.\cos(\phi_g) + Y_{13} + N_3 \\ -\frac{I}{R}.\dot{V} & = & C_{av} + R.T_{13} \end{array}\right.$$

2.8 PFD appliqué au cadre et au pilote

2.8.1 Algorithme

- On isole le cadre et son pilote
- On fait le BAME :
  - Action de la gravitation
  - Action de la roue arrière
  - Action de la roue avant
- On applique le PFD à l'ensemble $\{1,4\}$ dans le repère galiléen lié au sol : $\mathcal{D}_{\{/1,4\}0} = \mathcal{F}_{\overline{\{1,4\}}\to\{1,4\}}$

2.8.2 Torseur dynamique du cadre et du pilote

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\{1,4\}/0} &= {}_G\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ V.\vec{x}\end{array}\right\} \text{ comme } G \text{ est le centre d'inertie}\\
\Rightarrow \quad \mathcal{C}_{\{1,4\}/0} &= {}_G\left\{\begin{array}{c}M_{14}.\vec{V}_{(G,\{1,4\}/0)}\\ \mathbb{I}(\{1,4\},0)\,[\cancel{\vec{\Omega}_{(\{1,4\}/0)}}]\end{array}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{c}(M_1+M_4).V.\vec{x}\\ \vec{0}\end{array}\right\} \text{ comme } G \text{ est le centre d'inertie}\\
\Rightarrow \quad \mathcal{D}_{\{1,4\}/0} &= {}_G\left\{\begin{array}{c}M_{14}.\vec{A}_{(G,\{1,4\}/0)}\\ \vec{\delta}_{(G,\{1,4\}/0)}\end{array}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{c}(M_1+M_4).\dot{V}.\vec{x}\\ \vec{0}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

2.8.3 Position du centre d'inertie du cadre et de son pilote

Par définition $M_1.\overrightarrow{GG_1} + M_4.\overrightarrow{GG_4} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
M_1.\overrightarrow{GG_1} + M_4.\overrightarrow{GG_1} &= -M_4.\overrightarrow{G_1G_4}\\
\overrightarrow{G_1G} &= \frac{M_4}{M_1+M_4}.\overrightarrow{G_1G_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} &= \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A}\\
&= -\frac{M_4}{M_1+M_4}.\left[(b-d).\vec{x} + (e-c).\vec{y}\right] + (R-c).\vec{y} + (b-a).\vec{x}\\
&= \underbrace{\left[(b-a) - \frac{M_4}{M_1+M_4}.(b-d)\right]}_{x_A}.\vec{x} + \underbrace{\left[(R-c) - \frac{M_4}{M_1+M_4}.(e-c)\right]}_{y_G}.\vec{y}\\
\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B}\\
&= -\frac{M_4}{M_1+M_4}.\left[(b-d).\vec{x} + (e-c).\vec{y}\right] + (R-c).\vec{y} + b.\vec{x}\\
&= \underbrace{\left[b - \frac{M_4}{M_1+M_4}.(b-d)\right]}_{x_B}.\vec{x} + \underbrace{\left[(R-c) - \frac{M_4}{M_1+M_4}.(e-c)\right]}_{y_G}.\vec{y}
\end{aligned}$$

2.8.4 Bilan des efforts appliqués au cadre et au pilote

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\overline{\{1,4\}}\to\{1,4\}} &= \mathcal{F}_{g\to\{1,4\}} + \mathcal{F}_{2\to\{1,4\}} + \mathcal{F}_{3\to\{1,4\}}\\
&= {}_G\left\{\begin{array}{c}-(M_1+M_4).g.\vec{y}_g\\ \vec{0}\end{array}\right\} - {}_A\left\{\begin{array}{c}X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y}\\ C_{ar}.\vec{z}\end{array}\right\} - {}_B\left\{\begin{array}{c}X_{13}.\vec{x} + Y_{13}.\vec{y}\\ C_{av}.\vec{z}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{(G,1\to2)} &= \vec{M}_{(A,G\to1)}2 + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{R}_{1\to2} = C_{ar}.\vec{z} + (x_A.\vec{x} + y_G.\vec{y}) \wedge (X_{12}.\vec{x} + Y_{12}.\vec{y})\\
&= (C_{ar} + x_A.Y_{12} - y_G.X_{12})\,.\vec{z}\\
\vec{M}_{(G,1\to3)} &= (C_{av} + x_B.Y_{13} - y_G.X_{13})\,.\vec{z}
\end{aligned}$$

2.8.5 Equations dynamiques du cadre et du pilote

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\{/1,4\}0} &= \mathcal{F}_{\overline{\{1,4\}}\to\{1,4\}} \\
{}_G\left\{\begin{array}{c}(M_1+M_4).\dot{V}.\vec{x}\\ \vec{0}\end{array}\right\} &= {}_G\left\{\begin{array}{c}-(M_1+M_4).g.\vec{y}_g\\ \vec{0}\end{array}\right\} - {}_A\left\{\begin{array}{c}X_{12}.\vec{x}+Y_{12}.\vec{y}\\ (C_{ar}+x_A.Y_{12}-y_G.X_{12}).\vec{z}\end{array}\right\} - {}_B\left\{\begin{array}{c}X_{13}.\vec{x}+Y_{13}.\vec{y}\\ (C_{av}+x_B.Y_{13}-y_G.X_{13}).\vec{z}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(M_1+M_4).\dot{V} &=& (M_1+M_4).g.\sin(\phi_g)+X_{12}+X_{13}\\ 0 &=& -(M_1+M_4).g.\cos(\phi_g)+Y_{12}+Y_{13}\\ -0 &=& C_{ar}+x_A.Y_{12}-y_G.X_{12}+C_{av}+x_B.Y_{13}-y_G.X_{13}\end{array}\right.$$

2.9 Equations dynamiques

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}m.\dot{V} &=& m.g.\sin(\phi_g)+X_{12}+T_2\\ 0 &=& -m.g.\cos(\phi_g)+Y_{12}+N_2\\ -\frac{I}{R}.\dot{V} &=& C_{ar}+R.T_2\\ m.\dot{V} &=& m.g.\sin(\phi_g)+X_{13}+T_3\\ 0 &=& -m.g.\cos(\phi_g)+Y_{13}+N_3\\ -\frac{I}{R}.\dot{V} &=& C_{av}+R.T_3\\ (M_1+M_4).\dot{V} &=& (M_1+M_4).g.\sin(\phi_g)+X_{12}+X_{13}\\ 0 &=& -(M_1+M_4).g.\cos(\phi_g)+Y_{12}+Y_{13}\\ -0 &=& C_{ar}+x_A.Y_{12}-y_G.X_{12}+C_{av}+x_B.Y_{13}-y_G.X_{13}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}m.\dot{V}-m.g.\sin(\phi_g) &=& X_{12}+T_2\\ m.g.\cos(\phi_g) &=& Y_{12}+N_2\\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V}-\frac{1}{R}.C_{ar} &=& T_2\\ m.\dot{V}-m.g.\sin(\phi_g) &=& X_{13}+T_3\\ m.g.\cos(\phi_g) &=& Y_{13}+N_3\\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V}-\frac{1}{R}.C_{av} &=& T_3\\ (M_1+M_4).\dot{V}-(M_1+M_4).g.\sin(\phi_g) &=& X_{12}+X_{13}\\ (M_1+M_4).g.\cos(\phi_g) &=& Y_{12}+Y_{13}\\ -C_{ar}-C_{av} &=& x_A.Y_{12}-y_G.X_{12}+x_B.Y_{13}-y_G.X_{13}\end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} m.\dot{V} - m.g.\sin(\phi_g) \\ m.g.\cos(\phi_g) \\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V} - \frac{1}{R}.C_{ar} \\ m.\dot{V} - m.g.\sin(\phi_g) \\ m.g.\cos(\phi_g) \\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V} - \frac{1}{R}.C_{av} \\ (M_1+M_4).\dot{V} - (M_1+M_4).g.\sin(\phi_g) \\ (M_1+M_4).g.\cos(\phi_g) \\ -C_{ar} - C_{av} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_G & x_A & -y_G & x_B & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ T_2 \\ N_2 \\ T_3 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

La dernière équation traduit l'équilibre des couples pour maintenir les roues au sol.

$$\begin{bmatrix} m.\dot{V} - m.g.\sin(\phi_g) \\ m.g.\cos(\phi_g) \\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V} - \frac{1}{R}.C_{ar} \\ m.\dot{V} - m.g.\sin(\phi_g) \\ m.g.\cos(\phi_g) \\ -\frac{I}{R^2}.\dot{V} - \frac{1}{R}.C_{av} \\ (M_1+M_4).\dot{V} - (M_1+M_4).g.\sin(\phi_g) \\ (M_1+M_4).g.\cos(\phi_g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ T_2 \\ N_2 \\ T_3 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

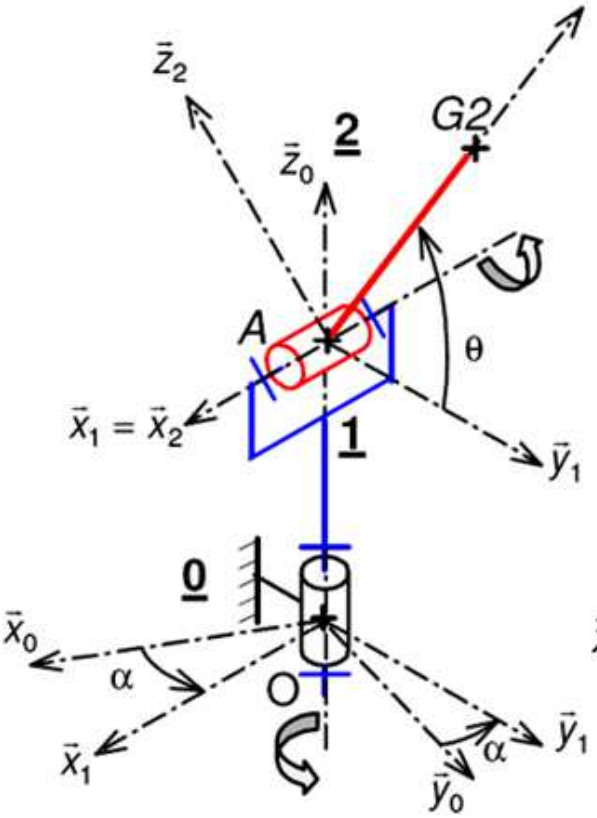
Exercice 3 : Robot ABB

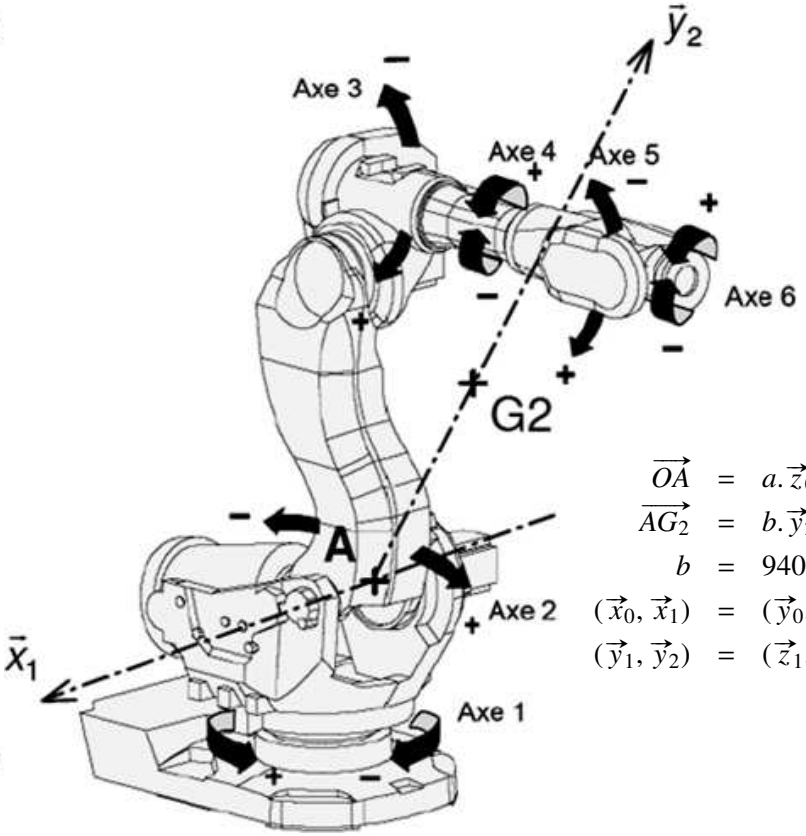
Le robot ABB IRB 7600 est un robot 6 axes utilisé dans l'industrie pour réaliser différentes opérations (palettisation, montage, ...) sur des chaînes de production.

On souhaite déterminer les couples moteur à exercer sur l'axe 1 et 2 ainsi que les efforts encaissés par les articulations pour une configuration particulière où les axes 3, 4, 5 et 6 sont verrouillés (bloqués). Configuration pour laquelle on suppose donc que le robot peut se réduire cinématiquement à deux solides dont on suppose connus les centres de gravité et les opérateurs d'inertie respectifs.

OBJECTIF : Déterminer les couples moteur à exercer sur l'axe 1 et 2

Données et hypothèses :





$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= a.\vec{z}_0 \\
\overrightarrow{AG_2} &= b.\vec{y}_2 \\
b &= 940 \text{ mm} \\
(\vec{x}_0, \vec{x}_1) &= (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha \\
(\vec{y}_1, \vec{y}_2) &= (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta
\end{aligned}$$

- Masse du solide S_2 de centre de gravité G_2 : $M_2 = 1064$ kg
- Masse du solide S_1 de centre de gravité O : M_1
- Matrice d'inertie du solide 2 en A exprimée dans la base 2 :

$$\mathbb{I}(A, S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_2 &= 105 \text{ kg.m}^2 & B_2 &= 37 \text{ kg.m}^2 \\ C_2 &= 81 \text{ kg.m}^2 & D_2 &= 28 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

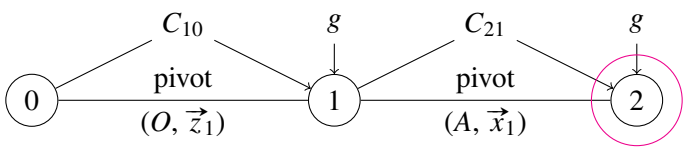
- Matrice d'inertie du solide 1 en O exprimée dans la base 1 :

$$\mathbb{I}(O, S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A_1 &= \text{kg.m}^2 & B_2 &= \text{kg.m}^2 \\ C_1 &= \text{kg.m}^2 \end{aligned}$$

- Caractéristiques cinématiques souhaitées :

$$\dot{\alpha}_{maxi} = 75 \text{ °/s} \quad ; \quad \dot{\theta}_{maxi} = 60 \text{ °}/s \quad ; \quad \ddot{\alpha}_{maxi} = 10 \text{ °/s}^2 \quad ; \quad \ddot{\theta}_{maxi} = 10 \text{ °/s}^2$$

Commençons par établir le graphe des liaisons :



Q - 1 : *Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide S_2 de manière à déterminer le couple moteur à exercer sur l'axe 2 $(A, \vec{x}_1)$* ***et les actions dans la liaison entre*** *S_1* ***et*** *S_2. Calculer C_{21} pour $\theta = 10°$ et pour les caractéristiques cinématiques maximales.*

- on isole le solide S_2
- on fait le BAME appliquées à S_2 :
  - Action de la gravitation sur S_2 : $\mathcal{F}_{g\to S_2} = {}_{G_2}\left\{ \begin{array}{c} -M_2.g.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$

    $\vec{M}_{(A_2,g\to S_2)} = \cancel{\vec{M}_{(G_2,g\to S_2)}} + \overrightarrow{A_2G_2} \wedge \vec{R}_{g\to S_2} = b.\vec{y}_2 \wedge -M_2.g.b.\vec{z}_1 = -M_2.g.\cos(\theta).\vec{x}_2$
  - Action de S_1 sur S_2 : $\mathcal{F}_{S_1\to S_2} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{cc} X_{21} & C_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_2}$
- on applique le PFD au solide S_2 dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$:

  $\mathcal{F}_{g\to S_2} + \mathcal{F}_{S_1\to S_2} = \mathcal{D}_{S_2/\mathcal{R}_0}$

Déterminons maintenant $\mathcal{D}_{S_2/\mathcal{R}_0}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}_0} &= {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
\vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)} &= M_2.\overrightarrow{AG_2} \wedge \cancel{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)}} + \mathbb{I}(A,S_2)\left[\vec{\Omega}_{(S_2/\mathcal{R}_0)}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} . \left[\begin{array}{c} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}.\sin(\theta) \\ \dot{\alpha}.\cos(\theta) \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \\
&= A_2.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + \dot{\alpha}.\left[(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)).\vec{y}_2 + (-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)).\vec{z}_2\right] \\
\vec{\delta}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)} &= M_2.\cancel{\vec{V}_{(A/\mathcal{R}_0)}} \wedge \vec{V}_{(G_2/\mathcal{R}_0)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(2/0)} \wedge \vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)} \\
&= \left[\begin{array}{c} A_2.\ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha}.(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)) + \dot{\alpha}.\dot{\theta}(B_2.\cos(\theta) + D_2.\sin(\theta)) \\ \ddot{\alpha}.(-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)) - \dot{\alpha}.\dot{\theta}(D_2.\cos(\theta) + C_2.\sin(\theta)) \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} + \ldots \\
&\quad \ldots \left[\begin{array}{c} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}.\sin(\theta) \\ \dot{\alpha}.\cos(\theta) \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \wedge \left[\begin{array}{c} A_2.\dot{\theta} \\ \dot{\alpha}.(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)) \\ \dot{\alpha}.(-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)) \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \\
&= \left[\begin{array}{c} A_2.\ddot{\theta} + \dot{\alpha}^2.\cos(\theta).\sin(\theta).(C_2 - B_2) \\ \ddot{\alpha}.(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)) + \dot{\alpha}.\dot{\theta}(B_2.\cos(\theta) + D_2.\sin(\theta)) + \dot{\theta}.\dot{\alpha}.((A_2 - C_2).\cos(\theta) + D_2.\sin(\theta)) \\ \ddot{\alpha}.(-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)) - \dot{\alpha}.\dot{\theta}(D_2.\cos(\theta) + C_2.\sin(\theta)) + \dot{\theta}.\dot{\alpha}.((B_2 - A_2).\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)) \end{array} \right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)} &= \cancel{\vec{V}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)}} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} = -b.\vec{y}_2 \wedge \left(\dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_2\right) = -b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2 + b.\dot{\theta}.\vec{z}_2 \\
\vec{A}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{V}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)}\right)\right]_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{(2/0)} \wedge \vec{V}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(-b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2 + b.\dot{\theta}.\vec{z}_2\right)\right]_{\mathcal{R}_2} + \left(\dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_2\right) \wedge \left(-b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2 + b.\dot{\theta}.\vec{z}_2\right) \\
&= b.\left(\sin(\theta).\dot{\theta}.\dot{\alpha} - b.\cos(\theta).\ddot{\alpha}\right).\vec{x}_2 + b.\ddot{\theta}.\vec{z}_2 - b.\cos(\theta).\dot{\alpha}^2.\vec{y}_1 + b.\dot{\alpha}.\dot{\theta}.\sin(\theta).\vec{x}_2 - b.\dot{\theta}^2.\vec{y}_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
X_{21} &= M_2.b.\left[\left(\sin(\theta).\dot{\theta}.\dot{\alpha} - \cos(\theta).\ddot{\alpha}\right) + \dot{\alpha}.\dot{\theta}.\sin(\theta)\right] \\
Y_{21} &= M_2.\left[g.\sin(\theta) - b.\cos(\theta)^2.\dot{\alpha}^2 - b.\dot{\theta}^2\right] \\
Z_{21} &= M_2.\left[g.\cos(\theta) + b.\cos(\theta).\sin(\theta).\dot{\alpha}^2 + b.\ddot{\theta}\right] \\
C_{21} &= -M_2.g.b.\cos(\theta) + A_2.\ddot{\theta} + \dot{\alpha}^2.\cos(\theta).\sin(\theta).(C_2 - B_2) \\
M_{21} &= \ddot{\alpha}.(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)) + \dot{\alpha}.\dot{\theta}(B_2.\cos(\theta) + D_2.\sin(\theta)) + \dot{\theta}.\dot{\alpha}.((A_2 - C_2).\cos(\theta) + D_2.\sin(\theta)) \\
N_{21} &= \ddot{\alpha}.(-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)) - \dot{\alpha}.\dot{\theta}(D_2.\cos(\theta) + C_2.\sin(\theta)) + \dot{\theta}.\dot{\alpha}.((B_2 - A_2).\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta))
\end{aligned}$$

Que se serait-il passé avec une méthode énergétique. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide 2 dans le repère galiléen lié au solide 0 :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(2/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}} = P_{ext}(\overline{2} \to 2/\mathcal{R}_0)$$

- Calculons l'énergie cinétique du solide 2 dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(2/\mathcal{R}_0) &= \frac{1}{2}.\mathcal{C}_{2/0} \otimes \mathcal{V}_{2/0} \quad \text{avec} \quad \mathcal{V}_{2/0} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\} \\
\vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)} &= A_2.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + \dot{\alpha}.\left[(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)).\vec{y}_2 + (-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)).\vec{z}_2\right] \\
\mathcal{E}_c(2/\mathcal{R}_0) &= \frac{1}{2}\left[A_2.\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2.\left(B_2.\sin(\theta)^2 + C_2.\cos(\theta)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

- Calculons la puissance des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned}
P_{(g\to S_2/\mathcal{R}_0)} &= \mathcal{F}_{g\to S_2} \otimes \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}_0} = {}_{G_2}\left\{\begin{array}{c} -M_2.g.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\} \otimes {}_{G_2}\left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 \\ -b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2 + b.\dot{\theta}.\vec{z}_2 \end{array}\right\} = -b.M_2.g.\dot{\theta}.\cos(\theta) \\
P_{(S_1\to S_2/\mathcal{R}_0)} &= -\mathcal{F}_{S_2\to S_1} \otimes \mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}_0} = -{}_A\left\{\begin{array}{c} - \\ C_{21}.\vec{x}_1 + M_{21}.\vec{y}_1 + N_{21}.\vec{z}_1 \end{array}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\} = C_{21}.\dot{\theta} + N_{21}.\dot{\alpha}
\end{aligned}$$

- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide 2 dans le repère galiléen lié au solide 0 :

$$A_2.\ddot{\theta}.\dot{\theta} + \ddot{\alpha}.\dot{\alpha}.\left(B_2.\sin(\theta)^2 + C_2.\cos(\theta)^2\right) + \dot{\alpha}^2.\dot{\theta}.\cos(\theta).\sin(\theta).(B_2 - C_2) = -b.M_2.g.\dot{\theta}.\cos(\theta) + C_{21}.\dot{\theta} + N_{21}.\dot{\alpha}$$

  Il faut donc connaître N_{21}.

Q - 2 : *Proposer une démarche pour calculer le couple moteur à exercer sur l'axe 1* $(O, \vec{z}_0)$.

On vient de voir que le PDF est assez violent mais nécessaire pour calculer les efforts de liaison. On demande ici simplement le couple moteur. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\{1, 2\}$ dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$.

- Calculons l'énergie cinétique de l'ensemble $\{1,2\}$ dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(\{1,2\}/\mathcal{R}_0) &= \frac{1}{2}.\mathcal{C}_{2/0}\otimes\mathcal{V}_{2/0}+\frac{1}{2}.\mathcal{C}_{1/0}\otimes\mathcal{V}_{1/0} \quad \text{avec} \quad \mathcal{V}_{2/0}=\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}.\vec{z}_1+\dot{\theta}.\vec{x}_1\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._A \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{1/0}=\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._O\\
\vec{V}_{(G_2,S_2/\mathcal{R}_0)} &= -b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2+b.\dot{\theta}.\vec{z}_2\\
\vec{\sigma}_{(A,S_2/\mathcal{R}_0)} &= A_2.\dot{\theta}.\vec{x}_2+\dot{\alpha}.\left[(B_2.\sin(\theta)-D_2.\cos(\theta)).\vec{y}_2+(-D_2.\sin(\theta)+C_2.\cos(\theta)).\vec{z}_2\right]\\
\vec{\sigma}_{(O,S_1/\mathcal{R}_0)} &= M_1.\cancel{\overrightarrow{OO}}\wedge\cancel{\vec{V}_{(O/\mathcal{R}_0)}}+\mathbb{I}(O,S_1)\left[\dot{\alpha}.\vec{z}_1\right]=\dot{\alpha}.C_1.\vec{z}_1\\
\mathcal{E}_c(\{1,2\}/\mathcal{R}_0) &= \frac{1}{2}\left[A_2.\dot{\theta}^2+\dot{\alpha}^2.\left(B_2.\sin(\theta)^2+C_2.\cos(\theta)^2\right)+\dot{\alpha}^2.C_1\right]
\end{aligned}$$

- Calculons la puissance des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned}
P_{(g\to S_2/\mathcal{R}_0)} &= \mathcal{F}_{g\to S_2}\otimes\mathcal{V}_{S_2/\mathcal{R}_0}=\left.\left\{\begin{array}{c}-M_2.g.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._{G_2}\otimes\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}.\vec{z}_1+\dot{\theta}.\vec{x}_1\\ -b.\cos(\theta).\dot{\alpha}.\vec{x}_2+b.\dot{\theta}.\vec{z}_2\end{array}\right\}\right._{G_2}=-b.M_2.g.\dot{\theta}.\cos(\theta)\\
P_{(g\to S_1/\mathcal{R}_0)} &= \mathcal{F}_{g\to S_1}\otimes\mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}_0}=\left.\left\{\begin{array}{c}-M_1.g.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._O\otimes\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._O=0\\
P_{(0\to S_1/\mathcal{R}_0)} &= \mathcal{F}_{0\to S_1}\otimes\mathcal{V}_{S_1/\mathcal{R}_0}=\left.\left\{\begin{array}{cc}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ Z_{10} & C_{10}\end{array}\right\}\right._{\mathcal{R}_0}\otimes\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\alpha}.\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._O=C_{10}.\dot{\alpha}
\end{aligned}$$

- Calculons la puissance des efforts intérieurs :

$$P_{int}(S_2,S_1) = \mathcal{F}_{S_1\to S_2\to}\otimes\mathcal{V}_{S_2/S_1}=\left.\left\{\begin{array}{cc}X_{21} & C_{21}\\ Y_{21} & M_{21}\\ Z_{21} & N_{21}\end{array}\right\}\right._{\mathcal{B}_2}\otimes\left.\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}.\vec{x}_2\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._A=C_{21}.\dot{\theta}$$

- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\{1,2\}$ dans le repère galiléen $\mathcal{R}_0$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(\{1,2\}/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}}=P_{(g\to S_2/\mathcal{R}_0)}+P_{(g\to S_1/\mathcal{R}_0)}+P_{(0\to S_1/\mathcal{R}_0)}+P_{int}(S_2,S_1)$$

$$A_2.\ddot{\theta}.\dot{\theta}+\ddot{\alpha}.\dot{\alpha}.\left(B_2.\sin(\theta)^2+C_2.\cos(\theta)^2+C_1\right)+\dot{\alpha}^2.\dot{\theta}.\cos(\theta).\sin(\theta).(B_2-C_2)=-b.M_2.g.\dot{\theta}.\cos(\theta)+C_{10}.\dot{\alpha}+C_{21}.\dot{\theta}$$

Autre méthode avec le théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble $\{1,2\}$ dans le repère galiléen lié au bâti 0, calculé au point A et en projection sur $\vec{z}_0$:

- On isole l'ensemble $\{1,2\}$
- On fait le BAME appliquées à $\{1,2\}$:
  - action de $g\to 1$: $\mathcal{F}_{g\to 1}=\left.\left\{\begin{array}{c}-M_1.g.\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._O$
  - action de $g\to 2$: $\mathcal{F}_{g\to 2}=\left.\left\{\begin{array}{c}-M_2.g.\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{array}\right\}\right._{G_2}$
  - action de $0\to 1$: $\mathcal{F}_{0\to 1}=\left.\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_{0\to 1}\\ \vec{M}_{(O,0\to 1)}\end{array}\right\}\right._O$ avec $\vec{M}_{(O,0\to 1)}.\vec{z}_0=C_{10}$
- On applique le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\{1,2\}$ dans le repère galiléen lié au bâti 0, calculé au point A et en projection sur $\vec{z}_0$:

  $\vec{\delta}_{(A,\{1,2\}/0)}.\vec{z}_0=\left(\vec{M}_{(A,g\to 1)}+\vec{M}_{(A,g\to 2)}+\vec{M}_{(A,0\to 1)}\right).\vec{z}_0$ Or

$$
\begin{aligned}
\vec{\delta}_{(A,\{1,2\}/0)}.\vec{z}_0 &= \vec{\delta}_{(A,1/0)}.\vec{z}_0 + \vec{\delta}_{(A,2/0)}.\vec{z}_0 \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(A,1/0)}.\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} - \vec{\sigma}_{(A,1/0)}.\cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_0)\right]_0} + \vec{z}_0.\left(M_1.\cancel{\vec{V}_{(A/0)}} \wedge \vec{V}_{(O/0)}\right)\ldots \\
&\quad \ldots + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(A,2/0)}.\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} - \vec{\sigma}_{(A,2/0)}.\cancel{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{z}_0)\right]_0} + \vec{z}_0.\left(M_2.\cancel{\vec{V}_{(A/0)}} \wedge \vec{V}_{(G_2/0)}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(A,1/0)}.\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{(A,2/0)}.\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\vec{\sigma}_{(O,1/0)} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{p}_{(1/0)}\right).\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\left(M_2.\overrightarrow{AG_2} \wedge \cancel{\vec{V}_{(A,2/0)}} + \mathbb{I}(A,2)\left[\vec{\Omega}_{(2/0)}\right]\right).\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(M_1.\cancel{\overrightarrow{OO}} \wedge \cancel{\vec{V}_{(O,1/0)}} + \mathbb{I}(O,1)\left[\vec{\Omega}_{(1/0)}\right] - a.\vec{z}_0 \wedge M_1.\cancel{\vec{V}_{(O,1/0)}}\right).\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{I}(A,2)\left[\vec{\Omega}_{(2/0)}\right]\right).\vec{z}_0}{\mathrm{dt}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}\right).\vec{z}_0\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\left(\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}.\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}.\sin(\theta) \\ \dot{\alpha}.\cos(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}\right).\vec{z}_0\right] \\
&= C_1.\ddot{\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\left(A_2.\dot{\theta}.\vec{x}_1 + \dot{\alpha}.\left[(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)).\vec{y}_2 + (-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)).\vec{z}_2\right]\right).\vec{z}_1\right] \\
&= C_1.\ddot{\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\dot{\alpha}.\left[(B_2.\sin(\theta) - D_2.\cos(\theta)).\sin(\theta) + (-D_2.\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)).\cos(\theta)\right]\right] \\
&= C_1.\ddot{\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\dot{\alpha}.\left[B_2.\sin(\theta)^2 - 2.D_2.\cos(\theta).\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)^2\right]\right] \\
&= C_1.\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}.\left[B_2.\sin(\theta)^2 - 2.D_2.\cos(\theta).\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)^2\right]\ldots \\
&\quad \ldots + \dot{\alpha}.\dot{\theta}.\left[2.B_2.\sin(\theta).\cos(\theta) - 2.D_2.\left(-\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right) - 2.C_2.\sin(\theta).\cos(\theta)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et } \left(\vec{M}_{(A,g\to1)} + \vec{M}_{(A,g\to2)} + \vec{M}_{(A,0\to1)}\right).\vec{z}_0 &= \left(\cancel{\vec{M}_{(O,g\to1)}} + \cancel{\overrightarrow{AO} \wedge \vec{R}_{g\to1}} + \cancel{\vec{M}_{(G_2,g\to2)}} + \overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{R}_{g\to2} + \vec{M}_{(A,0\to1)}\right).\vec{z}_0 \\
&= C_{10}
\end{aligned}
$$

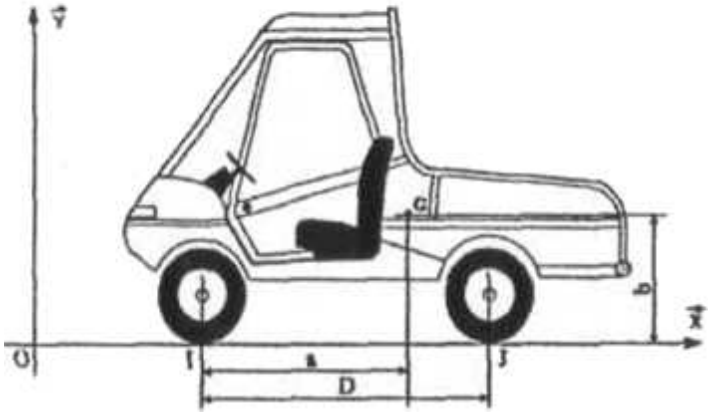
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad C_{10} &= C_1.\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}.\left[B_2.\sin(\theta)^2 - 2.D_2.\cos(\theta).\sin(\theta) + C_2.\cos(\theta)^2\right]\ldots \\
&\quad \ldots + \dot{\alpha}.\dot{\theta}.\left[2.B_2.\sin(\theta).\cos(\theta) - 2.D_2.\left(-\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right) - 2.C_2.\sin(\theta).\cos(\theta)\right]
\end{aligned}
$$

Pour obtenir les mêmes équations par théorème de l'énergie et PFD, il faudrait obtenir les 5 autres équations issues de l'application du PFD au solide 1.

Exercice 4 : Véhicule EXEL

L'étude porte sur un prototype de véhicule utilitaire électrique de petite dimension, proposé par la société EXEL. Le but du jeu est de déterminer les capacités du véhicule et en particulier la capacité d'accélération en côte.

CARACTERISTIQUES DU VEHICULE



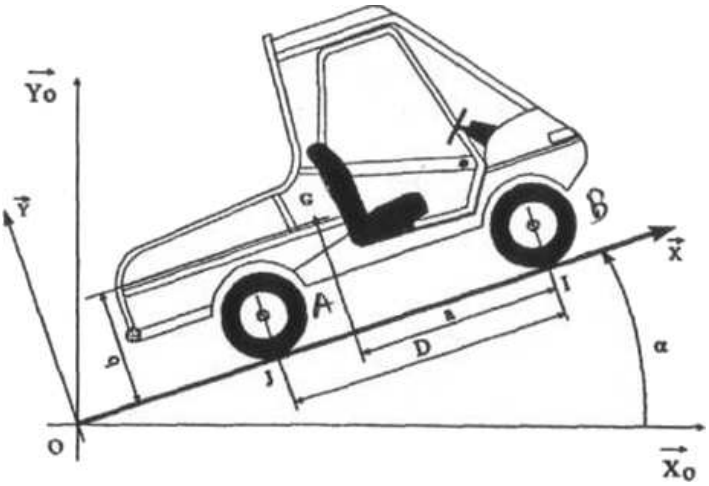
Masse totale en charge	M	1322 kg
Diamètres des roues	d	0.542 m
Coefficient de frottement sur route sèche	f	0.75
Coefficient de résistance au roulement	μ	0.004 m
Rendement de la transmission	η	0.95
Entraxe des essieux (empattement)	D	1.87 m
Position du centre de gravité en charge	a	1.2 m
	b	0.7 m
Rayon de braquage	L	4 m
Distance entre roues droite et gauche	e	1.2 m

Pour nommer les pièces, on leur associe des indices. Ainsi, la route sera notée **0**, la roue avant **3**, la roue arrière **2** et la caisse de la voiture **1**.

On considère le véhicule en charge, en démarrage en côte.

On recherche l'accélération maximale dans ces conditions extrêmes. Seules les roues avant sont motrices. Le couple moteur est supposé constant au cours du démarrage et conduit à un couple à la roue de C_m= -700 N.m (le signe est tel que le couple soit effectivement moteur).

On néglige dans cette partie la résistance au roulement (μ = 0 m) ainsi que l'inertie et la masse des roues.



Q - 1 : *Donner le torseur cinématique en fonction de la vitesse V ($\|\vec{V}_{(G,1/0)}\| = V$) du véhicule. En déduire le torseur cinétique.*

$$\mathcal{V}_{1/0} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V.\vec{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\sigma}_{(G,1/0)} = M.\cancel{\overrightarrow{GG}} \wedge \vec{V}_{(G,1/0)} + \mathbb{I}(G,1)\left[\cancel{\vec{\Omega}_{(1/0)}}\right] = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{C}_{1/0} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} M.V.\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Q - 2 : *On note $\gamma = \dot{V}$ ($\|\vec{A}_{(G,1/0)}\| = \gamma = \dot{V}$) l'accélération du véhicule recherchée. Déterminer le torseur dynamique du véhicule par rapport au sol en fonction de γ et des caractéristiques techniques et de la géométrie.*

$$\vec{\delta}_{(G,1/0)} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\sigma}_{(G,1/0)}\right)\right]_0 + M.\vec{V}_{(G/0)} \wedge \vec{V}_{(G/0)} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{D}_{1/0} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} M.\dot{V}.\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} M.\gamma(t).\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Q - 3 : *On isole le véhicule et ses roues. Donner les torseurs d'actions mécaniques s'exerçant sur le système.*
Les torseurs dynamiques des roues sont nuls puisqu'on néglige l'inertie et les masses des roues :

$$\mathcal{D}_{\{1,2,3\}/0} = \mathcal{D}_{1/0} + \cancel{\mathcal{D}_{2/0}} + \cancel{\mathcal{D}_{3/0}} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} M.\gamma(t).\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Q - 4 : *En isolant une roue arrière, montrer que l'effort du sol sur la roue arrière est parallèle à $\vec{y}$.*

- on isole la roue arrière

- on fait le BAME exercées sur 2. On considère le problème comme étant plan
  - action de 1 sur 2 : $\mathcal{F}_{1\to 2} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
  - action de 0 sur 2 : $\mathcal{F}_{0\to 2} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{02} & - \\ Y_{02} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{J\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- on applique le PFD à 2 dans le repère galiléen lié à 0

$$\cancel{\mathcal{D}_{2/0}} = \mathcal{F}_{2\to 2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \cancel{\vec{M}_{(A,1\to 2)}.\vec{z}} + \vec{M}_{(A,0\to 2)}.\vec{z} = \left[\cancel{\vec{M}_{(J,0\to 2)}} + \overrightarrow{AJ} \wedge (X_{02}.\vec{x} + Y_{02}.\vec{y})\right].\vec{z}$$
$$= (X_{02}.\vec{x} + Y_{02}.\vec{y}).\left[\vec{z} \wedge \left(-\frac{1}{2}d.\vec{y}\right)\right] = X_{02}.\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad X_{02} = 0$$

Q - 5 : *En isolant une roue avant, déterminer la composante tangentielle de frottement en fonction du couple moteur C_m.*

- on isole la roue avant
- on fait le BAME exercées sur 3.
  - action de 1 sur 3 : $\mathcal{F}_{1\to 3} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{13} & - \\ Y_{13} & - \\ - & C_m \end{array} \right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
  - action de 0 sur 3 : $\mathcal{F}_{0\to 3} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{03} & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{I\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- on applique le PFD à 3 dans le repère galiléen lié à 0

$$\cancel{\mathcal{D}_{3/0}} = \mathcal{F}_{3\to 3} \quad \Rightarrow \quad 0 = \vec{M}_{(B,1\to 3)}.\vec{z} + \vec{M}_{(B,0\to 3)}.\vec{z} = C_m + \left[\cancel{\vec{M}_{(I,0\to 3)}} + \overrightarrow{BI} \wedge (X_{03}.\vec{x} + Y_{03}.\vec{y})\right].\vec{z}$$
$$= C_m + (X_{03}.\vec{x} + Y_{03}.\vec{y}).\left[\vec{z} \wedge \left(-\frac{1}{2}d.\vec{y}\right)\right] = C_m + X_{03}.\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad X_{03} = -\frac{2}{d}.C_m$$

Q - 6 : *En isolant le véhicule et ses roues, déterminer l'accélération maximale permise par le couple moteur. Effectuer l'application numérique avec $\alpha = 10°$.*

- On isole le véhicule et ses roues
- On fait le BAME exercées sur $\{1, 2, 3\}$
  - action de g sur 1 : $\mathcal{F}_{g\to 1} = \left\{ \begin{array}{c} -M.g.\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G}$
  - action de 0 sur 2 : $\mathcal{F}_{0\to 2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & - \\ Y_{02} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{I\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
  - action de 0 sur 3 : $\mathcal{F}_{0\to 3} = \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{2}{d}.C_m & - \\ Y_{03} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{J\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- On applique le PFD à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans le repère galiléen 0:

$\mathcal{D}_{\{1,2,3\}/0} = \mathcal{F}_{g\to 1} + \mathcal{F}_{0\to 2} + \mathcal{F}_{0\to 3}$ Plaçons cette égalité au point G

$$\vec{M}_{(G,0\to 2)} = \cancel{\vec{M}_{(J,0\to 2)}} + \overrightarrow{GJ} \wedge \vec{R}_{0\to 2} = ((a-D).\vec{x} - b.\vec{y}) \wedge Y_{02}.\vec{y} = -(D-a).Y_{02}.\vec{z}$$
$$\vec{M}_{(G,0\to 3)} = \cancel{\vec{M}_{(I,0\to 3)}} + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R}_{0\to 3} = (a.\vec{x} - b.\vec{y}) \wedge \left(-\frac{d}{2}.C_m.\vec{x} + Y_{03}.\vec{y}\right) = \left[a.Y_{03} - b.\frac{d}{2}.C_m\right].\vec{z}$$

$$\mathcal{D}_{\{1,2,3\}/0} = \mathcal{F}_{g\to 1} + \mathcal{F}_{0\to 2} + \mathcal{F}_{0\to 3} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} M.\gamma(t).\vec{x} & = & -M.g.\vec{y}_0 - \frac{2}{d}.C_m.\vec{x} + (Y_{02}+Y_{03}).\vec{y} \\ \vec{0} & = & \vec{0} - (D-a).Y_{02}.\vec{z} + \left[a.Y_{03} - b.\frac{d}{2}.C_m\right].\vec{z} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} M.\gamma(t) & = & -M.g.\sin(\alpha) - \frac{2}{d}.C_m \\ 0 & = & -M.g.\cos(\alpha) + Y_{02} + Y_{03} \\ 0 & = & -(D-a).Y_{02} + a.Y_{03} - b.\frac{d}{2}.C_m \end{array} \right.$$

La première équations conduit à :

$$\gamma_{max} = -g.\sin(\alpha) - \frac{2}{d.M}.C_m = \frac{2\times 700}{0,542\times 1322} - 9,81\times\sin(10) = 0,25 \text{ m/s}$$

Q - 7 : *Vérifier que les roues avant ne patinent pas sur le sol.*
En jouant sur la deuxième et la troisième équation obtenue avec le PFD :

$$0 = (a+D-a).Y_{03} - (D-a).M.g.\cos(\alpha) + b.X_{03} \quad \Rightarrow \quad Y_{03} = \frac{D-a}{D}.M.g.\cos(\alpha) - \frac{b}{D}.X_{03}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_{03}}{Y_{03}} &= \frac{1}{\frac{D-a}{D.X_{03}}.M.g.\cos(\alpha) - \frac{b}{D}} = \frac{1}{\frac{D-a}{D.M.(\gamma_{max}+g.\sin(\alpha))}.M.g.\cos(\alpha) - \frac{b}{D}} \\ &= \frac{1}{\frac{1-\frac{a}{D}}{\frac{\gamma_{max}}{g.\cos(\alpha)} + \tan(\alpha)} - \frac{b}{D}} = \frac{D}{\frac{D-a}{\frac{\gamma_{max}}{g.\cos(\alpha)} + \tan(\alpha)} - b} = \frac{1,87}{\frac{1,87-1,2}{\frac{0,2}{9,81.\cos(10)} + \tan(10)} - 0,7} \approx 0,71 < 0,75 = f \end{aligned}$$

L'effort tangentiel est donc inférieur à l'effort tangentiel maximal admissible ; les roues avant ne patinent pas sur le sol.

Q - 8 : *Dans le cas d'un démarrage au couple maximal, en côte, lorsque le véhicule est vide (masse totale avec conducteur de M = 1000 kg), y a-t-il patinage des roues avant ?*
Le véhicule est plus léger. L'accélération maximale est donc augmentée :

$$\gamma_{max} = \frac{2\times 700}{0,542\times 1000} - 9,81\times\sin(10) = 0,88 \text{ m/s}$$

$$\frac{X_{03}}{Y_{03}} = \frac{1,87}{\frac{1,87-1,2}{\frac{0,88}{9,81.\cos(10)} + \tan(10)} - 0,7} \approx 1.03 \geq 0,75 = f$$

Il y a donc patinage des roues

Q - 9 : *Déterminer la pente maximale que le véhicule puisse gravir.*
On considère une accélération nulle pour la pente maximale :

$$0 = -M.g.\sin(\alpha) - \frac{2}{d}.C_m \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{d.M.g}.C_m\right) = \arcsin\left(\frac{2}{0,542\times 1000\times 9,81}.700\right) \approx 15°$$