

Interpolation, intégration et dérivation numérique

Ingénierie numérique et simulations

LYCÉE CARNOT (DIJON), 2013 - 2014

Germain Gondor

Sommaire

- 1 Interpolation et approximation de fonctions
- 2 Intégration numérique
- 3 Dérivation numérique

Sommaire

- 1 Interpolation et approximation de fonctions
 - Définitions
 - Interpolation polynomiale
 - Interpolation par morceaux
 - Approximation polynomiale par moindres carrés
- 2 Intégration numérique
- 3 Dérivation numérique

DÉFINITION: Interpolation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction (dans un ensemble donné), passant par un certain nombre de points imposés.

DÉFINITION: Interpolation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction (dans un ensemble donné), passant par un certain nombre de points imposés.

L'interpolation est utile lorsqu'une loi est donnée à partir d'une liste de points et qu'il est nécessaire d'évaluer le résultat en des points intermédiaires. Nous verrons par la suite que les fonctions d'interpolations sont aussi à la base de l'intégration et de la dérivation numérique.

DÉFINITION: Interpolation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction (dans un ensemble donné), passant par un certain nombre de points imposés.

L'interpolation est utile lorsqu'une loi est donnée à partir d'une liste de points et qu'il est nécessaire d'évaluer le résultat en des points intermédiaires. Nous verrons par la suite que les fonctions d'interpolations sont aussi à la base de l'intégration et de la dérivation numérique.

DÉFINITION: Approximation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction passant "au mieux" à proximité des points donnés.

DÉFINITION: Interpolation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction (dans un ensemble donné), passant par un certain nombre de points imposés.

L'interpolation est utile lorsqu'une loi est donnée à partir d'une liste de points et qu'il est nécessaire d'évaluer le résultat en des points intermédiaires. Nous verrons par la suite que les fonctions d'interpolations sont aussi à la base de l'intégration et de la dérivation numérique.

DÉFINITION: Approximation

Méthode qui consiste à déterminer une fonction passant "au mieux" à proximité des points donnés.

Une approximation est utile lorsque une loi théorique est recherchée à partir de points de mesure (nombreux, mais entachés de bruit de mesure).

Interpolation polynomiale

DÉFINITION: Interpolation polynomiale

Interpolation où la fonction est recherchée dans l'ensemble des polynômes.

Interpolation polynomiale

DÉFINITION: Interpolation polynomiale

Interpolation où la fonction est recherchée dans l'ensemble des polynômes.

En exprimant le polynôme dans une base, par exemple dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$ (mais ce n'est pas le seul choix possible) :

$$P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots + a_{n-1}.x^{n-1}$$

L'opération consiste à déterminer les n composantes a_i du polynôme passant par les points imposés. Chaque point de passage constituant une condition scalaire sur les coefficients, il existe une solution unique si la dimension n de la base correspond au nombre de points.

Les composantes a_i sont solutions du système de n équations, pour n points imposés (x_i, y_i) :

$$y_i = a_0 + a_1.x_i + a_2.x_i^2 + \cdots + a_{n-1}.x_i^{n-1} \quad \text{avec } i \in \llbracket 1..n \rrbracket$$

La **base polynomiale de Lagrange** est plus pratique pour l'expression directe du polynôme interpolant à partir des points, mais s'avère plus lourde à évaluer pour l'ordinateur. Le polynôme interpolant n points, s'écrit directement dans la base de Lagrange sous la forme :

La **base polynomiale de Lagrange** est plus pratique pour l'expression directe du polynôme interpolant à partir des points, mais s'avère plus lourde à évaluer pour l'ordinateur. Le polynôme interpolant n points, s'écrit directement dans la base de Lagrange sous la forme :

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1 \& j \neq i}^n y_i \cdot \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

La **base polynomiale de Lagrange** est plus pratique pour l'expression directe du polynôme interpolant à partir des points, mais s'avère plus lourde à évaluer pour l'ordinateur. Le polynôme interpolant n points, s'écrit directement dans la base de Lagrange sous la forme :

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1 \& j \neq i}^n y_j \cdot \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

EXEMPLE : Pour 3 points $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, le polynôme interpolant s'écrit :

$$P(x) = y_1 \cdot \frac{(x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}$$

L'expression se simplifie pour chaque (x_i, y_i) , ce qui permet de vérifier que le polynôme P passe bien par les points.

L'interpolation polynomiale n'est cependant pas idéale dès que le nombre de point augmente : le polynôme interpolant peut alors présenter des oscillations entre les points (phénomène de Runge, FIG 1). L'interpolation peut alors être localement très éloignée des points. Il est souvent mieux adapté d'interpoler par morceaux.

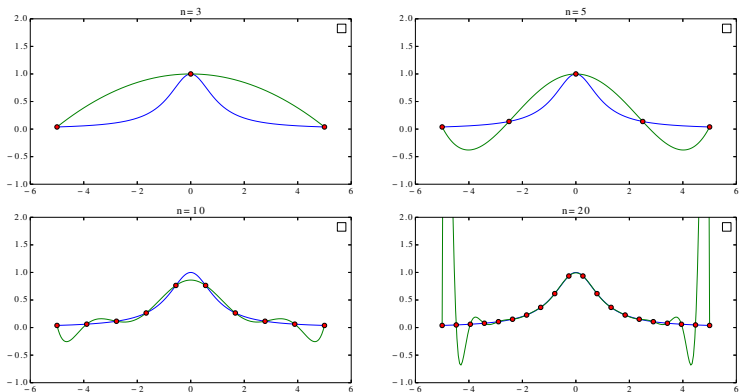


FIGURE: Interpolation lagrangienne de degré n , $n \in \{3, 5, 10, 20\}$, de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Interpolation par morceaux

Pour éviter les oscillations sur certaines fonctions, il est plus satisfaisant de réaliser une interpolation polynomiale de faible degré mais par morceaux.

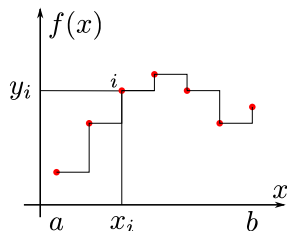


FIGURE: Interpolation de degré 0.

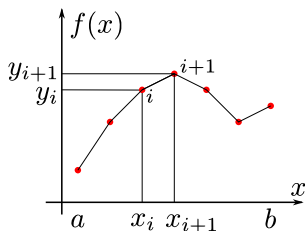


FIGURE: Interpolation de degré 1.

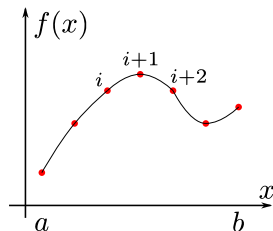


FIGURE: Interpolation de degré 2.

La fonction interpolante n'est pas continue bien entendu.

Interpolation par morceaux de degrés 0

Il s'agit de considérer qu'entre deux points, la valeur de la fonction vaut une constante, égale à la valeur du point précédent, du point suivant ou encore égale à la moyenne des valeurs des points encadrant.

Cette interpolation est très rudimentaire mais elle peut être suffisante si le nombre de point est très important.

Interpolation linéaire par morceaux (degré 1)

Une loi affine ($a.x+b$) est adoptée entre deux points successifs, passant évidemment par les deux points :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad y = y_i + (x - x_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

La fonction obtenue est continue mais sa dérivée ne l'est pas.

Interpolation quadratique par morceaux (degré 2)

Une loi parabolique ($a.x^2 + b.x + c$) est adoptée sur chaque intervalle regroupant 3 points successifs, passant par les 3 points.

La fonction obtenue est continue mais sa dérivée ne l'est pas car elle présente des discontinuités de la pente entre chaque portion de parabole. L'interpolation spline résoud ce problème et assure une continuité C_1 .

Autres méthodes par morceaux

Il existe bien d'autres méthodes pour interpoler un ensemble de points, pour une fonction ou plus généralement pour une courbe du plan, ou encore pour des surfaces, des champs scalaires ou vectoriels (plans ou volumiques).

Pour les courbes dans le plan, citons l'interpolation d'Hermite cubique, qui est une interpolation de degrés 3 par morceau assurant la continuité de la dérivée aux extrémités des morceaux, ou encore les splines cubiques, qui est une interpolation cubique (degrés 3) par morceaux avec des conditions de continuité des deux premières dérivées aux extrémités des morceaux, ce qui conduit à une fonction de classe C_2 .

De même, les courbes de Bezier permettent d'interpoler des courbes ou des surfaces par des expressions polynomiales.

De même, les courbes de Bezier permettent d'interpoler des courbes ou des surfaces par des expressions polynomiales.

On retrouve alors un équivalent des cerces (FIG 5) utilisées en menuiserie, carrosserie...

De même, les courbes de Bezier permettent d'interpoler des courbes ou des surfaces par des expressions polynomiales.

On retrouve alors un équivalent des cerces (FIG 5) utilisées en menuiserie, carrosserie...

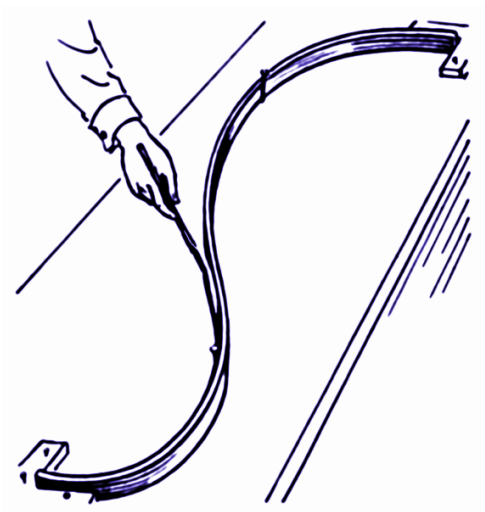


FIGURE: Interpolation à l'aide d'une cerce en menuiserie

Choix du degré du polynôme d'interpolation

Pour limiter les oscillations (phénomène de Runge), nous avons déjà indiqué qu'il faut éviter les polynômes de degrés trop élevés (FIG 1). Par ailleurs, la qualité de la courbe devient très pauvre pour des degrés trop faibles, ce qui pousse à utiliser préférentiellement les degrés 1, 2 ou 3.

Néanmoins, soulignons que ce choix dépend aussi de la régularité de la courbe à interpoler car le choix d'un degré 2 ou 3 suppose une continuité de la dérivée sur la courbe d'origine. Si la courbe présente des discontinuités ou des ruptures de pentes, le degré 1 est à privilégier.

La FIG 6 montre l'interpolation par morceaux d'un signal sinusoïdal (C_∞) et d'un signal carré (discontinu). Le choix d'un degré 2 est bien approprié pour la première courbe mais pas pour la seconde !

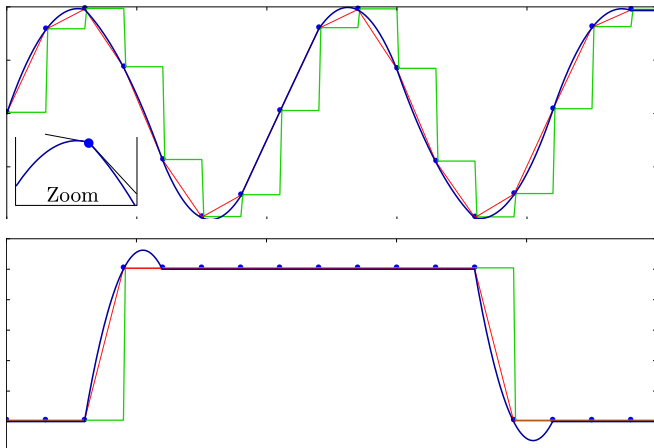


FIGURE: Interpolations d'ordres 0, 1 et 2 pour une sinusoïde (fonction régulière) et un signal carré (fonction discontinue).

Approximation polynomiale par moindres carrés

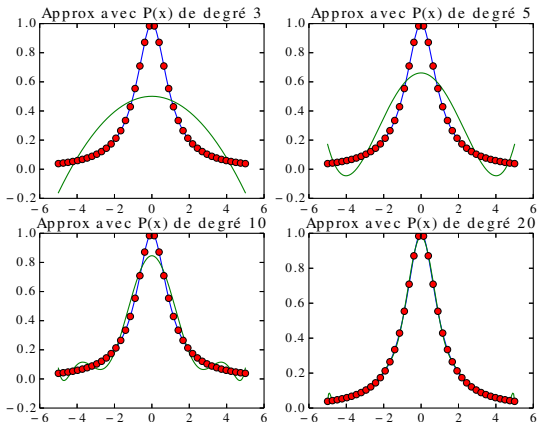


FIGURE: Approximation avec un polynôme de degré n , $n \in \{3, 5, 10, 20\}$, de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ discrétisée en 40 points.

Dans le cas de l'approximation polynomiale, on cherche à minimiser la distance (en norme 2) entre un polynôme de degré m et les n points imposés $(x_i, y_i)_1^n$.

$$\text{Si } P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m \cdot x^m$$

$$\text{alors } E_{rr}(a_0, \dots, a_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2$$

Minimiser E_{rr} suivant les paramètres $(a_j)_{j=0}^m$, revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_{rr}}{\partial a_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial E_{rr}}{\partial a_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, m \rrbracket \sum_{i=1}^n \left(P(x_i) - y_i \right) \cdot \frac{\partial P(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n \left(P(x_i) - y_i \right) \cdot x_i^j = 0$$

La minimisation de D revient alors à résoudre le système suivant:

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\begin{bmatrix} x_i^0 \cdot x_i^0 & \dots & x_i^m \cdot x_i^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i^0 \cdot x_i^m & \dots & x_i^m \cdot x_i^m \end{bmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}}_a = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_i^0 \\ \vdots \\ x_i^m \end{bmatrix}}_b \Rightarrow a = M^{-1} \cdot b$$

Sommaire

- 1 Interpolation et approximation de fonctions
- 2 Intégration numérique
 - Principe, degré et ordre de la méthode
 - Méthodes d'intégration composée
- 3 Dérivation numérique

Principe, degré et ordre de la méthode

L'**intégration numérique (ou quadrature)** consiste à intégrer (de façon approchée) une fonction sur un intervalle borné $[a, b]$, c'est-à-dire **calculer l'aire** sous la courbe représentant la fonction, à partir d'un calcul ou d'une mesure en un nombre fini n de points.

La répartition des points en abscisse est généralement uniforme (pas d'échantillonnage constant $h = \frac{b-a}{n}$) mais il existe des méthodes à pas variable, ou encore à pas adaptatif.

L'intégration des polynômes étant très simple, l'opération consiste généralement à **construire une interpolation polynomiale** (de degré plus ou moins élevé) par morceaux (intégration composée) puis d'**intégrer le polynôme sur chaque morceau**.

Les méthodes de quadrature élémentaires composées sont de la forme:

$$\int_a^b f(x).dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \omega_j \cdot f(\lambda(i,j)) = I(f, n, m)$$

$$\text{avec } x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad ; \quad \lambda(i,j) \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^m \omega_j = 1$$

Les méthodes de quadrature élémentaires composées sont de la forme:

$$\int_a^b f(x).dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \omega_j \cdot f(\lambda(i,j)) = I(f, n, m)$$

avec $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$; $\lambda(i,j) \in [x_i, x_{i+1}]$ et $\sum_{j=0}^m \omega_j = 1$

DÉFINITION: Méthode de degré N

Méthode pour laquelle la formule approchée est exacte pour tout polynôme de degré au plus N et inexacte pour au moins un polynôme de degré $N + 1$.

Si on appelle $E_{rr}(f, n, N)$ la différence entre la solution exacte exacte de l'intégrale et sa valeur approchée par une méthode d'ordre N sur n segment

$$\begin{aligned} E_{rr}(f, n, N) &= \left| \int_a^b f(x).dx - I(f, n, m) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x).dx - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \omega_j \cdot f(\lambda(i, j)) \right| \end{aligned}$$

alors on peut montrer, moyennant une régularité suffisante de f , qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Err(f, n, N) \leq \frac{K}{n^{N+1}}$$

Une méthode de degré N est donc d'ordre au moins $N + 1$.

La précision de l'intégration numérique peut ainsi s'améliorer en augmentant le nombre de points n (en diminuant le pas d'échantillonnage h) ou en augmentant le degré de l'interpolation polynomiale (sous réserve de bonnes propriétés de continuité de la courbe).

Méthodes d'intégration composée

Méthode des rectangles (degré 0)

L'intégration la plus simple est celle de degré 0 où le polynôme interpolateur sur chaque segment est une constante ($m = 0$ et $\omega_0 = 1$) prise soit à gauche, soit à droite de l'intervalle d'intégration. L'intégrale est donc approchée par des rectangles pour calculer l'aire sous la courbe :

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(\lambda(i, 0))$$

Méthode des rectangles (degré 0)

L'intégration la plus simple est celle de degré 0 où le polynôme interpolateur sur chaque segment est une constante ($m = 0$ et $\omega_0 = 1$) prise soit à gauche, soit à droite de l'intervalle d'intégration. L'intégrale est donc approchée par des rectangles pour calculer l'aire sous la courbe :

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(\lambda(i, 0))$$

$$\Rightarrow \quad E_{rr}(f, n, 0) \leq \frac{K}{n} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sup |f'|}{2} \cdot |b-a|^2$$

Rectangles à gauche (degré 0)

Dans le cas de la formule des rectangles à gauche, on pose $\lambda(i, 0) = x_i$:

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Rectangles à droite (degré 0)

Dans le cas de la formule des rectangles à droite, on pose $\lambda(i, 0) = x_{i+1}$:

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

Méthode point milieu (degré 1)

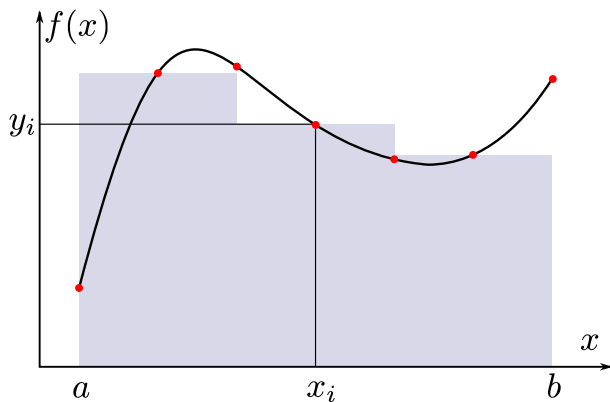


FIGURE: Intégration au point milieu.

La méthode du point milieu consiste à considérer la fonction interpolante constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et égale à la valeur prise par le point au milieu de l'intervalle $\lambda(i, 0) = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (FIG 8). La valeur approchée de l'intégrale s'écrit alors :

$$I(f, n, 0) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_{rr}(f, n, 0) \leq \frac{K}{n^2} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sup |f''|}{24} \cdot |b-a|^3$$

La méthode est d'ordre 3. En effet, la méthode du point milieu est exacte pour les polynômes de degré 1.

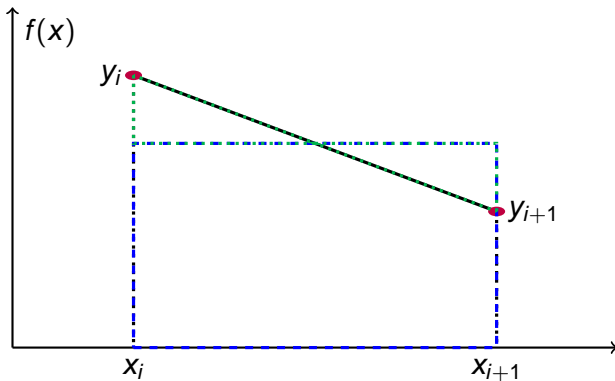


FIGURE: Méthode point milieu - degré 1

Méthode trapèze (degré 1)

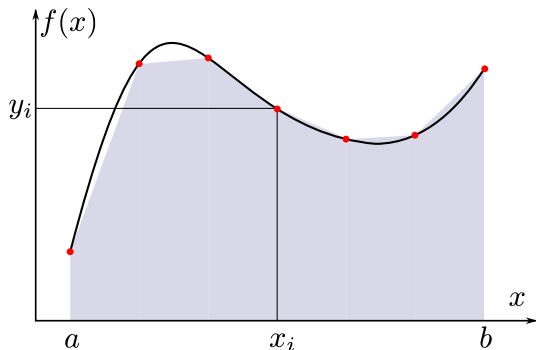


FIGURE: Intégration par la méthode trapèze.

La méthode du trapèze s'appuie sur une interpolation linéaire entre chaque point (FIG 10). La valeur approchée de l'intégrale s'écrit alors :

$$I(f, n, 1) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^1 \omega_j \cdot f(\lambda(i, j))$$

$$\text{avec } \omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda(i, 0) = x_i; \lambda(i, 1) = x_{i+1}$$

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \left(\sum_{i=2}^{n-1} y_i \right) \right)$$

$$\Rightarrow \text{Err}(f, n, 1) \leq \frac{K}{n^2} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sup |f''|}{12} \cdot |b - a|^3$$

Cette expression est à nouveau similaire au calcul approché réalisé au paragraphe précédent.

La méthode de point milieu est au final plus précise que celle des trapèzes.

Méthode de Simpson (degré 2)

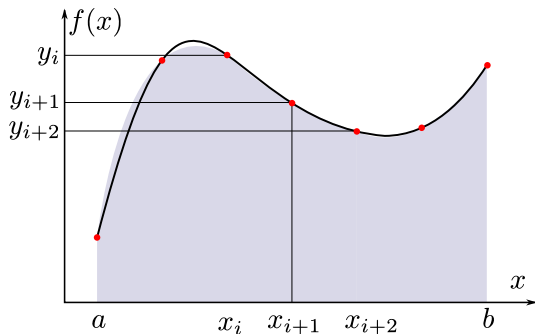


FIGURE: Intégration par la méthode de Simpson.

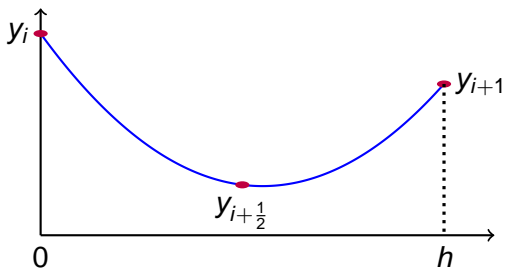
La méthode de Simpson s'appuie sur une interpolation quadratique $a.x^2 + b.x + c$ sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$: (FIG 11).

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \omega_j \cdot f(\lambda(i,j)) = I(f, n, 2)$$

$$\text{avec } \lambda(i,0) = x_i; \lambda(i,1) = x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \text{ et } \lambda(i,2) = x_{i+1}$$

En appliquant une translation de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ sur l'intervalle $[0, h]$, l'interpolation s'écrit :

$$\begin{cases} y_i = c \\ y_{i+\frac{1}{2}} = a \cdot \frac{h^2}{4} + b \cdot \frac{h}{2} + c \\ y_{i+1} = a \cdot h^2 + b \cdot h + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot \frac{y_i + y_{i+1} - 2 \cdot y_{i+\frac{1}{2}}}{h^2} \\ b = \frac{4 \cdot y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i+1} - 3 \cdot y_i}{h} \\ c = y_i \end{cases}$$



L'intégrale sur $[0, h]$ vaut alors :

L'intégrale sur $[0, h]$ vaut alors :

$$\begin{aligned}\int_0^h (a.x^2 + b.x + c).dx &= \left[a.\frac{x^3}{3} + b.\frac{x^2}{2} + c \right]_0^h \\ &= \left(a.\frac{h^3}{3} + b.\frac{h^2}{2} + c.h \right) \\ &= h.\frac{(4-9+6).y_i + (-8+12).y_{i+\frac{1}{2}} + (4-3).y_{i+1}}{6} \\ &= \frac{h}{6} \cdot (y_i + 4.y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1})\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{2}{3}$$

La méthode est de degré 3 et d'ordre 4. En effet :

$$\text{d'où } \omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{2}{3}$$

La méthode est de degré 3 et d'ordre 4. En effet :

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + 4.y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1}}{6}$$

$$\text{d'où } \omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{2}{3}$$

La méthode est de degré 3 et d'ordre 4. En effet :

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + 4.y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1}}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Err}(f, n, 2) \leq \frac{K}{n^4} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sup |f^{(4)}|}{180} \cdot |b-a|^5$$

L'interpolation de Simpson est plus précise que l'interpolation trapèze lorsque la fonction à intégrer est raisonnablement continue. Elle se justifie beaucoup moins lorsque la fonction présente des discontinuités.

Lors d'une intégration "temps réel", elle introduit par ailleurs un décalage temporel de $2.h$ (pour éviter $y_{i+\frac{1}{2}}$...) qui est souvent plus pénalisant que l'erreur d'intégration.

Autres méthodes

Méthode de	l	degré	poids
Boole-Villarceau	4	5	$\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}; \omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}; \omega_2 = \frac{2}{15}$
Weddle-Hardy	6	7	$\omega_0 = \omega_6 = \frac{41}{840}; \omega_1 = \omega_5 = \frac{9}{35}; \omega_2 = \omega_4 = \frac{9}{280}; \omega_3 = \frac{34}{105}$

Autres méthodes

Méthode de	l	degré	poids
Boole-Villarceau	4	5	$\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}; \omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}; \omega_2 = \frac{2}{15}$
Weddle-Hardy	6	7	$\omega_0 = \omega_6 = \frac{41}{840}; \omega_1 = \omega_5 = \frac{9}{35}; \omega_2 = \omega_4 = \frac{9}{280}; \omega_3 = \frac{34}{105}$

Méthode de	l	degré	points
Boole-Villarceau	4	5	$\lambda(i, j) = x_i + j \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{4}$
Weddle-Hardy	6	7	$\lambda(i, j) = x_i + j \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{6}$

Autres méthodes

Méthode de	l	degré	poids
Boole-Villarceau	4	5	$\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}; \omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}; \omega_2 = \frac{2}{15}$
Weddle-Hardy	6	7	$\omega_0 = \omega_6 = \frac{41}{840}; \omega_1 = \omega_5 = \frac{9}{35}; \omega_2 = \omega_4 = \frac{9}{280}; \omega_3 = \frac{34}{105}$

Méthode de	l	degré	points
Boole-Villarceau	4	5	$\lambda(i, j) = x_i + j \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{4}$
Weddle-Hardy	6	7	$\lambda(i, j) = x_i + j \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{6}$

Voir aussi les méthodes de Newton-Cotes.

Sommaire

1 Interpolation et approximation de fonctions

2 Intégration numérique

3 Dérivation numérique

- Dérivée première
- Dérivée seconde
- Influence du bruit de mesure

La dérivation numérique consiste à dériver (de façon approchée) une fonction sur un intervalle borné $[a, b]$, c'est-à-dire calculer la pente de la courbe représentant la fonction, à partir d'un calcul ou d'une mesure en un nombre fini de points.

La répartition des points en abscisse est généralement uniforme (pas d'échantillonnage constant h) mais il existe des méthodes à pas variable, ou encore à pas adaptatif.

La dérivation des polynômes étant très simple, l'opération consiste généralement à construire une interpolation polynomiale par morceaux (de degré plus ou moins élevé) puis de dériver le polynôme sur chaque morceau.

La précision de l'intégration numérique peut s'améliorer en augmentant le nombre de points n (en diminuant le pas d'échantillonnage h) ou en augmentant le degré de l'interpolation polynomiale (sous réserve de bonnes propriétés de continuité de la courbe).

Dérivée première

Méthode à 1 pas

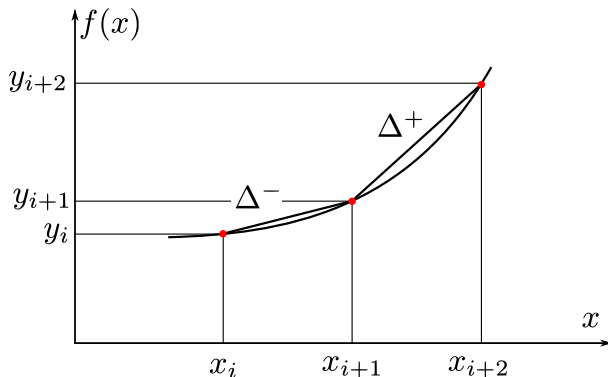


FIGURE: Dérivation à 1 pas.

L'estimation de la dérivée la plus simple consiste à calculer la pente à partir du point courant et du point précédent ou suivant (FIG 12). L'estimation de la dérivée au point i peut alors se calculer par :

- différence avant : $D_i = \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i)$ (pente de la droite Δ^+),
- différence arrière : $D_i = \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1})$ (pente de la droite Δ^-),

Évidemment, lorsqu'il s'agit de dériver une fonction temporelle "en temps réel", le point suivant n'est pas encore connu donc seule la différence arrière peut être calculée.

Notons aussi que le calcul de la dérivée à partir de n points, conduit à un tableau de valeur de dimension $n - 1$.

Méthode à 2 pas

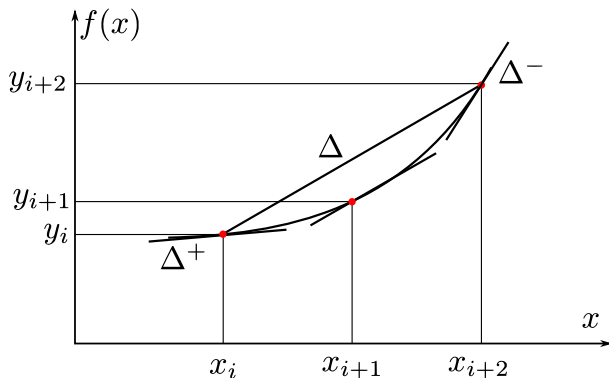


FIGURE: Dérivation à 2 pas.

Une méthode à 2 pas consiste à utiliser 3 points pour une meilleure estimation de la dérivée (FIG 13).

Sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h , la courbe est interpolée par un polynôme d'ordre 2 : $y = a_i \cdot x^2 + b_i \cdot x + c_i$. Les coefficients a_i , b_i et c_i ont déjà été calculés au paragraphe 11 en fonction des y_i . Il suffit de dériver le polynôme respectivement en x_i , x_{i+1} et x_{i+2} pour obtenir respectivement les différences avant en x_i , centrée en x_{i+1} et arrière en x_{i+2} .

Après translation des abscisses, il s'agit en réalité de dériver en 0, $\frac{h}{2}$ et h :

- différence avant :

$$\begin{aligned}
 D_i &= -2.a_i.h + b_i \\
 &= \frac{(-4 - 3).y_i + (8 + 4).y_{i+\frac{1}{2}} + (-4 - 1).y_{i+1}}{h} \\
 &= \frac{-7.y_{i+\frac{1}{2}} + 12.y_i - 5.y_{i+1}}{h} \quad (\text{pente de la droite } \Delta^+)
 \end{aligned}$$

- différence centrée :

$$D_{i+1} = b_i = \frac{4.y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i+1} - 3.y_i}{h} \quad (\text{pente de la droite } \Delta)$$

- différence arrière :

$$\begin{aligned}
 D_{i+2} &= 2.a_i.h + b_i \\
 &= \frac{(4 - 3).y_i + (-8 + 4).y_{i+\frac{1}{2}} + (4 - 1).y_{i+1}}{h} \\
 &= \frac{y_i - 4.y_{i+\frac{1}{2}} + 3.y_{i+1}}{h} \quad (\text{pente de la droite } \Delta^-)
 \end{aligned}$$

Il faut noter que la différence centrée est aussi simple à calculer que dans le cas d'une méthode à 1 pas, et correspond à la pente entre les deux points de part et d'autre du point courant. La précision étant d'ordre 2, elle constitue un très bon compromis.

Évidemment, lorsqu'il s'agit de dériver une fonction temporelle "en temps réel", le ou les points suivants ne sont pas encore connus donc seule la différence arrière peut être calculée.

Dérivée seconde

Pour dériver deux fois une courbe donnée par une liste de points, le premier réflexe consiste à appliquer deux fois une dérivée simple (par une méthode à 1 ou 2 pas).

Il est cependant plus rapide de calculer directement la dérivée seconde à partir du polynôme d'interpolation, qui doit bien évidemment être au moins de degré 2 pour obtenir un résultat non nul.

En utilisant une méthode à 2 pas, le polynôme d'interpolation s'écrit $y = a.x^2 + b.x + c$. Les coefficients a , b et c ont déjà été calculés au paragraphe 11 en fonction des y_i , ce qui conduit à une dérivée seconde constante sur tout l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$f''(x) = 2.a = 4. \frac{y_i + y_{i+1} - 2.y_{i+\frac{1}{2}}}{h^2}$$

Selon si cette valeur de la dérivée seconde est adoptée en i , $i + 1$ ou $i + 2$, il s'agit de la différence seconde avant, centrée ou arrière. On peut montrer que cela revient à calculer deux dérivées simples à 1 pas.

Influence du bruit de mesure

Lorsque la courbe est issue d'une mesure, elle est généralement entachée d'un léger bruit, qui peut devenir catastrophique pour l'évaluation de la dérivée (FIG 14).

En effet, si les points de mesure restent "en moyenne" au voisinage de la valeur mesurée, il existe des fluctuations rapides (c'est-à-dire à la fréquence d'échantillonnage) entre les points successifs (voir zoom de la FIG 14).

Le calcul de la dérivée conduit à déterminer la pente entre deux points successifs, ce qui perturbe fortement le signal dérivé et cache les évolutions lentes du signal (lentes devant la période d'échantillonnage).

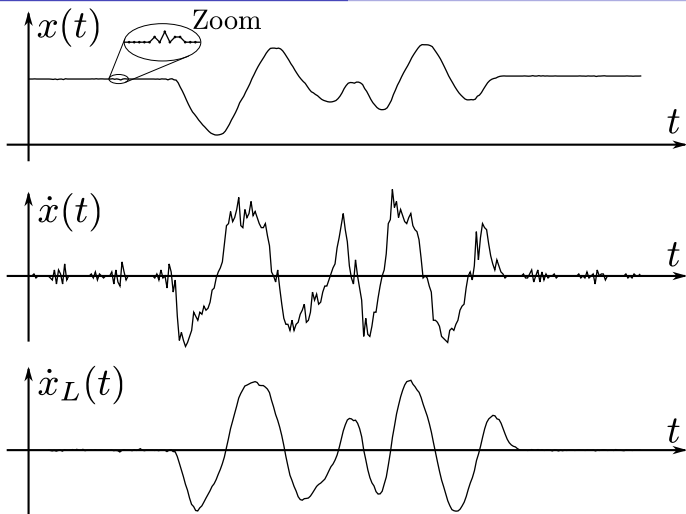


FIGURE: Mesure d'une position au cours du temps $x(t)$ par un capteur potentiométrique, dérivée à 1 pas $\dot{x}(t)$ et dérivée à 1 pas lissée en effectuant la différence sur 10 pas.

Deux solutions sont possibles :

- filtrer (ou lisser) le signal d'origine pour supprimer l'essentiel du bruit, puis dériver,
- calculer la dérivée sur un temps plus long que le temps d'échantillonnage, par exemple pour une méthode à 1 pas en calculant la pente entre deux points espacés de k pas (solution adoptée pour $\dot{x}_L(t)$ sur la FIG 14, avec $k = 10$).

Dans les deux cas, le signal dérivé sera entaché d'un retard sur le signal d'origine, ce qui oblige à trouver un compromis entre la qualité du signal dérivé et le retard. k est généralement de l'ordre de 5 à 20 pas selon le bruit, le pas d'échantillonnage, les fréquences à observer dans le signal et le retard admissible.

Pour un lissage par moyenne mobile, on peut montrer que les deux méthodes s'avèrent identiques.